Encyklopedické heslo „INTEGRÁL"

In: Štefan Schwabik (author); Petra Šarmanová (author): Malý průvodce historií integrálu. (Czech). Praha: Prometheus, 1996. pp. 92–94.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/400859

Encyklopedické heslo „INTEGRÁL“

Při sledování historického vývoje integrálu jsme se setkávali s pojmy primitivní funkce, určitý a neurčitý integrál, integrovatelnost v Riemannově a Lebesqueově smyslu a jinými. Uveďme nyní jejich stručný přehled.

Integrál je jeden z ústředních pojmů matematické analýzy a matematiky vůbec. Vznikl na základě dvou úloh:
1. určení funkce na základě znalosti její derivace,
2. výpočet plochy, která je vymezena grafem funkce f na intervalu $[a, b]$ a osou nezávislé proměnné x.

Tyto dvě úlohy vedou k pojmu **neurčitého** a **určitého integrálu.** Vyšetřování vlastností a výpočet těchto spolu souvisejících podob integrálu je obsahem **integrálního počtu.**

S rozvojem matematiky a v souvislosti s potřebami přírodních věd a techniky se pojem integrálu vyvíjel, byl předmětem mnoha zobecnění a prošel řadou změn.

Neurčitý integrál

Primitivní funkcí k funkci f jedné reálné proměnné x na intervalu (a, b) se nazývá libovolná funkce F, jejíž derivace $F'(x)$ pro každé $x \in (a, b)$ má hodnotu $f(x)$. (Podobně lze definovat primitivní funkci na uzavřeném intervalu $[a, b]$; v krajních bodech a a b je však třeba požadovat vztah $F'(x) = f(x)$ pro příslušné jednostranné derivace.)

Jestliže je F primitivní funkcí k funkci f na intervalu (a, b), potom je každá funkce tvaru $F + C$, kde C je konstanta, rovněž primitivní funkcí k f na intervalu (a, b). Naopak platí, že libovolné dvě primitivní funkce k téže funkci f na intervalu (a, b) se liší o konstantu. Jestliže je F jedna z primitivních funkcí k funkci f na intervalu (a, b), potom libovolnou jinou primitivní funkci k funkci f na intervalu (a, b) lze psát ve tvaru $F + C$, kde C je konstanta.

Množina všech primitivních funkcí k funkci f na intervalu (a, b) se nazývá **neurčitým integrálem** funkce f na intervalu (a, b) a bývá označována symbolem

$$\int f(x)dx.$$

Jedním ze základních tvrzení matematické analýzy je tzv. základní věta integrálního počtu nebo věta o existenci primitivní funkce: *každá funkce f, která je spojitá v intervalu (a, b), má na tomto intervalu primitivní funkci, a tedy také neurčitý integrál.*

Určitý integrál

Pojem určitého integrálu je definován buď jako jistá limita integrálních součtů, nebo v případě, že je dána funkce f, ke které v intervalu $[a, b]$ existuje primitivní funkce F, jako rozdíl $F(b) - F(a)$. V případě, že je integrál určen pomocí primitivní funkce, mluvíme o **Newtonově integrálu.**

Určitý integrál funkce f na intervalu (a, b) se označuje symbolem

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Určitý integrál je svázán s výpočtem velikosti plochy dle druhé úlohy uvedené v úvodu, která, přesněji řečeno, je určena grafem funkce f na intervalu $[a, b]$, osou x a přímkami $x = a$ a $x = b$.

Určitý integrál funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ na intervalu $[a, b]$ může být určen pomocí tzv. *Riemannových integrálních součtů* tvaru

$$S(D) = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

kde $D : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k = b$ je dělení intervalu $[a, b]$ a $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ pro $i = 1, \ldots, k$ je jistý systém bodů vybraných v jednotlivých dělících intervalech.

Jestliže se integrální součty $S(D)$ (obecně závislé na dělení D a také na systému vybraných bodů $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, k$) blíží k nějaké hodnotě, když se dělení v nějakém smyslu „zjemňují“, (např. tak, že se požaduje, aby se hodnota $\nu(D) = \max\{x_i - x_{i-1}; i = 1, \ldots, k\}$ blížila k nule pro $k \to \infty$), je tato hodnota nazývána určitým **Riemannovým integrálem** funkce f na intervalu $[a, b]$ a funkce f je pak **integrovatelná v Riemannově smyslu.**

Na poněkud jiných integrálních součtech a na pojmu míry je založen postup, vedoucí k obecnějším typům určitého integrálu. Nejznámější z nich se nazývá **Lebesgueův integrál.**

K zavedení určitého integrálu funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ na intervalu $[a, b]$ v Lebesgueově smyslu se obor hodnot funkce f rozdělí na intervaly pomocí bodů $\cdots < y_{-2} < y_{-1} < y_0 < y_1 < y_2 < \ldots$ a symbolem M_i se označí množina všech hodnot $x \in [a, b]$, pro které je $y_{i-1} \leq f(x) < y_i$. Symbolem $m(M_i)$ označme **Lebesgueovu míru** množiny M_i. Pro funkci $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ na intervalu $[a, b]$ nyní definujme *integrální součet* v Lebesgueově smyslu rovností

$$\sigma = \sum_i \eta_i m(M_i),$$

kde η_i je libovolné číslo, pro které platí $y_{i-1} \leq \eta_i \leq y_i$.

Funkce f se pak nazývá **integrovatelná v Lebesgueově smyslu** na intervalu $[a, b]$, existuje-li limita jejích integrálních součtů σ, jestliže se blíží k nule $\max\{y_i - y_{i-1}; i \text{ je celé }\}$, tj. když existuje číslo I tak, že k danému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že když $\max\{y_i - y_{i-1}; i \text{ je celé }\} < \delta$, potom $|\sigma - I| < \varepsilon$. Limita I se pak nazývá **Lebesgueovým integrálem** funkce f na intervalu $[a, b]$.

Lebesgueův integrál je obecnější než integrál Riemannův v tom smyslu, že každá funkce f, která má na intervalu $[a, b]$ Riemannův integrál, má rovněž Lebesgueův integrál na tomto intervalu a oba integrály mají stejnou hodnotu. Naopak však toto tvrzení neplatí.

Obecnost, které bylo dosaženo zavedením Lebesgueova integrálu, je podstatná v mnoha oblastech moderní matematické analýzy (jde např. o teorii distribucí, definování zobecněných pojmů řešení diferenciálních rovnic, o moderní teorii Fourierových řad, prostory integrovatelných funkcí ve funkcionální analýze, teorii pravděpodobnosti, ...). Mnohé pojmy a teorie lze rozvíjet pouze v tom případě, že je určitý integrál chápán v Lebesgueově smyslu.

Neurčitý integrál funkce f na intervalu $[a, b]$ v Lebesgueově smyslu je určen rovností

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad \text{pro } x \in [a, b].$$

Při této definici neurčitého (Lebesgueova) integrálu platí vztah $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in [a, b]$ s výjimkou množiny, jejíž Lebesgueova míra je nulová (tj. *skoro všude* v intervalu $[a, b]$).

Skutečnost, že ne každá funkce, která má Newtonův integrál, musí mít i Lebesgueův integrál, vedla v tomto století k zavedení dalších integrálů, které jsou obecnější než Lebesgueův integrál; jde o tzv. **Perronův integrál** a **Denjoyův totál.**

Určitý integrál lze obdobnými postupy zavést i pro funkce více proměnných, přičemž se integruje přes vícerozměrné oblasti.