Kapitola 3

Teorie svazů a matematická logika

3.1 Základní matematické pojmy

V následujících dvou oddílech uvádíme základní pojmy teorie svazů a topologických prostorů a připomínáme některá fakta, která jsou potřebná pro orientaci v dalším textu. Tento oddíl je pojat pouze informativně, pro důkladnější seznámení se svazy a topologickými prostory odkazujeme čtenáře např. na [Pro90] a [Pul82].

3.1.1 Základní pojmy teorie svazů

Definice: Neprázdná částečně uspořádaná množina $(S, \leq)$[1] se nazývá *svaz*, pokud ke každým dvěma prvkům $a, b \in S$ existuje
– supremum $c = a \vee b$ (nazývané *spojení* prvků a, b), pro něž platí

$$a \leq c \; et \; b \leq c,$$

$$(\forall x \in S)((a \leq x \; et \; b \leq x) \Rightarrow c \leq x),$$

– infimum $d = a \wedge b$ (nazývané *průsek* prvků a, b), pro něž platí

$$d \leq a \; et \; d \leq b,$$

$$(\forall x \in S)((x \leq a \; et \; x \leq b) \Rightarrow x \leq d).$$

Existuje-li supremum a infimum pro každou podmnožinu množiny S, pak se S nazývá *úplný svaz*.

Ekvivalentní definice svazu může být vyslovena pomocí vlastností binárních operací spojení a průseku:

[1] Relace $\leq$ neostrého částečného uspořádání je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.

Definice: Neprázdná množina S se dvěma binárními operacemi $\vee$ a $\wedge$, tj. trojice $(S, \vee, \wedge)$, se nazývá *svaz*, pokud tyto operace splňují pro každé $a, b, c \in S$ následující identity:

1. $a \vee a = a,\ a \wedge a = a,$
2. $a \vee b = b \vee a,\ a \wedge b = b \wedge a,$
3. $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c),\ (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c),$
4. $a \vee (a \wedge b) = a,\ a \wedge (a \vee b) = a.$

Definice: Říkáme, že svaz S je *generován* množinou $G \subseteq S$, jestliže jediný podsvaz svazu S (neprázdná podmnožina uzavřená na operace spojení a průseku) obsahující G je sám svaz S.

Přirozeným způsobem je zaveden pojem *svazového homomorfismu* svazu $(S, \vee, \wedge)$ do svazu $(S^*, \vee^*, \wedge^*)$. Jedná se o zobrazení $f : S \to S'$ splňující vlastnosti

$$(\forall a \in S)(\forall b \in S)(f(a \vee b) = f(a) \vee^* f(b)),$$
$$(\forall a \in S)(\forall b \in S)(f(a \wedge b) = f(a) \wedge^* f(b)).$$

Definice: Neprázdná podmnožina I svazu S se nazývá *ideál*, jestliže platí:

1. $(\forall a \in I)(\forall b \in I)(a \vee b \in I),$
2. $(\forall a \in I)(\forall b \in S)((b \leq a) \Rightarrow b \in I).$

Ideál $P \neq S$ se nazývá *prvoideál* svazu S, jestliže platí

$$(\forall a \in S)(\forall b \in S)(a \wedge b \in P \Rightarrow (a \in P \text{ vel } b \in P)).$$

Definice: Neprázdná podmnožina F svazu S se nazývá *filtr* (příp. *duální ideál*), jestliže platí:

1. $(\forall a \in F)(\forall b \in F)(a \wedge b \in F),$
2. $(\forall a \in F)(\forall b \in S)((a \leq b) \Rightarrow b \in F).$

Filtr $P \neq S$ se nazývá *prvofiltr* svazu S, jestliže platí

$$(\forall a \in S)(\forall b \in S)(a \vee b \in P \Rightarrow (a \in P \text{ vel } b \in P)).$$

Definice: Prvek svazu S se nazývá *nula* (a značí se 0), resp. *jednotka* (a značí se 1), jestliže platí

$$(\forall a \in S)(0 \vee a = a \text{ et } 0 \wedge a = 0), \quad \text{resp.} \quad (\forall a \in S)(1 \vee a = 1 \text{ et } 1 \wedge a = a).$$

Definice: Svaz S obsahující jednotku a nulu se nazývá *komplementární*, pokud pro každé $a \in S$ existuje prvek $a' \in S$, že $a \vee a' = 1$ *et* $a \wedge a' = 0$. Prvek a' se nazývá *doplněk* prvku a.

Svaz S se nazývá *distributivní*, jestliže platí

$$(\forall a \in S)(\forall b \in S)(\forall c \in S)(a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \text{ et } a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)).$$

Komplementární distributivní svaz se nazývá *Booleův svaz.*[2] Chápeme-li tento svaz jako algebru se dvěma binárními ($\vee$ a $\wedge$), jednou unární ($'$) a dvěma nulárními operacemi (1 a 0), pak hovoříme o *Booleově algebře.*

Definice: Nechť $(B, \vee, \wedge, ', 1, 0)$, $(B^*, \vee^*, \wedge^*, '^*, 1^*, 0^*)$ jsou Booleovy algebry. Zobrazení $f : A \to B$ se nazývá *homomorfismus Booleových algeber*, jestliže je svazovým homomorfismem a navíc platí

$$(\forall a \in A)(f(a') = (f(a))'^*).$$

Nebude-li uvedeno jinak, bude homomorfismus $f : B \to B^*$, kde B, B^* jsou Booleovy algebry, chápán jako homomorfismus Booleových algeber. Pro zjednodušení zápisu budeme značit operace v obou strukturách stejně.

3.1.2 Základní topologické pojmy

Definice: Říkáme, že v množině P je dána *topologie* nebo že P je *topologický prostor*, je-li na množině všech podmnožin množiny P definována tzv. *uzávěrová operace* (přiřazující každé množině $A \subseteq P$ její *uzávěr* $\overline{A}$) splňující:

1. $\overline{\emptyset} = \emptyset$,
2. $(\forall A \subseteq P)\left(A \subseteq \overline{A}\right)$,
3. $(\forall A \subseteq P)\left(\overline{\overline{A}} = \overline{A}\right)$,
4. $(\forall A \subseteq P)(\forall B \subseteq P)\left(\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}\right)$.

Množina se nazývá *uzavřená*, pokud je rovna svému uzávěru. *Otevřené* množiny jsou doplňky množin uzavřených. Každá topologie v P je jednoznačně určena systémem všech uzavřených, resp. všech otevřených podmnožin.[3]

Soustava B otevřených podmnožin prostoru P takových, že každá otevřená podmnožina prostoru P je sjednocením podmnožin ze soustavy B, se nazývá *otevřená báze* prostoru P.

Definice: Podmnožina U prostoru P se nazývá *okolí* prvku $a \in P$, jestliže existuje otevřená množina $V \subseteq P$, pro kterou je $V \subseteq U$ a $a \in V$.

[2] Díky distributivitě existuje ke každému prvku právě jeden doplněk.

[3] Např. pomocí otevřených množin je topologický prostor definován takto:
Nechť P je množina a O systém podmnožin z P splňující:

1. P a $\emptyset$ náleží do O,
2. libovolné sjednocení podmnožin z O náleží do O,
3. libovolný průnik konečně mnoha podmnožin z O náleží do O.

Pak P nazýváme topologický prostor se systémem otevřených množin O.

Systém okolí prvku $a \in P$ se nazývá *úplný systém okolí* prvku a, pokud každá otevřená množina obsahující tento prvek obsahuje nějaké okolí z tohoto systému.

Definice: Množina $A \subseteq P$ se nazývá *hustá* v P, jestliže $\overline{A} = P$.

Definice: Nechť P, Q jsou topologické prostory. Zobrazení $f : P \to Q$ nazýváme *spojité*, jestliže úplný vzor $f^{-1}(A)$ každé otevřené množiny $A \subseteq Q$ je otevřená množina v P.

Zobrazení $f : P \to Q$ se nazývá *homeomorfismus*, jestliže je bijektivní a f a f^{-1} jsou spojitá zobrazení.

Definice: Topologický prostor P se nazývá *Kolmogorovův* či T_0*-prostor*, platí-li

$$(\forall a \in P)(\forall b \in P)\left(\overline{\{a\}} = \overline{\{b\}} \;\Rightarrow\; a = b\right).$$

Topologický prostor P se nazývá *Fréchetův* či T_1*-prostor*, platí-li

$$(\forall a \in P)\left(\overline{\{a\}} = \{a\}\right).$$

Topologický prostor P se nazývá *Hausdorffův* či T_2*-prostor*, jestliže pro každé dva různé prvky $a, b \in P$ existují disjunktní otevřené množiny $A, B \subseteq P$, pro které $a \in A$ a $b \in B$.

Definice: Topologický prostor P nazýváme *kompaktní*, jestliže z každého systému otevřených množin, který pokrývá P, lze vybrat konečný podsystém, který rovněž pokrývá P.

Topologický prostor P se nazývá *totálně nesouvislý*, existuje-li pro každé dva různé prvky $a, b \in P$ rozklad prostoru P na dvě disjunktní uzavřené a současně otevřené podmnožiny A, B tak, že $a \in A, b \in B$.

Kompaktní totálně nesouvislý Hausdorffův prostor se nazývá *Booleův prostor*.

Definice: Topologie na množině P se nazývá *diskrétní*, jestliže je dána systémem všech podmnožin množiny P. Tedy všechny podmnožiny množiny P jsou v diskrétní topologii otevřené. Topologický prostor, který je opatřen diskrétní topologií, nazýváme *diskrétní prostor*.

Nechť m je nekonečné kardinální číslo. *Zobecněným Cantorovým diskontinuem* C_m nazýváme kartézský součin m kopií dvouprvkového diskrétního topologického prostoru. Speciálně $C_{\aleph_0}$ se nazývá *Cantorovo diskontinuum* a budeme jej označovat C.

Platí, že C_m je Booleův prostor.

Na závěr uvádíme dvě definice, které se vztahují k teorii svazů, ale v následujícím textu se často vyskytují v souvislosti s topologickými prostory.

Definice: *Množinovým okruhem* (ne nutně topologického) prostoru je označována (libovolná) množina jeho podmnožin, která je uzavřená na množinové průniky a sjednocení.

Definice: *Tělesem množin* (ne nutně topologického) prostoru P nazýváme svaz podmnožin množiny P, který je uzavřen na operaci množinového doplňku, tedy soubor A podmnožin, pro který platí

$$(\forall A_1 \in A)(\forall A_2 \in A)(A_1 \cup A_2 \in A \;\; et \;\; A_1 \cap A_2 \in A \;\; et \;\; P - A_1 \in A).$$

3.2 Práce z teorie svazů a Booleových algeber

Po druhé světové válce se Ladislav Svante Rieger začal věnovat teorii svazů, zejména Booleovým algebrám. Pravděpodobně se inspiroval pracemi M.H. Stonea (1903–1989), hojně využíval výsledky L.H. Loomise (1915–?). Mnohé matematické úlohy a otázky, jimiž se zabýval, byly též studovány polskými matematiky H. Rasiowou[4] a R. Sikorským. Patrně nejvýznačnější osobnost tehdejší teorie svazů, Garrett Birkhoff, patří v Riegrových dílech mezi nejvíce citované autory. V několika pracích L.S. Rieger řeší některé Birkhoffovy problémy formulované v knize [Bir48] a otázky s nimi související.

Řadu výsledků z této oblasti L.S. Rieger aplikoval na problémy matematické logiky, která se posléze dostala do popředí jeho vědeckého zájmu. Jeho pozdější práce se pak pohybují na pomezí abstraktní algebry a logiky. Tyto publikace jsme zařadili do samostatného oddílu *Práce na rozhraní algebry a logiky* (3.3).

Značný význam pro Riegrův výzkum měl jeho studijní pobyt ve Varšavě v roce 1950, zejména pak seminář vedený A. Mostowským, který L.S. Rieger tehdy navštěvoval. Na jeho algebraické pojetí predikátového kalkulu, které zde prezentoval a jež se setkalo s velkým ohlasem, navázalo několik polských matematiků.[5] Algebraicko-logické práce patří k nejvíce citovaným Riegrovým publikacím.

3.2.1 *A note on topological representation of distributive lattices* [R4] (1949)

Prvním matematikem, jenž ovlivnil L.S. Riegra v oblasti teorie svazů, byl M.H. Stone, který se ze svazové problematiky soustředil zejména na distributivní svazy a Booleovy algebry. Jako první se začal zabývat topologickou reprezentací distributivních svazů, v roce 1937 publikoval své výsledky v článku *Topological representations of distributive lattices and Brouwerian logic* [Sto37], který se stal stěžejním dílem, ze kterého L.S. Rieger vycházel a na něž ve své práci [R4] navazoval.

Ve svých publikacích týkajících se svazové problematiky používá L.S. Rieger Stoneovy termíny α-ideál, resp. μ-ideál místo dnešních filtr (duální ideál), resp.

[4]Helena Rasiowa (1917–1994), jedna z nejvýznamnějších osobností světové logiky své doby. Pracovala v oblasti agebraické logiky a matematických základů počítačové vědy. Studovala pod vedením J. Lukasiewicze (1878–1956) a A. Mostowského. Poté působila na varšavské univerzitě, kde získala titul profesorky a vedla oddělení základů matematiky a matematické logiky. Působila v řadě vědeckých institucí a aktivně se podílela na polském matematickém životě.

[5]Zejména to byli zmiňovaní H. Rasiowa a R. Sikorski, kteří též patřili k účastníkům Mostowského semináře.

ideál. Základní monografií o teorii svazů v této době byla Birkhoffova kniha *Lattice Theory* [Bir40], L.S. Rieger se v [R4] též odkazuje na H. Hermese (1912–2003) a G. Köthea (1905–1989) [HK39].

Topologickou reprezentací distributivního svazu S se nazývá jeho izomorfní zobrazení na množinový okruh R otevřených množin jistého topologického T_0-prostoru P_S, v němž R tvoří otevřenou bázi.[6] Říkáme, že P_S *reprezentuje* svaz S.

Mezi všemi topologickými T_0-prostory P_S, jež reprezentují daný distributivní svaz S, existuje jeden „univerzální“ prostor $\bar{P_S}$ takový, že každý prostor P_S je jeho hustým podprostorem. Prostor $\bar{P_S}$ je možno vyjádřit jako prostor všech prvofiltrů svazu S a byl popsán M.H. Stonem v práci [Sto37]. L.S. Rieger podává pro distributivní svazy s jednotkou a nulou odlišnou charakterizaci prostoru $\bar{P_S}$.

Nejprve uvedeme dvě potřebné definice:

Definice: Nechť R je otevřená báze T_0-prostoru P. Podsystém Q báze R se nazývá *pseudoúplný systém okolí* bodu $a \in P$, jestliže platí

$$\bigcap_{a \in A \in R} A = \bigcap_{A \in Q} A.$$[7]

Systém otevřených množin se nazývá *centrovaný*, jestliže každý jeho konečný podsystém má konečný průnik.

Pomocí jednoho svého lemmatu a několika Stoneových tvrzení o vlastnostech filtrů a prvofiltrů získal L.S. Rieger hlavní výsledek své práce, charakterizaci prostoru $\bar{P_S}$:

Věta: Prostor $\bar{P_S}$ všech prvofiltrů distributivního svazu s jednotkou a nulou je kompaktní[8] T_0-prostor, jehož otevřená báze má následující vlastnosti:

(i) každý centrovaný systém otevřených množin báze má neprázdný průnik,

(ii) každý pseudoúplný systém Q okolí bodu $P \in \bar{P_S}$, který s libovolnými $A_1, A_2 \in Q$ obsahuje vhodné $A_3 \subseteq A_1 \cap A_2$, je úplný systém okolí bodu P.

Obráceně, má-li kompaktní T_0-prostor otevřenou bázi R' splňující podmínky (i) a (ii), pak tento prostor může být považován za prostor všech prvofiltrů distributivního svazu R generovaného bází R' s přidanou nulou a jednotkou.

Kompaktní T_1-prostor splňující podmínky (i) a (ii) je totálně nesouvislý kompaktní Hausdorffův prostor, a tedy Booleův prostor.

Důsledkem získaného výsledku je následující Riegrovo tvrzení:

[6] Analogicky lze uvažovat též reprezentaci okruhem uzavřených množin. Tento případ však není, jak uvádí L.S. Rieger, natolik významný.

[7] Pojem pseudoúplného systému okolí byl zaveden E. Čechem v [Čech37].

[8] L.S. Rieger zde používá termín *bikompaktní*, což bylo pro tehdejší dobu charakteristické.

Věta: Distributivní svaz S s nulou, jehož každý prvofiltr je maximální (tj. není částí jiného prvofiltru), je zobecněná Booleova algebra.[9] Obsahuje-li i jednotku, je Booleovou algebrou.

Na závěr doplňme, že o tématu článku [R4] L.S. Rieger referoval dne 30. 8. 1949 na *společném 3. sjezdu matematiků československých a 7. sjezdu matematiků polských.*

3.2.2 *On the lattice theory of Brouwerian propositional logic* [R5] (1949)

Předchozí Riegrova publikace vycházela především z výsledků M.H. Stonea [Sto37] a z Birkhoffovy knihy [Bir40]. Oba autoři se v těchto dílech věnují též otázkám intuicionistické (brouwerovské) logiky (viz dále). M.H. Stone se zabýval její topologickou reprezentací, tedy analogií mezi touto logikou a (distributivním) svazem otevřených množin topologického prostoru.[10] G. Birkhoff jako první studoval vztah mezi brouwerovskou logikou a tzv. Brouwerovými svazy.[11] Můžeme se domnívat, že tyto výsledky podnítily Riegrův zájem o propojení algebry a matematické logiky, který je zřejmý z pojetí jeho práce [R5].

Otázky z oblasti logiky L.S. Riegra přitahovaly již od studentských let. Zpočátku se jednalo hlavně o myšlenky Rudolfa Carnapa a Philippa Franka. Později však začal L.S. Rieger poměrně intenzivně studovat matematickou logiku. O jeho neutuchajícím zájmu svědčí např. recenze [R28] a [R29] Carnapových prací *Introduction to semantics* [Car46] a *Formalisation of logic* [Car43] uveřejněné v ČPMF v letech 1947 a 1948.[12] Právě na tato díla (společně s Carnapovou starší prací *Logische Syntax der Sprache* [Car34]) se v publikaci [R5] L.S. Rieger odkazuje jako na základní literaturu o formální logice, syntaxi[13] a sémantice[14].

Publikace [R5] je první prací, v níž se L.S. Rieger snažil o algebraickou formulaci některých otázek matematické logiky. Jejím hlavním cílem bylo ukázat, že prostřednictvím jistého speciálního typu svazu může teorie svazů fungovat jako účinný matematický nástroj pro syntax i sémantiku jazyka brouwerovské logiky. Než se budeme podrobně věnovat výsledkům práce [R5], pokusíme se čtenáře seznámit s tímto typem logiky a dalšími souvislostmi.

Na závěr doplňme, že na téma *Brouwerova logika a theorie svazů* L.S. Rieger přednášel 14. 12. 1948 v *Jednotě* a 29. 8. 1949 vystoupil s referátem *Teorie svazů brouwerovské logiky* na *společném 3. sjezdu matematiků československých a 7. sjezdu matematiků polských.* Odborníci se shodují v tom, že práce [R5] má dodnes z Riegrových algebraicko-logických děl největší cenu.

[9] Ve smyslu Stoneovy práce [Sto37].

[10] K tomuto výsledku dospěl též A. Tarski v práci [Tar38].

[11] Poznamenejme, že G. Birkhoff používal termín Brouwerův svaz pro duální, tzv. Heytingův svaz, viz dále.

[12] Práci [R5] L.S. Rieger zmiňuje v dopise R. Carnapovi z 5. 3. 1948, viz část 1.7.6.

[13] Disciplína zkoumající možnosti kombinování znaků. Je zde přihlíženo pouze ke znakům a jejich uspořádání, přičemž se abstrahuje od jejich významu.

[14] Nauka o významu znaků a jejich kombinací. Na rozdíl od syntaxe zkoumá význam znakových výrazů.

Intuicionismus

Intuicionismus je filozofický a matematický směr, jehož počátky se v novodobé matematice objevují již na konci 19. století. Matematický objekt je chápán jako produkt jisté konstrukce v mysli, a proto hlavním kritériem existence objektu je možnost jeho sestrojení. Nelze-li daný objekt sestrojit, tak vlastně neexistuje. Tímto se intuicionismus dostává do rozporu s klasickým přístupem, který umožňuje existenci objektu dokázat zamítnutím jeho neexistence.

Intuicionismus je spojen s tak významnými jmény, jako např. C.F. Gauss (1777–1855), L. Kronecker (1823–1891), H. Poincaré (1854–1912), H. Lebesgue (1875–1941) či E. Borel (1871-1956). Základ moderního intuicionismu však položil L.E.J. Brouwer (1881–1966) až v roce 1907, kdy ve své dizertační práci sepsal základní intuicionistické ideje. Kritizoval tehdejší klasický přístup k definici matematických pojmů a napadl existenci aktuálního nekonečna – intuicionisté je popírají.

V důsledku kritiky tehdejší klasické matematiky vznikl vedle intuicionismu další zcela odlišný proud – Hilbertův *formalismus*[15]. Oba tyto směry měly na počátku dvacátého století překonat tzv. třetí krizi matematiky (viz část 4.4.2). Někdy k těmto dvěma základním směrům bývá uváděn ještě tzv. *logicismus*[16].

Intuicionistická (brouwerovská) logika

Intuicionistická logika vychází při dokazování formulí z kritérií přijímaných intuicionismem. Jelikož L.E.J. Brouwer je chápán jako její zakladatel, budeme ji v dalším textu též nazývat *brouwerovská*. Tato logika byla formalizována až v roce 1930, a to Brouwerovým studentem Arendem Heytingem v práci [Hey30].

Heytingův formální systém (pro výrokovou i predikátovou logiku) byl vytvořen z příslušného klasického systému s úplnou množinou logických spojek $(et, vel, \Rightarrow, non)$, příp. $\exists, \forall$, nahrazením „nekonstruktivního“ postulátu *zákona vyloučeného třetího* $AvelnonA$ či *zákona dvojité negace* $non(nonA) \Rightarrow A$ slabším *zákonem sporu* $A \Rightarrow (nonA \Rightarrow B)$ (či $(A\ et\ nonA) \Rightarrow B$).

Heytingův výrokový kalkul

V práci [R5] se L.S. Rieger zabýval brouwerovskou výrokovou logikou, jejíž formalizaci označujeme termínem *Heytingův výrokový kalkul*. Heytingův formální systém výrokové logiky je tvořen jedenácti axiomy – jedním z nich je právě zákon sporu – a dvěma odvozovacími pravidly:

[15] D. Hilbert pojal matematiku jako „formální systém“, v němž se pracuje jen se symboly, slovy vytvořenými ze symbolů a konečnými posloupnosti slov. Význam symbolů je ryze formální, samy o sobě nemají žádný smysl. Matematické důkazy jsou posloupnostmi řetězců symbolů, jejichž postupy jsou dány jasnými pravidly. Dalšími představiteli byli P. Bernays a J. von Neumann.

[16] *Logicismus* chápe matematiku jakou součást logiky. Jeho zastánci tvrdí, že všechny matematické pojmy lze explicitně definovat z logiky a všechny matematické věty lze odvodit z logických axiomů a definic čistě logickou dedukcí. Zakladatelem logicismu byl G. Frege, hlavními představiteli B. Russell a A.N. Whitehead. Logicismus měl velký podíl na rozvoji matematické logiky, v matematice však významnější úspěchy nezaznamenal.

„z formulí A, B odvoď formuli A *et* B“,
„z formulí $A, A \Rightarrow B$ odvoď formuli B“ (známé pravidlo *modus ponens*).

Současná varianta Heytingova výrokového kalkulu je formulována pomocí deseti axiomů a pravidla modus ponens.

Poznamenejme, že v Heytingově a Carnapově době byla v matematické logice používána odlišná terminologie, která již dnes není běžná. L.S. Rieger ji ve své práci do jisté míry zachoval. Např. výrokové formule nazval *větami* (angl. *sentence*)[17], pro prvotní formuli užíval termín *jednoduchá věta*.[18] Axiomy označoval jako *základní formule* a termín *formule* používal pro (v dnešní řeči) dokazatelné formule, neboli věty (angl. *theorem*). V našem výkladu budeme striktně dodržovat současnou terminologii, aby nedocházelo k nejasnostem.

Nyní se blíže seznámíme s Riegrovou prací [R5]. Je rozdělena na pět částí (§ 1 – § 5) a toto členění budeme pro lepší orientaci zachovávat. Na závěr ještě podotkněme, že L.S. Rieger nezvolil rok jejího vydání příliš šťastně. V roce 1948 byla totiž publikována práce [MT48] A. Tarského a J.C.C. McKinseyho (1908–1953), v níž se autoři zabývali obdobnou problematikou a kde byly některé Riegrovy výsledky již dokázány. Tato publikace se však L.S. Riegrovi dostala do rukou až tehdy, kdy již byla jeho práce [R5] odevzdána do tisku.[19]

§ 1: *Pomocné pojmy teorie svazů*

V úvodní části textu definuje L.S. Rieger pojem *Heytingovy algebry*, která je klíčovou algebraickou strukturou celé práce [R5].[20]

Definice: Distributivní svaz S s jednotkou a nulou se nazývá *Heytingův svaz* (*algebra*), jestliže je na množině S definována další binární operace $\rightarrow$, pro kterou platí:

1. $(\forall a \in S)(\forall b \in S)((b \rightarrow a) \wedge b \leq a)$,
2. $(\forall a \in S)(\forall b \in S)(\forall x \in S)[(x \wedge b \leq a) \Rightarrow (x \leq (b \rightarrow a))]$.

Poznámky:

1. Duální svaz nese název *Brouwerův svaz* (*algebra*) – používali jej ve svých důkazech např. A. Tarski, J.C.C. McKinsey a G. Birkhoff.

[17] Termín *sentence* se dnes používá (i v češtině) v predikátové logice k označení uzavřených formulí, viz část 4.1.1.

[18] Např. Heytingův kalkul býval též nazýván *Heytingův větný kalkul*.

[19] Roku 1946 publikovali J.C.C. McKinsey a A. Tarski práci [MT46], která měla značný přínos pro rozvoj svazově-teoretické interpretace Heytingova kalkulu započaté G. Birkhoffem. Obdobnou problematikou se zabýval např. S. Pankajam v pracích [Pan41] a [Pan42]. Již před rokem 1940 byla tomuto tématu věnována díla A. Tarského [Tar36a] a [Tar36b] a I. Johanssona (1904–1987) [Joh37].

[20] Heytingova algebra hraje ve vztahu k intuicionistické logice stejnou roli jako Booleova algebra ve vztahu ke klasické logice.

2. Heytingova algebra je speciálním typem tzv. *reziduovaného svazu*. Reziduovaný svaz je distributivní svaz s jednotkou a nulou, který má navíc definované dvě binární operace – násobení a reziduování. V případě Heytingovy algebry je operace násobení totožná s operací průseku.

3. L.S. Rieger převzal definici reziduovaného svazu z práce [WD39] M. Warda a R.P. Dillwortha, v níž však nebyl požadavek na existenci jednotky a nuly. Heytingovu algebru Rieger nazýval *speciální reziduovaný svaz* s jednotkou a nulou a označil ji anglickým termínem *sdruz-lattice* (***s***pecial ***d***istributive ***r***esiduated lattice with ***u***nit and ***z***ero). Pro operaci $a \to b$ používal značení $b : a$.

Dále v [R5] Rieger dokazuje dva základní výsledky o Heytingových algebrách:

Věta (o izomorfismu): Nechť F je filtr v Heytingově algebře S. Pak relace

$$x \equiv y \ (mod\ F) \Leftrightarrow (\exists\, c \in F)(x \wedge c = y \wedge c)$$

je kongruencí[21] na Heytingově algebře S. Označíme-li množinu všech tříd této ekvivalence S/F (faktorový svaz), pak svaz S/F je homomorfním obrazem Heytingovy algebry S.

Nechť S' je další Heytingova algebra a f homomorfismus S na S'. Nechť $F := f^{-1}(1)$. Pak F je filtr a svaz S/F je izomorfní s Heytingovou algebrou S'.

Věta (o Booleově faktorovém svazu): Nechť S je (libovolná) Heytingova algebra. Pak množina všech $a \in S$, pro která $a \to 0 = 0$, tvoří filtr F a faktorový svaz S/F je Booleova algebra.

Na závěr prvního paragrafu práce [R5] uvádí L.S. Rieger definici volné Heytingovy algebry generované množinou G:

Definice: Říkáme, že Heytingova algebra S je *generována* množinou G, jestliže jediná Heytingova podalgebra svazu S, která obsahuje množinu G, je Heytingova algebra S.

Heytingova algebra S se nazývá *volná Heytingova algebra* generovaná množinou G, jestliže pro libovolnou Heytingovu algebru S' generovanou množinou G' lze každé zobrazení množiny G do G' rozšířit na homomorfní zobrazení celé Heytingovy algebry S do S'.[22]

[21] Tj. ekvivalence uzavřená na operace spojení, průseku a reziduování.

[22] Současná definice volné Heytingovy algebry by byla následující:

Heytingova algebra S se nazývá *volná Heytingova algebra* generovaná množinou G, jestliže pro libovolnou Heytingovu algebru S' lze každé zobrazení množiny G do S' rozšířit na homomorfní zobrazení celé Heytingovy algebry S do S'.

L.S. Rieger zřejmě neměl přístup ke druhému vydání Birkhoffovy knihy *Lattice theory* [Bir48], neboť tam je uvedena tato definice pro obecné volné algebry.

§ 2: *Pravidla formování*, § 3: *Pravidla logické evaluace*

Ve druhém paragrafu L.S. Rieger definuje základní pojmy a uvádí některá pravidla (Heytingova) výrokového kalkulu, zejména syntaktická pravidla pro vytváření formulí.

V následujícím paragrafu popisuje sémantický proces (logické) evaluace, neboli připisování (logických) hodnot jednotlivým výrokovým formulím, představuje zde vícehodnotovou,[23] tzv. *brouwerovskou evaluaci*. Přívlastek brouwerovská zdůvodňuje tím, že prostřednictvím svazů hodnot takové evaluace můžeme dosáhnout reprezentace Heytingova kalkulu (viz následující část).

Uvažujme tedy nějaký konečný distributivní svaz S, ten je díky předpokladu konečnosti Heytingovou algebrou; jeho prvky budeme nazývat hodnotami. Uvažujme dále libovolné zobrazení φ množiny prvotních formulí do S. Toto zobrazení rekurzivně rozšíříme na množinu všech výrokových formulí, a to následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} \varphi(nonA) &= \varphi(A) \to 0, \\ \varphi(A\ vel\ B) &= \varphi(A) \vee \varphi(B), \\ \varphi(A\ et\ B) &= \varphi(A) \wedge \varphi(B), \\ \varphi(A \Rightarrow B) &= \varphi(A) \to \varphi(B). \end{aligned} \qquad (*)$$

Rozšířené zobrazení φ se nazývá *brouwerovská evaluace* v S.

Uvažujme nyní klasickou dvouhodnotovou evaluaci (tedy $S = \{0, 1\}$). Pokud bychom definovali relaci ekvivalence na množině všech formulí tak, že dvě formule jsou ekvivalentní právě tehdy, když mají stejnou hodnotu v každé evaluaci, pak množina všech tříd této ekvivalence by byla nekonečnou spočetnou volnou Booleovou algebrou generovanou prvotními formulemi. L.S. Rieger odvozuje, že situace bude vypadat analogicky i v případě brouwerovské evaluace, čímž získává jedno ze zásadních tvrzení této své práce:

Věta: Nechť α je relace definovaná na množině F všech výrokových formulí předpisem $(A, B) \in \alpha \Leftrightarrow \varphi(A) = \varphi(B)$ pro každou brouwerovskou evaluaci φ v libovolném konečném distributivním svazu.[24] Pak α je ekvivalence. Množina všech jejích tříd $S_\infty := F/\alpha$ je volná Heytingova algebra, která je generována nekonečnou spočetnou množinou jednoprvkových tříd, přičemž každá třída obsahuje prvotní formuli.[25]

V závěru třetího paragrafu uvádí L.S. Rieger k této větě poznámku, v níž „vysvětluje" použití brouwerovské evaluace. Píše, že klasická „0–1" evaluace se jeví příliš hrubá či zjednodušující z pozice brouwerovské logiky. Proto je třeba provést jakousi „nekonečněkrát aplikovanou interpolaci" mezi dvěma extrémními hodnotami: absolutní pravdou (odpovídající jednotce ve svazu hodnot) a

[23] Podle Carnapových prací [Car46] a [Car43].

[24] Rieger předpokládá, že existuje spočetná posloupnost konečných distributivních svazů $S_1, S_2, \ldots$ taková, že pro každý konečný distributivní svaz S existuje S_i s ním izomorfní.

[25] Předpokládáme, že množina prvotních formulí je nekonečná spočetná.

absolutní lží (odpovídající nule). Přitom vzhledem k právě získanému výsledku nás takové interpolace provedené pouze v konečných Booleových algebrách neodvádějí od výsledků pro klasickou dvouhodnotovou evaluaci.

§ 4: *Heytingův větný kalkul*

V úvodní části tohoto paragrafu L.S. Rieger formuluje Heytingův formální systém brouwerovské výrokové logiky a uvádí nejdůležitější Heytingova tvrzení, která v dalším textu potřebuje. Dále prezentuje svazovou charakterizaci Heytingova kalkulu dokázanou např. G. Birkhoffem:

Věta: Nechť relace $A \equiv B$ je definovaná podmínkou, že $A \Rightarrow B$ i $B \Rightarrow A$ jsou dokazatelné formule (v brouwerovské logice). Pak $\equiv$ je ekvivalencí na množině všech formulí a množina všech jejích tříd tvoří Heytingovu algebru H. Jednotkou H je třída obsahující libovolnou dokazatelnou formuli a nulou je třída obsahující libovolnou spornou formuli[26].

L.S. Rieger však dále propojil tento výsledek se závěrem předchozího paragrafu. Dokázal, že *H je volná Heytingova algebra generovaná jednoprvkovými třídami prvotních formulí, a proto $H \cong S_\infty$.*[27] Získaný výsledek v jistém smyslu vyjadřuje úplnost Heytingova výrokového kalkulu pro vícehodnotovou evaluaci. Rieger tak dospěl k jasné sémantické interpretaci tohoto kalkulu pomocí spočetně mnoha „logických hodnot".[28]

Vztah $H \cong S_\infty$ je jedním ze stěžejních výsledků celé práce. Jak uvidíme dále, L.S. Rieger s její pomocí poměrně jednoduchými algebraickými úvahami dokázal některá tvrzení Heytingova kalkulu, která byla známa již dříve.[29] Jedním z nich je např. problém rozhodnutí.

Problém rozhodnutí

Uvažujme konečnou množinu M (jejíž prvky nazýváme „hodnotami") s binárními operacemi $\vee, \wedge, \rightarrow$ a unární operací $'$, které slouží k definování „hodnot" disjunkce, konjunkce, implikace a negace (ve smyslu vztahů $(*)$). Množinu M nazýváme „logická matice".

Říkáme, že $(M, \vee, \wedge, \rightarrow, ')$ je *řešení problému rozhodnutí* uvažovaného výrokového kalkulu, platí-li následující podmínka: v „logické matici" M existuje jediný prvek 1 nazývaný „jednotka", pro který je každá formule A dokazatelná právě tehdy, když $\varphi(A) = 1$ pro každou „evaluaci" φ pomocí operací $\vee, \wedge, \rightarrow, '$ (ve smyslu vztahů $(*)$).

Kurt Gödel v práci [Göd33] ukázal, že takové řešení problému rozhodnutí pro Heytingův výrokový kalkul neexistuje. K témuž závěru dospěl v práci [R5] i L.S. Rieger prostřednictvím tvrzení, že *existuje-li řešení problému rozhodnutí*

[26] *Sporná* formule je taková, z níž lze odvodit každou formuli.

[27] Tento výsledek je citován v monografii H. Rasiowé a R. Sikorského *The mathematics of metamathematics* [RS63], str. 395.

[28] L.S. Rieger udává, že tento problém v případě klasického kalkulu obdobným způsobem vyřešil R. Carnap.

[29] L.S. Rieger zmiňuje zejména výsledky práce [Göd33] Kurta Gödela.

v Heytingově výrokovém kalkulu v podobě „logické matice“ v obecném smyslu, pak tento problém řeší i nějaký (konečný) distributivní svaz.

Poznámka: V souvislosti s tímto výsledkem je Riegrovo jméno zmíněno v knize [Fef95] s názvem *Kurt Gödel: Collected Works, III.* Na str. 518 je otištěn dodatek o tom, že Gödel sám nedokázal, kolik pravdivostních hodnot je třeba k modelování Heytingova výrokového kalkulu. Až L.S. Rieger v práci [R5] ukázal, že tento kalkul obsahuje nekonečně mnoho vzájemně neekvivalentních formulí jedné proměnné. Ke stejnému výsledku později nezávisle dospěl I. Nishimura [Nis60].

Existuje však řešení problému rozhodnutí v obecnějším smyslu; tedy existuje algoritmus, který rozhoduje, zda je daná formule Heytingova výrokového kalkulu dokazatelná či ne.[30] Ten nalezli J.C.C. McKinsey a A. Tarski ve výše zmiňované práci [MT48]. L.S. Rieger zde podává odlišné řešení, a to ve formě explicitního elementárního výpočtu s přirozenými čísly. V porovnání s řešením McKinseyho a Tarského je však Riegrova metoda stejně obtížně prakticky aplikovatelná. Přesto má tato metoda, jak sám autor uvádí, uplatnění v obecné topologii a v abstraktní algebře.[31]

Další výsledky

Dále L.S. Rieger podává algebraický důkaz dalšího Gödelova závěru z [Göd33], v tomto případě tvrzení, že *formule A vel B je dokazatelná, právě když je jeden z členů A nebo B dokazatelná formule.* Tento výsledek formuluje v následujícím svazově-teoretickém tvaru:

Věta: Heytingova algebra $H \cong S_\infty$ má právě jeden maximální ideál I, který je tvořen všemi prvky různými od jednotky.[32]

K. Gödel uvedl ve své práci [Göd33] toto tvrzení bez důkazu, ten provedli J.C.C. McKinsey a A. Tarski v [MT46] a v [MT48]. Riegrova důkazová metoda byla odlišná.[33]

Část Riegrovy práce [R5] je též věnována charakterizaci volné Heytingovy algebry s jedním generátorem a jejím syntaktickým důsledkům.

V závěru tohoto paragrafu dokazuje L.S. Rieger algebraickou podstatu vztahů mezi klasickým a Heytingovým výrokovým kalkulem. Jeho závěry lze shrnout do následujícího tvrzení:

Věta: Nechť F je filtr v $H \cong S_\infty$ vytvořený všemi třídami splňujícími rovnost $[A] \to 0 = 0$. Pak faktorový svaz H/F je izomorfní s volnou Booleovou

[30] Viz též část 5.1.3.

[31] Touto problematikou se zabývali již G. Gentzen [Gen34], S. Jaśkowski (1906–1965) [Jaś36] či M. Wajsberg (1902–?) [Waj38], po L.S. Riegrovi pak např. B.Ju. Pilčak v pracích [Pil50], [Pil52] a S.C. Kleene [Kle52].

[32] Tato Riegrova formulace byla též citována v knize H. Rasiowé a R. Sikorského *The mathematics of metamathematics* [RS63], str. 396.

[33] V roce 1956 podal další důkaz Gödelova tvrzení R. Harrop v práci [Har56] a o šest let později též S.C. Kleene [Kle62].

algebrou tříd formulí, jež byla získána v klasickém kalkulu stejným způsobem jako S_∞ či H v kalkulu Heytingově.

Z tohoto výsledku vyplývají závěry, jež byly vysloveny K. Gödelem [Göd33], V.I. Glivenkem (1897–1940) [Gli29] aj., např. že je-li formule A dokazatelná v klasickém výrokovém kalkulu, pak formule $non(nonA)$ je dokazatelná v Heytingově kalkulu, a že sporná formule v klasickém kalkulu je sporná i v kalkulu Heytingově.

§ 5: *Pravidla významu, materiální implikace*

V posledním paragrafu práce [R5] prezentuje L.S. Rieger dva nové přístupy k formulaci Heytingova kalkulu.

První přístup je založen na pojmu „…má stejný význam jako …“ (označení $\approx$) a kalkul je formulován pomocí jedenácti základních identit a čtyř pravidel pro $\approx$ (např. symetrie, tranzitivita či nahrazení). Je zde uvedeno, že *relace* $\approx$ *je ekvivalence na množině všech formulí a pro množinu všech tříd této ekvivalence* S_v *platí* $S_v \cong S_\infty \cong H$.

Druhý způsob konstrukce tohoto kalkulu je založen na binární relaci (na množině všech formulí) *brouwerovské materiální implikace*, neboli „…má důsledek …“ (označení $\mapsto$). Tato relace je reflexivní, tranzitivní a je definována jistými třinácti vlastnostmi. L.S. Rieger dokazuje toto:

Věta: Nechť $\mapsto$ je libovolná brouwerovská materiální implikace. Nechť relace β je na množině všech formulí F definována předpisem

$$(A, B) \in \beta \Leftrightarrow (A \mapsto B \ et\ B \mapsto A).$$

Pak β je ekvivalence. Množina všech jejích tříd $S_\mapsto := F/\beta$ je Heytingova algebra. Definujeme-li brouwerovskou materiální implikaci $\rightarrowtail$ tak, že $A \rightarrowtail B$ právě když $A \mapsto B$ pro každou brouwerovskou materiální implikaci $\mapsto$, pak navíc platí $S_\rightarrowtail \cong S_v \cong S_\infty \cong H$.

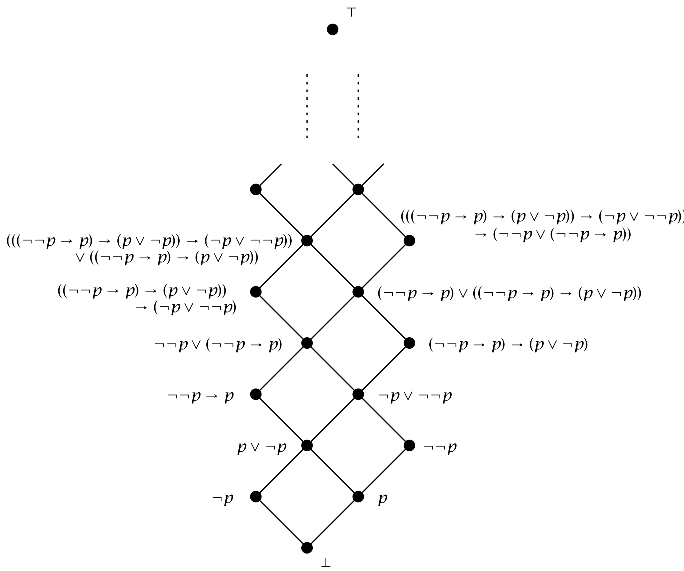
Na závěr formuluje L.S. Rieger hlavní výsledek:

V sémantických teoriích (brouwerovské) logické evaluace, významu a (brouwerovské) materiální implikace formulí, stejně jako v syntaktické teorii Heytingova výrokového kalkulu dospíváme různými způsoby vždy k té samé volné Heytingově algebře (až na izomorfismus) vytvořené ze spočetně mnoha prvotních formulí.

Pro doplnění uveďme, že na některé výsledky této Riegrovy práce [R5] navázal roku 1976 A. Wroński v článku [Wro76]. Zabýval se počtem n-generovaných Heytingových algeber (až na izomorfismus). Z Riegrových výsledků plyne, že 1-generovaných Heytingových algeber je $\aleph_0$, Wroński dokazuje, že n-generovaných pro $n \geq 2$ je $2^{\aleph_0}$.

Riegrova publikace [R5] je citována i v poměrně nedávných pracích G.R.R. de Lavaletteho [Lav81], L. Iturrioze [Itu83] či A.D. Yashina [Yas98]. Jako jedinou československou *mezinárodně uznávanou* vědeckou práci z logiky v období do roku 1953 tuto publikaci zmiňuje na str. 502 K. Berka[34] v článku [Ber99].

[34] Karel Berka (1923–2004), profesor logiky, držitel zlaté oborové plakety F. Palackého *Za*



Obrázek 3.1: Riegrův-Nishimurův svaz.

Riegrův-Nishimurův svaz

V části pojednávající o problému rozhodnutí je poznamenáno, že L.S. Rieger dokázal, že Heytingův výrokový kalkul obsahuje nekonečně mnoho vzájemně neekvivalentních formulí jedné proměnné. Nyní si tento výsledek blíže popíšeme. Uvažujme ve výrokové logice pouze jednu atomickou formuli p. V klasické logice lze pomocí p napsat pouze čtyři neekvivalentní formule: $p, non\, p$, p *et* $non\, p$ (tedy nepravdu) a p *vel* $non\, p$ (tedy pravdu).

V intuicionistické logice je však situace složitější. (Např. výrok $non(non\, p)$ není ekvivaletní s p, $non(non\, p) \Rightarrow p$ není tautologie apod.) Lze zde proto napsat nekonečně mnoho neekvivalentních formulí, které tvoří strukturu, jež se nazývá *Riegrův-Nishimurův svaz.* Jeho vyobrazení pomocí Hasseova diagramu uvádíme na obrázku 3.1.[35] Jak již bylo též poznamenáno, ke stejnému výsledku později nezávisle dospěl Iwao Nishimura [Nis60], což vysvětluje název *Riegrův-Nishimurův svaz.*

Častěji bývá *Riegrův-Nishimurův svaz* definován jako *volná 1-generovaná Heytingova algebra.* Jméno L.S. Riegra bývá s tímto pojmem spojováno ne v souvislosti s prací [R5], ale s článkem [R12] z roku 1957 (viz část 3.3.4). Je to patrně proto, že v práci [R12] je uveden obdobný obrázek jako 3.1 (L.S. Rieger

zásluhy o rozvoj společenských věd. Působil zejména na FF UK a ve *Filozofickém ústavu* ČSAV. Zaměřil se zvláště na historický vývoj logiky (antická logika, logika a filozofie B. Bolzana, moderní logika), dále se specializoval na problémy metodologie, filozofie a teorie vědy.

[35] Na obrázku je odlišné značení výrokových spojek, našim *vel*, *non*, $\Rightarrow$ odpovídají $\vee, \neg, \rightarrow$. Autorka děkuje za jeho poskytnutí Mgr. Emilu Jeřábkovi, Ph.D.

zde jen nepracoval s formulemi p a *non* p, ale s čísly 2 a 3).

Původně byl *Riegrův-Nishimurův svaz* znám pouze jako Nishimurův svaz. O tom, že prvním objevitelem byl L.S. Rieger (a dokonce již v roce 1949), české logiky upozornil až před třinácti lety Holanďan Dick de Jongh.[36]

Z prací věnovaných této problematice (či využívajících Riegrův-Nishimurův svaz) jmenujme např. [Šeh78], [Tse83], [Vak85], [Lav81], [Bož84], [Čub88] a [Pol98].

3.2.3 *Some remarks on automorphisms of Boolean algebras* [R6] (1951)

Hlavním tématem této Riegrovy práce je *konstrukce takové Booleovy algebry B, pro kterou neexistuje neidentický endomorfismus B, který je na.*[37] Speciálně pak na této algebře neexistuje neidentický automorfismus.

L.S. Rieger nalézá řešení přenesením problému na ekvivalentní topologický problém; řeší otázku, zda *existuje 0-dimenzionální*[38] *kompaktní prostor P takový, pro který neexistuje neidentický homeomorfismus P na jeho libovolný podprostor.* Odpověď získává konstrukcí požadovaného prostoru P, který je navíc uspořádaný.[39]

Booleovu algebru B konstruuje L.S. Rieger jako těleso množin všech současně otevřených a uzavřených podmnožin prostoru P. Pomocí Stoneových výsledků [Sto36] a [Sto37] z teorie topologické reprezentace Booleových algeber L.S. Rieger téměř okamžitě dospívá k požadované vlastnosti: neexistuje neidentický endomorfismus algebry B na sebe samu.

Tím je podána negativní odpověď na otázku formulovanou G. Birkhoffem v monografii [Bir48] jako problém č. 74, a sice *zda na každé Booleově algebře existuje neidentický automorfismus.* Elegantní řešení tohoto problému nalezl velmi krátce před L.S. Riegrem M. Katětov a publikoval je v článku [Kat51].[40] Jeho řešení je lepší v tom smyslu, že výsledná Booleova algebra má mohutnost kontinua, kdežto mohutnost Riegrovy algebry je mnohem větší. Další řešení podal B. Jónsson v práci [Jón51]. V obou případech je algebra B konstruována z vhodného topologického prostoru P použitím Stoneových výsledků, tj. stejným způsobem jako u L.S. Riegra.

Doplňme, že o svých výsledcích L.S. Rieger referoval dne 26. 2. 1951 v *Matematické obci pražské* v přednášce *Aplikace theorie uspořádaných kontinuí na Booleovy algebry.* Výtah této přednášky s hrubým popisem základní myšlenky jeho konstrukce byl později uveřejněn jako [R33]. M. Katětov o svém řešení promluvil tamtéž již 22. 1. 1951, tj. o pět týdnů dříve.

[36] Za řadu těchto informací o Riegrově-Nishimurově svazu autorka děkuje doc. RNDr. Vítězslavu Švejdarovi, CSc.

[37] Taková Booleova algebra se nazývá *ztrnulá.*

[38] Tj. topologický prostor, jehož báze je složena pouze z množin současně otevřených a uzavřených.

[39] Tento Riegrův výsledek citují J. de Groot a M.A. Maurice v práci [GM68]; zabývají se v ní existencí obdobných (speciálních) případů takových prostorů.

[40] M. Katětov zde použil *Stoneovu-Čechovu kompaktifikaci*, tj. rozšíření topologického prostoru na kompaktní prostor.

V závěru své práce diskutuje L.S. Rieger Birkhoffův problém č. 75:

Existuje (konečný) svaz, jenž není Booleovou algebrou, na kterém existuje duální automorfismus[41] f *s vlastností* $f^2 = id$ *takový, že* f *komutuje s každým svazovým automorfismem? Musí být* f *určeno jednoznačně? A co takové projektivní geometrie, jež nejsou desarguesovské?*[42]

Na první dvě otázky nalezl L.S. Rieger, jak sám píše, „téměř triviální odpovědi“. Kladné řešení prvního problému získal konstrukcí požadovaného automorfismu na vhodném úplném distributivním svazu, odpověď na druhou otázku je záporná. Třetí problém však nebyl schopen uspokojivě vyřešit.

Na Riegrův výzkum v práci [R6] navazoval již zmíněný J. de Groot (1914–1972) v práci [Gro59]. V osmdesátých letech minulého století tento Riegrův článek cituje trojice autorů M.E. Adams, V. Koubek a J. Sichler v článcích [AKS85a] a [AKS85b], M. Rubin [Rub89] a M. Droste [Dro89].

3.2.4 *On free $\aleph_\xi$-complete Boolean algebras* [R7] (1951)

Definice: Booleova algebra A se nazývá $\aleph_\xi$*-úplná*, jestliže každá její podmnožina, jejíž mohutnost je nejvýše $\aleph_\xi$[43], má v A supremum a infimum.

Definice: Nechť A, B jsou $\aleph_\xi$-úplné Booleovy algebry. Homomorfismus $f : A \to B$ se nazývá $\aleph_\xi$*-úplný homomorfismus*, jestliže platí

$$f(\bigvee_{i\in I} x_i) = \bigvee_{i\in I} f(x_i) \quad \text{a} \quad f(\bigwedge_{i\in I} x_i) = \bigwedge_{i\in I} f(x_i)$$

pro každou množinu indexů I, jejíž mohutnost je nejvýše rovna $\aleph_\xi$.

Definice: Nechť m je kardinální číslo. Říkáme, že $\aleph_\xi$-úplná Booleova algebra $A_m^{\aleph_\xi}$ je *volná s* m *volnými* $\aleph_\xi$*-generátory*, jestliže v ní existuje podmnožina G mohutnosti m s následujícími vlastnostmi:

1. jediná $\aleph_\xi$-úplná podalgebra algebry $A_m^{\aleph_\xi}$, jež obsahuje G, je sama $A_m^{\aleph_\xi}$ (říkáme, že podmnožina G $\aleph_\xi$-generuje algebru $A_m^{\aleph_\xi}$),
2. každé zobrazení φ podmnožiny G do jiné $\aleph_\xi$-úplné algebry B lze rozšířit na $\aleph_\xi$-úplný homomorfismus $\bar{\varphi}$ algebry $A_m^{\aleph_\xi}$ do algebry B.

L.S. Rieger zkoumá obecné vlastnosti těchto algeber, hlavní pozornost však zaměřuje (pro možnosti jejich dalšího využití v aplikacích) na $\aleph_0$-úplné Booleovy algebry, které se zkráceně označují jako σ*-algebry*[44]. Tomuto tématu je

[41] Tj. $a \leq b \Leftrightarrow f(a) \geq f(b)$.

[42] Tj. projektivní rovinné geometrie, v nichž nemusí platit Desarguesova věta: *Pokud se přímky, které spojují odpovídající vrcholy trojúhelníků* ABC *a* $A'B'C'$*, protínají v jednom bodě, pak průsečíky přímek, na nichž leží odpovídající strany trojúhelníků, leží na jedné přímce.* Projektivní rovinu, jež není desarguesovská, nelze vnořit do projektivního prostoru vyšší dimenze. Definici lze rozšířit i na projektivní prostory dimenze $n > 2$.

[43] Pro definici $\aleph_\xi$ viz část 4.1.2.

[44] Poznamenejme, že přívlastek $\aleph_0$-úplný bude nahrazován předponou σ- i u dalších termínů týkajících se $\aleph_0$-algeber.

věnována první (a hlavní) část publikace [R7]. Postupným dokazováním nových tvrzení nalézá L.S. Rieger odpovědi na tři matematické problémy formulované G. Birkhoffem v monografii [Bir48].

Ve druhé části práce [R7] jsou získané výsledky aplikovány v oblasti matematické logiky, konkrétně na Tarského-Lindenbaumovu algebru (viz dále) predikátového kalkulu prvního řádu[45]. Výsledky této části své práce [R7] prezentoval L.S. Rieger na semináři A. Mostowského v březnu a dubnu roku 1950; tohoto semináře se účastnil v rámci zmiňovaného studijního pobytu ve Varšavě. Dne 5. května téhož roku přednášel na toto téma na schůzi *Polské matematické společnosti* ve Wroclawi. Výsledky hlubšího a rozsáhlejšího výzkumu orientovaného především na další aplikace této problematiky v logice měly být publikovány v sérii věnované speciálním studiím, kterou vydával *Państwowy Instytut Matematyczny.* Patrně však k tomu nedošlo.

Pro zajímavost poznamenejme, že koncept článku [R7] L.S. Rieger zaslal R. Sikorskému, který v dopise vyjádřil své komentáře. Rieger na Sikorského dopis odpověděl 21. 9. 1950, v úvodu píše:

Vážený a milý pane kolego,
obdržel jsem Váš dopis a Vaše poznámky k mojí práci o volných algebrách Boolea. Nejprve spěchám Vás ujistit, že jsem nerad, že moje práce Vám zřejmě zabrala dosti Vašeho drahocenného času, a že jsem Vám vděčný za péči a rychlost, s jakou jste se chopil celkem nepříjemného recensování.

Po vysvětlení některých úprav, které na doporučení Sikorského v práci učinil, Rieger dodává:

Ostatní drobné opravy jsem si dovolil naznačit přímo na místě ve Vašem rukopise, který přiloženě zasílám.
Ještě jednou děkuji za recensi a omlouvám nedostatky práce i tím, že jsem poněkud pospíchal s rukopisem, abych dohnal čas, ztracený chorobou.[46]

Ještě než se podrobněji podíváme na jednotlivé oddíly této Riegrovy publikace, uvedeme znění tzv. Loomisovy věty (viz [Loo47]), která bude v následujících částech několikrát citována. Poznamenejme, že termínem σ-těleso množin je myšleno těleso množin (viz část 3.1.2), které je uzavřeno na všechny spočetné průniky a sjednocení.

Loomisova věta: Každá σ-algebra je σ-homomorfním obrazem vhodného σ-tělesa množin.

Část 1.: *Algebra*

V úvodu své práce [R7] dokazuje L.S. Rieger větu o *existenci volné $\aleph_\xi$-úplné Booleovy algebry $A_m^{\aleph_\xi}$ s m volnými $\aleph_\xi$-generátory* (pro libovolné kardinální číslo

[45] Často se též používá spojení *nižšího* predikátového kalkulu.
[46] Rodinný archiv.

$\aleph_\xi$ a nenulové m).[47] Protože na způsobu odvození tohoto tvrzení jsou založeny důkazy jeho dalších výsledků, pokusíme se o hrubý nástin hlavní myšlenky a postupu.

Důkaz uvedené věty je konstruktivní a spočívá nejprve v transfinitní konstrukci (řádu $\omega_{\xi+1}$)[48] *(nekonečných) „slov"*. L.S. Rieger uvažuje libovolnou množinu G mohutnosti m. Pomocí (vhodně definovaných) množin Γ_β slov řádu nejvýše β [49] dostává výslednou množinu (nekonečných) slov

$$\Gamma = \bigcup_{0 \leq \beta < \omega_{\xi+1}} \Gamma_\beta .$$

Jestliže je φ libovolné zobrazení podmnožiny $G \subseteq \Gamma$ do libovolné (dané) $\aleph_\xi$-úplné Booleovy algebry B, pak je toto zobrazení určitým způsobem (pomocí transfinitní indukce řádu $\omega_{\xi+1}$) rozšířeno na zobrazení $\tilde{\varphi}$ množiny slov Γ do algebry B. Zobrazení $\tilde{\varphi}$ je nazýváno *evaluace*.[50]

Uvažováním všech možných evaluací a všech možných $\aleph_\xi$-úplných Booleových algeber B dospívá L.S. Rieger k následující definici: slova X a Y jsou ekvivalentní, jestliže $\tilde{\varphi}(X) = \tilde{\varphi}(Y)$ pro každou evaluaci $\tilde{\varphi}$. Množina všech tříd $[X], [Y], \ldots$ vzájemně ekvivalentních slov je potom hledanou Booleovou algebrou $A_m^{\aleph_\xi}$ s volnými $\aleph_\xi$-úplnými generátory (jednoprvkovými třídami) $[g]$, $g \in G$.

Každá evaluace $\tilde{\varphi}$ reprezentuje právě jedno $\aleph_\xi$-úplné homomorfní rozšíření $\bar{\varphi}$ daného zobrazení $\varphi : G \to B$ na celé $A_m^{\aleph_\xi}$. Položíme totiž $\bar{\varphi}([X]) = \tilde{\varphi}(X)$ pro každé $[X] \in A_m^{\aleph_\xi}$.

L.S. Rieger též v práci [R7] odvozuje jednoznačnost a „univerzálnost" algebry $A_m^{\aleph_\xi}$.

Doplňme, že je zde zmíněna přirozená otázka, *zda existuje nekonečná volná úplná Booleova algebra*. L.S. Rieger přiznává, že přestože je přesvědčen, že taková algebra nemůže existovat, nebyl schopen to dokázat. To se podařilo v roce 1964 H. Gaifmanovi v práci [Gai64] a nezávisle na něm též A.W. Halesovi [Hal64]. Na jejich výsledky navázal o dva roky později R.M. Solovay publikací [Sol66].

Z výsledků těchto tří matematiků vyplývá, že neexistuje nekonečná volná Booleova algebra, která by měla volné úplné rozšíření. G.W. Day pozměnil Riegrovu otázku na řešení takovéhoto problému: Pro jaké Booleovy algebry existuje jejich volné úplné rozšíření? Odpověď publikoval v práci [Day65].

Další výsledky této Riegrovy práce se týkají volných σ-algeber. Prvním z nich je věta o existenci σ-prvofiltru[51], jenž obsahuje daný nenulový prvek x volné σ-algebry. L.S. Rieger ho formuluje pomocí právě získaných závěrů takto:

[47] Tento výsledek je citován v monografii R. Sikorského *Boolean algebras* [Sik60], str. 106.

[48] $\omega_{\xi+1}$ značí nejmenší ordinální číslo mohutnosti $\aleph_{\xi+1}$, viz část 4.1.2.

[49] Ordinální čísla β musí být nelimitní (podle definice).

[50] Zde se jedná o obdobné úvahy jako v práci [R5], §3.

[51] U definice σ-filtru, resp. σ-prvofiltru jsou binární operace $\wedge$, resp. $\vee$ a $\wedge$ nahrazeny nekonečným spočetným průsekem $\bigwedge_{n=1}^{\infty}$, resp. spojením $\bigvee_{n=1}^{\infty}$ a průsekem $\bigwedge_{n=1}^{\infty}$.

Věta: Nechť $A_m^{\aleph_0}$ je volná σ-algebra. Pak ke každému nenulovému prvku $[X] \in A_m^{\aleph_0}$ existuje σ-prvofiltr P Booleovy algebry $A_m^{\aleph_0}$, který ho obsahuje.

Důkaz této věty je opět konstruktivní (transfinitní indukcí řádu ω_1),[52] využívá důkaz tvrzení o existenci algebry $A_m^{\aleph_\xi}$ a navazuje na něj. Příslušný σ-prvofiltr je definován jako úplný vzor $\bar{\varphi}^{-1}(1)$, kde σ-homomorfismus $\bar{\varphi}$ algebry $A_m^{\aleph_0}$ na algebru $B = \{0,1\}$ je jednoznačným rozšířením jistého zobrazení φ vhodně zvoleného k danému $[X]$. Platí $\bar{\varphi}([X]) = 1$.[53]

Na základě výše dokázaného tvrzení a pomocí Stoneova výsledku uvedeného v [Sto36] dospívá L.S. Rieger k následujícímu závěru:

Věta: Nechť $A_m^{\aleph_0}$ je volná σ-algebra s m volnými σ-generátory. Označme $P_{[X]}$ množinu všech σ-prvofiltrů P této algebry, jež obsahují pevné $[X] \in A_m^{\aleph_0}$. Algebra $A_m^{\aleph_0}$ může být σ-izomorfně reprezentována σ-tělesem $T_m^{\aleph_0}$ podmnožin jisté množiny M σ-prvofiltrů P algebry $A_m^{\aleph_0}$, a to pomocí korespondence $[X] \leftrightarrow P_{[X]} \cap M$.

Téměř okamžitým důsledkem je zesílení Loomisovy věty:

Věta V1: Každá σ-algebra B je σ-homomorfním obrazem libovolného σ-tělesa $T_m^{\aleph_0}$ množin z předchozí věty, kdykoliv m není menší než nejmenší kardinální číslo, které je mohutností množiny σ-generátorů algebry B.

Jako další, topologické zesílení Loomisovy věty dokazuje L.S. Rieger následující tvrzení:

Věta V2: Volná σ-algebra $A_m^{\aleph_0}$ je σ-izomorfně reprezentována minimálním σ-tělesem borelovských podmnožin zobecněného Cantorova diskontinua C_m.[54] Speciálně, volná σ-algebra $A_{\aleph_0}^{\aleph_0}$ je σ-izomorfní se σ-tělesem borelovských podmnožin Cantorova diskontinua $C = C_{\aleph_0}$.

Tato věta dává kladné řešení (a dokonce zobecnění) problému č. 79 z Birkhoffovy knihy [Bir48], jenž zní: *Dokažte či vyvraťte tvrzení, že σ-těleso všech borelovských podmnožin Cantorova diskontinua je volná σ-algebra.*

Jak říká následující věta, tvrzení o σ-izomorfní reprezentaci volných σ-algeber neplatí pro ostatní volné $\aleph_\xi$-úplné Booleovy algebry, čímž tyto obecné algebry ztrácejí na významu.

Věta: Pro libovolné $\aleph_\xi \geq 2^{\aleph_0}$ (a tím pro každé nespočetné $\aleph_\xi$, předpokládáme-li hypotézu kontinua) nemůže volná $\aleph_\xi$-úplná Booleova algebra $A_m^{\aleph_\xi}$ pro $m \geq \aleph_0$ být $\aleph_\xi$-izomorfně reprezentována $\aleph_\xi$-úplným tělesem množin.

[52] Poznamenejme, že základní myšlenka důkazu spočívá v induktivní konstrukci pomocné rostoucí posloupnosti σ-filtrů v dané algebře $A_m^{\aleph_0}$. Podobné argumenty použil L. Henkin v [Hen49] k důkazu Gödelovy věty o úplnosti predikátového kalkulu prvního řádu.

[53] L.S. Rieger dodává, že tato věta může být nekonstruktivně dokázána obdobným postupem, který použil R. Sikorski [Sik48] k důkazu Loomisovy věty, či přímým použitím Loomisovy věty. Riegrovým cílem však bylo podat konstruktivní důkaz.

[54] *Minimální σ-těleso* borelovských podmnožin prostoru C_m je nejmenší σ-těleso podmnožin tohoto prostoru, které obsahuje všechny otevřené a současně uzavřené množiny.

Tuto větu L.S. Rieger dokázal pomocí výsledků Sikorského práce [Sik48] a získal negativní odpověď na Birkhoffův problém č. 80. Ten spočíval v *hledání možného zobecnění Loomisovy věty pro kardinální čísla různá od* $\aleph_0$.

Na závěr je diskutován Birkhoffův problém č. 78: *Dokažte či vyvraťte tvrzení, že je-li σ-algebra B σ-generovaná podmnožinou G, pak každé nenulové* $x \in B$ *obsahuje nějaký spočetný (konečný či nekonečný) nenulový průsek* $\bigwedge g_i$ *prvků z G.*

L.S. Rieger dokazuje negaci, uvádí jednoduchý protipříklad pro konečné i nekonečné σ-algebry. Proto problém modifikuje následovně: *Nechť* $A_m^{\aleph_0}$ *je volná σ-algebra a x její libovolný nenulový prvek. Existuje množina G volných σ--generátorů této algebry tak, že* $\bigwedge g_i \neq 0, \bigwedge g_i \subseteq x$ *pro* $g_i \in G$? Odpověď na tuto otázku je již kladná (na základě Věty V2).

Část 2.: *Aplikace v logice*

Jak již bylo výše zmíněno, v druhém oddílu práce [R7] aplikuje L.S. Rieger výsledky získané v první, algebraické části na matematickou logiku, speciálně na Tarského-Lindenbaumovu algebru.

Tarského-Lindenbaumova algebra (dále jen TL-algebra)[55] predikátového kalkulu prvního řádu je množina tříd formulí tohoto kalkulu, kde dvě formule patří do téže třídy právě tehdy, když jsou logicky (syntakticky) ekvivalentní[56]. Na této množině jsou přirozeným způsobem definovány binární operace spojení, průseku, unární operace doplňku, nula a jednotka. TL-algebra je tedy Booleovou algebrou.

Jsou zde však také definovány určité nekonečné spočetné průseky a spojení. Ukazuje se, že TL-algebru můžeme chápat jako jisté rozšíření volné σ-algebry (je třeba rozšířit pojem volné σ-algebry a další pojmy s ní související tak, aby zde byly uvažovány zmiňované nekonečné operace na TL-algebře).[57]

Použitím výsledků o σ-izomorfní reprezentaci volných σ-algeber z 1. části práce získává L.S. Rieger následující tvrzení:

Věta V3: Tarského-Lindenbaumovu algebru predikátového kalkulu prvního řádu lze σ-izomorfně (vzhledem k definovaným konečným a nekonečným operacím) reprezentovat σ-podalgebrou σ-tělesa borelovských podmnožin Cantorova diskontinua C.[58]

---

[55]TL-algebra byla poprvé zavedena A. Lindenbaumem v roce 1927 a o několik let později (v poněkud odlišné formě) A. Tarským. Již od třicátých let dvacátého století byla rozsáhle zkoumána mnoha matematiky, uveďme např. L. Henkina, H. Rasiowou, A. Mostowského, R. Sikorského či J.C.C. McKinseyho. Původně byla formulována pro výrokový kalkul. Na konci čtyřicátých let byla Lindenbaumova konstrukce zobecněna a aplikována na predikátový kalkul prvního řádu.

Tarského-Lindenbaumova algebra bývá často nazývána jen Lindenbaumova. Doplňme, že Adolf Lindenbaum (1904–1941) byl nadaný polský matematik a logik, který zemřel v židovském ghettu ve Vilniusu.

[56]Formule A, B jsou *logicky (syntakticky) ekvivalentní*, jestliže $(A \Rightarrow B)$ *et* $(B \Rightarrow A)$ je dokazatelná formule.

[57]Stejná problematika je řešena v řeči tzv. zobecněných σ-algeber v Riegrově práci [R8].

[58]Tato věta je citována v monografii H. Rasiowé a R. Sikorského *The mathematics of metamathematics* [RS63], str. 366. Později byla dokázána v pracích H. Rasiowé a R. Sikorského

Přímým důsledkem této věty o σ-izomorfním vnoření TL-algebry do σ-tělesa borelovských podmnožin Cantorova diskontinua je následující tvrzení:

Věta V4: Ke každému prvku $[A] \neq 0$[59] Tarského-Lindenbaumovy algebry predikátového kalkulu prvního řádu existuje σ-homomorfní zobrazení (opět v rozšířeném smyslu definovaných operací) $\bar{\varphi}$ této algebry na algebru $B = \{0, 1\}$,[60] pro které $\bar{\varphi}([A]) = 1$.

Hledané zobrazení $\bar{\varphi}$ k danému prvku $[A]$ získáme např. tak, že položíme $\bar{\varphi}([X]) = 1$, když borelovská podmnožina reprezentující $[X]$ obsahuje množinu reprezentující $[A]$. V ostatních případech klademe $\bar{\varphi}([X]) = 0$.

Právě uvedená věta je algebraickou formou (v poněkud zesílené podobě) Gödelovy věty o úplnosti predikátového kalkulu prvního řádu[61].

V časopise *Fundamenta Mathematicae*, v němž byla tato Riegrova práce publikována, je přímo za ní otištěna dvoustránková poznámka R. Sikorského *A note to Rieger's paper „On free $\aleph_\xi$-complete Boolean algebras“* [Sik51]. R. Sikorski zde uveřejnil jednoduchý důkaz Riegrovy Věty V2. Jako důsledek uvádí též zobecnění Věty V1.

Dále tuto Riegrovu práci citují např. S.A. Malyugin [Mal90], R.N. Ball a A.W. Hager [BH90].

3.3 Práce na rozhraní algebry a logiky

V Riegrových pracích je obtížné nalézt hranici mezi algebrou a logikou. Následující publikace se pohybují na pomezí abstraktní algebry a matematické logiky, proto jsme je soustředili do samostatného oddílu. Jejich společným a významným znakem je algebraizace matematické logiky.

Poznamenejme, že výklad základních logických pojmů je podán v části 4.1.1.

3.3.1 *On countable generalized σ-algebras, with a new proof of Gödel's completeness theorem* [R8] (1951)

V této práci Ladislav Svante Rieger podává zobecnění pojmu σ-algebry v tom smyslu, že nekonečné spočetné operace spojení a průseku nejsou definovány pro všechny prvky, ale jen pro členy jistých vícenásobných posloupností (nazvaných *fundamentální*). Ukazuje, že spočetná zobecněná σ-algebra se spočetnou množinou fundamentálních posloupností může být izomorfně reprezentována tělesem množin. Obecně taková izomorfní reprezentace neexistuje.

[RS58] a R. Sikorského [Sik62].

[59] $0 := [A \ et\ nonA]$.

[60] $1 =$„pravda“, $0 =$„lež“.

[61] Tato věta říká, že třída logicky pravdivých formulí se shoduje s třídou dokazatelných formulí. Pro podrobnější rozbor a komentář viz část 4.1.1. Úplná formulace původních Gödelových výsledků z práce [Göd30] je poměrně komplikovaná, zejména vzhledem k jistým aspektům, které mají spíše filozofickou povahu.

Hlavní cíl práce [R8] je stejný jako cíl druhé části práce [R7]: aplikace výsledků na matematickou logiku, konkrétně na TL-algebru predikátového kalkulu prvního řádu. Tím L.S. Rieger opět získává nový důkaz Gödelovy věty o úplnosti tohoto kalkulu.

I o těchto svých výsledcích L.S. Rieger přednášel na Mostowského semináři ve Varšavě v dubnu 1950; spolu s tématem článku [R7] byly jeho výsledky obsahem několika referátů o algebraickém pojetí predikátového kalkulu. Dodejme, že již v té době začal pracovat na monografii *Algebraic methods of mathematical logic*, která však byla dokončena a vydána až několik let po jeho smrti.

Připomeňme, že tyto Riegrovy výsledky vyšly nejen v anglickém článku [R8], ale i v ruské verzi [R9]; navíc byl v *Časopise pro pěstování matematiky* vydán krátký výtah [R30].

Nyní čtenáře seznámíme s nejdůležitějšími pojmy následujícího textu. Mějme Booleovu algebru B. Nechť Φ je rodina vícenásobných posloupností prvků z B tvaru $(a_{n_1,\dots,n_k})_{n_1,\dots,n_k=1}^{\infty}$. Množinu Φ nazýváme rodinou *fundamentálních* (angl. *marked*) posloupností, jestliže jsou splněny následující vlastnosti:

1. Pravidlo doplňku:

   je-li $(a_{n_1,\dots,n_k})_{n_1,\dots,n_k=1}^{\infty} \in \Phi$, pak $(a'_{n_1,\dots,n_k})_{n_1,\dots,n_k=1}^{\infty} \in \Phi$.

2. Pravidlo spojení a průseku:

   jsou-li $(a_{n_1,\dots,n_k})_{n_1,\dots,n_k=1}^{\infty}, (b_{m_1,\dots,m_l})_{m_1,\dots,m_l=1}^{\infty} \in \Phi$, pak

   $$(a_{n_1,\dots,n_k} \vee b_{m_1,\dots,m_l})_{n_1,\dots,n_k,m_1,\dots,m_l=1}^{\infty} \in \Phi$$

   a

   $$(a_{n_1,\dots,n_k} \wedge b_{m_1,\dots,m_l})_{n_1,\dots,n_k,m_1,\dots,m_l=1}^{\infty} \in \Phi.$$

3. Pravidlo identifikace zvolených indexů:

   je-li $(a_{n_1,\dots,n_k})_{n_1,\dots,n_k=1}^{\infty} \in \Phi$, jsou-li $1 \le i_1 < \dots < i_s \le k$ zvolené indexy a položíme-li $n = n_{i_1} = \dots = n_{i_s}$, pak

   $$(a_{n_1,\dots,n_{i_1-1},n,n_{i_1+1},\dots,n_{i_s-1},n,n_{i_s+1},\dots,n_k})_{n,n_1,\dots,n_k=1}^{\infty} \in \Phi.$$

4. Pravidlo fixace indexů:

   jestliže $(a_{n_1,\dots,n_k})_{n_1,\dots,n_k=1}^{\infty} \in \Phi$, $1 \le i_1 < \dots < i_s \le k$ jsou zvolené indexy a $n_{i_1},\dots,n_{i_s}$ předem daná přirozená čísla, pak

   $$(a_{n_1,\dots,n_{i_1},\dots,n_{i_s},\dots,n_k})_{n_1,\dots,n_{i_1-1},n_{i_1+1},\dots,n_{i_s-1},n_{i_s+1},\dots,n_k=1}^{\infty} \in \Phi.$$

5. Pravidlo triviální posloupnosti:

   je-li $a_{n_1,\dots,n_k} = a \in B$ pro všechna $n_1,\dots,n_k \in \mathbb{N}$, pak $(a_{n_1,\dots,n_k})_{n_1,\dots,n_k=1}^{\infty} \in \Phi$.

6. Pravidlo suprema a infima:

   ke každé posloupnosti $(a_{n_1,\ldots,n_k})_{n_1,\ldots,n_k=1}^{\infty} \in \Phi$ existuje v B

   supremum
$$\bigvee_{n_1,\ldots,n_k=1}^{\infty} a_{n_1,\ldots,n_k} = \bigvee_{n_1=1}^{\infty} \cdots \bigvee_{n_k=1}^{\infty} a_{n_1,\ldots,n_k}$$
   a infimum
$$\bigwedge_{n_1,\ldots,n_k=1}^{\infty} a_{n_1,\ldots,n_k} = \bigwedge_{n_1=1}^{\infty} \cdots \bigwedge_{n_k=1}^{\infty} a_{n_1,\ldots,n_k}.$$

7. Pravidlo částečného suprema a infima:

   je-li $(a_{n_1,\ldots,n_k})_{n_1,\ldots,n_k=1}^{\infty} \in \Phi$ a j dané přirozené číslo, $1 \leq j \leq k$, pak pro všechna $n_1, \ldots, n_{j-1}, n_{j+1}, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$
$$\bigwedge_{n_j=1}^{\infty} a_{n_1,\ldots,n_{j-1},n_j,n_{j+1},\ldots,n_k}$$
   a
$$\bigvee_{n_j=1}^{\infty} a_{n_1,\ldots,n_{j-1},n_j,n_{j+1},\ldots,n_k}$$
   jsou členy $(k-1)$-násobné posloupnosti patřící do Φ.

Booleova algebra B, ve které je dána rodina fundamentálních posloupností Φ, se nazývá *zobecněná σ-algebra* vzhledem k rodině Φ, zkráceně *$\Phi\sigma$-algebra*.

Uvědomme si, že $\Phi\sigma$-algebra je skutečně zobecněním pojmu σ-algebry, neboť v σ-algebře je Φ rodinou všech vícenásobných posloupností prvků. Pro $\Phi\sigma$-algebru nyní zavedeme pojem $\Phi\sigma$-prvofiltru[62] a σ-izomomorfismu (v zobecněném smyslu).

Definice: Neprázdná vlastní podmnožina P $\Phi\sigma$-algebry B se nazývá *$\Phi\sigma$-prvofiltr*, jsou-li splněny následující vlastnosti:

1. jestliže $(a_{n_1,\ldots,n_k})_{n_1,\ldots,n_k=1}^{\infty} \in \Phi$, kde $a_{n_1,\ldots,n_k} \in P$ pro všechna $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, pak
$$\bigwedge_{n_1,\ldots,n_k=1}^{\infty} a_{n_1,\ldots,n_k} \in P,$$

2. $(\forall a \in P)(\forall b \in B)(a \leq b \Rightarrow b \in P)$,

3. je-li
$$(a_{n_1,\ldots,n_k})_{n_1,\ldots,n_k=1}^{\infty} \in \Phi, \quad \bigvee_{n_1,\ldots,n_k=1}^{\infty} a_{n_1,\ldots,n_k} \in P,$$
   pak existují přirozená čísla $\tilde{n}_1, \ldots, \tilde{n}_k$, že $a_{\tilde{n}_1,\ldots,\tilde{n}_k} \in P$.

[62] L.S. Rieger zde používá místo termínu *filtr* termín *ideál*, což bylo pro jeho dobu poměrně typické.

Definice: Bijektivní zobrazení φ $\Phi\sigma$-algebry A do $\Psi\sigma$-algebry B se nazývá (*zobecněný*) *σ-izomorfismus*, jestliže platí následující:

1. je-li $(a_{n_1,\dots,n_k})_{n_1,\dots,n_k=1}^{\infty} \in \Phi$, pak $(\varphi(a_{n_1,\dots,n_k}))_{n_1,\dots,n_k=1}^{\infty} \in \Psi$,
2. pro každou posloupnost $(a_{n_1,\dots,n_k})_{n_1,\dots,n_k=1}^{\infty} \in \Phi$ platí
$$\bigvee_{n_1,\dots,n_k=1}^{\infty} \varphi(a_{n_1,\dots,n_k}) = \varphi\left(\bigvee_{n_1,\dots,n_k=1}^{\infty} a_{n_1,\dots,n_k}\right),$$
3. pro každou posloupnost $(a_{n_1,\dots,n_k})_{n_1,\dots,n_k=1}^{\infty} \in \Phi$ platí
$$\bigwedge_{n_1,\dots,n_k=1}^{\infty} \varphi(a_{n_1,\dots,n_k}) = \varphi\left(\bigwedge_{n_1,\dots,n_k=1}^{\infty} a_{n_1,\dots,n_k}\right),$$
4. $\varphi(a') = (\varphi(a))'$ pro každé $a \in A$,
5. pro každou posloupnost $(b_{n_1,\dots,n_k})_{n_1,\dots,n_k=1}^{\infty} \in \Psi$ existuje posloupnost $(a_{n_1,\dots,n_k})_{n_1,\dots,n_k=1}^{\infty} \in \Phi$ tak, že
$$\varphi(a_{n_1,\dots,n_k}) = b_{n_1,\dots,n_k} \text{ pro všechna } n_1,\dots,n_k \in \mathbb{N}.$$

Po příslušných definicích uvádí L.S. Rieger známá tvrzení o zobecněných σ-algebrách, jmenovitě Lemma o vnoření $\Phi\sigma$-algebry do σ-algebry, 1. a 2. větu o zobecněném σ-izomorfismu a Loomisovu větu. Pomocí těchto výsledků, zejména prostřednictvím Loomisovy věty, dospívá k hlavnímu závěru své práce [R8]:

Věta: Nechť B je spočetná $\Phi\sigma$-algebra se spočetnou rodinou Φ fundamentálních posloupností. Potom existuje těleso množin T a rodina Ψ fundamentálních posloupností množin z T, že $\Psi\sigma$-algebra T je σ-izomorfní (v zobecněném smyslu) s $\Phi\sigma$-algebrou B.[63]

Dále je již pozornost věnována oblasti matematické logiky. L.S. Rieger ukazuje, že *TL-algebra je spočetná $\Phi\sigma$-algebra se spočetnou rodinou Φ, a tedy σ-izomorfní s $\Phi\sigma$-tělesem množin T.*[64]

Z tohoto závěru jednoduše dospívá k následujícímu tvrzení:

Věta: Ke každému nenulovému prvku $[A]$ Tarského-Lindenbaumovy algebry predikátového kalkulu prvního řádu existuje $\Phi\sigma$-prvofiltr, který ho obsahuje.

Uvědomme si, že každý $\Phi\sigma$-prvofiltr P TL-algebry B určuje $\Phi\sigma$-homomorfní zobrazení $\bar{\varphi}$ algebry B na algebru $\{0,1\}$ (položíme $\bar{\varphi}([X]) = 1$, když $[X] \in P$,

[63] Toto tvrzení v roce 1953 nezávisle dokázali v jisté obecnější formě H. Rasiowa a R. Sikorski v práci [RS53].

[64] Ve své předchozí práci [R7] L.S. Rieger dokázal, že T je σ-podtělesem σ-tělesa borelovských podmnožin Cantorova diskontinua (viz Věta V3, část 3.2.4).

a $\bar{\varphi}([X]) = 0$, když $[X] \notin P$). Je vidět, že byl získán analogický výsledek jako ve Větě V4, část 3.2.4.

Tento výsledek je matematickým jádrem (opět v poněkud zesílené podobě) zmiňované Gödelovy věty o úplnosti predikátového kalkulu prvního řádu.

Princip Riegrových důkazů Gödelovy věty o úplnosti provedených v pracích [R7] a [R8] je do jisté míry obdobný. Jeho postup je tvořen následujícími společnými kroky:

1. je ukázáno, že Booleova algebra jistého typu (konkrétně rozšíření volné σ-algebry v [R7], resp. spočetná, $\Phi\sigma$-algebra se spočetnou rodinou Φ v [R8]) může být σ-izomorfně reprezentována jistým σ-tělesem množin,
2. je ukázáno, že TL-algebra je touto speciální Booleovou algebrou,
3. tedy TL-algebra může být též reprezentována tímto σ-tělesem množin,
4. je definován σ-homomorfismus TL-algebry na algebru $\{0, 1\}$ (což již odpovídá algebraické formulaci Gödelova tvrzení).

Na závěr poznamenejme několik slov o dalších důkazech Gödelovy věty o úplnosti. První zásadní modifikaci původní Gödelovy důkazové metody představil roku 1948 A. Mostowski v knize [Mos48]. Odlišný důkaz podal v následujícím roce v práci [Hen49] L. Henkin (nar. 1921) (viz poznámka 52) a nezávisle na něm obdobným způsobem i A. Robinson [Rob51].

V roce 1950 tuto větu novým způsobem dokázali R. Sikorski a H. Rasiowa [RS50]. Idea jejich důkazu je podobná myšlence Riegrově. Na obdobných principech jsou založeny i důkazy E.W. Betha (1908–1964) [Bet51], G. Hasenjägera (nar. 1919) [Has53], J. Łośe [Łoś55] či J. Reichbacha [Rei55]. Pro rozbor těchto důkazů odkazujeme na [Sur73].

Poznámka: A. Mostowski dokázal Gödelovu větu pro kalkul bez rovnosti. Jiní dokázali zobecněnou, tzv. Gödelovu-Mal'cevovu větu o úplnosti (viz část 4.1.1) predikátového kalkulu bez rovnosti (E.W. Beth) a s rovností (L. Henkin, G. Hasenjäger, H. Rasiowa a R. Sikorski, J. Reichbach, L.S. Rieger). Další modifikaci důkazu Gödelovy-Mal'cevovy věty podal L.S. Rieger též v práci [R21] (a [R22]), viz část 5.2.1.

3.3.2 *O jedné základní větě matematické logiky* [R10] (1955)

Práce [R10] je věnována obdobnému tématu jako předchozí práce [R8] a v jistém smyslu má stejné téma jako [R7]. Předně je zde jednoduchým způsobem dokázána fundamentální věta o zobecněných σ-algebrách, která je algebraickou formulací jedné ze základních vět matematické logiky, tzv. Lindenbaumovy věty. Dále je ukázáno, že Gödelova věta o úplnosti predikátového kalkulu prvního řádu a tzv. Löwenheimova-Skolemova věta jsou důsledky této věty. Závěr je opět věnován této Gödelově větě. L.S. Rieger porovnává její nejznámější důkazy, které byly do té doby získány.

Na úvod je třeba zdůraznit, že L.S. Rieger v tomto článku zavádí pojem Φ-algebry jako zjednodušení pojmu $\Phi\sigma$-algebry definovaného v předchozí práci [R8].[65] O tomto zjednodušení se však sám v práci nezmiňuje a Φ-algebru nazývá stejně jako v [R8] *zobecněnou σ-algebrou.* Jelikož pojem Φ-algebry je mnohem jednodušší než pojem $\Phi\sigma$-algebry, uvádíme zde její definici:

Definice: Booleova algebra B se nazývá Φ-*algebra* (vzhledem k rodině Φ), jestliže je dána rodina Φ posloupností prvků z B splňující následující vlastnosti:

1. Pravidlo doplňku:

   je-li $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \Phi$, pak $(a'_n)_{n=1}^{\infty} \in \Phi$.

2. Pravidlo spojení:

   jsou-li $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \Phi, a \in B$, pak $(a_n \vee a)_{n=1}^{\infty} \in \Phi$.

3. Pravidlo triviální posloupnosti:

   je-li $a_n = a \in B$ pro každé $n \geq n_0$, kde n_0 je nějaké přirozené číslo, pak $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \Phi$.

4. Pravidlo suprema:

   ke každé posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \Phi$ existuje v B supremum $\bigvee_{n=1}^{\infty} a_n$.

Poznámka: Z definice Φ-algebry již plyne pravidlo průseku analogické pravidlu spojení a pravidlo infima analogické pravidlu suprema.

Pro úplnost uvádíme i definici Φ-filtru a Φ-prvofiltru:

Definice: Neprázdná vlastní[66] podmnožina F Φ-algebry B se nazývá Φ-*-filtr*, jsou-li splněny následující vlastnosti:

1. jestliže $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \Phi$, kde $a_n \in F$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, pak $\bigwedge_{n=1}^{\infty} a_n \in F$.
2. $(\forall a \in F)(\forall b \in B)(a \leq b \Rightarrow b \in F)$.

Φ-filtr P se nazývá Φ-*prvofiltr*, jestliže navíc platí

3. je-li $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \Phi$ a $\bigvee_{n=1}^{\infty} a_n \in P$, pak existuje přirozené $\tilde{n}$ tak, že $a_{\tilde{n}} \in P$.

Nyní již můžeme vyslovit hlavní větu Riegrovy práce [R10].

Věta: Nechť B je Φ-algebra se spočetnou rodinou Φ a F její Φ-filtr. Pak existuje Φ-prvofiltr P této algebry, který obsahuje F.[67]

L.S. Rieger tuto větu dokázal poměrně jednoduše ve srovnání s důkazy prováděnými v oblasti matematické logiky, a to pomocí (jednoduché) induktivní

[65] L.S. Rieger zde především uvažuje rodinu Φ pouze jednoduchých posloupností prvků.
[66] L.S. Rieger nyní uvažuje pouze vlastní Φ-filtry.
[67] Poznamenejme, že Φ-algebra se spočetnou rodinou Φ musí být sama spočetná.

konstrukce. Poznamenal, že základní myšlenku této konstrukce použil již např. L. Henkin v důkazu Gödelovy věty (viz [Hen49] a poznámka 52).[68]

Dále L.S. Rieger popsal TL-algebru predikátového kalkulu prvního řádu a ukázal, že je to Φ-algebra se spočetnou rodinou Φ. V důsledku toho přistoupil k definici pojmu (bezesporné) teorie prvního řádu[69], která vychází z A. Tarského (viz [Tar36a] a [Tar36b]).

Definice: Bezesporná teorie prvního řádu je Φ-filtr Tarského-Lindenbaumovy algebry. Úplná bezesporná teorie prvního řádu je pak Φ-prvofiltr této algebry.

Po zavedení těchto pojmů je zřejmé, že výše uvedená hlavní věta práce [R10] je algebraickou podstatou následující věty:

Lindenbaumova věta: Každou bezespornou teorii prvního řádu je možno rozšířit v úplnou bezespornou teorii.

Nyní se L.S. Rieger dostal ke Gödelově větě o úplnosti predikátového kalkulu prvního řádu, kterou dokázal jako důsledek Lindenbaumovy věty. Formuloval ji takto (větu citujeme v Riegrově původním, poněkud silnějším znění):

Není-li výraz A nižšího predikátového počtu formulí,[70] *pak lze každé predikátové proměnné*[71] *dát význam určité (obecně n-členné) relace mezi přirozenými čísly a libovolně označit všechna přirozená čísla pomocí individuových proměnných*[72] *tak, že výraz A po případném dosazení vhodných čísel za jeho volné individuové proměnné (pokud v A nějaké jsou) obdrží význam chybného tvrzení o přirozených číslech.*[73]

Analogickým postupem pak dokázal následující větu:

Löwenheimova-Skolemova věta:[74] Každá teorie se spočetným jazykem, která má model, má rovněž spočetný model[75].

Poznámka: Důsledkem Löwenheimovy-Skolemovy věty je tzv. *Skolemův paradox* publikovaný v [Sko23], který lze formulovat takto:

Předpokládáme-li bezespornost teorie množin, musí mít tato teorie (podle Gödelovy věty o úplnosti) model. Podle Löwenheimovy-Skolemovy věty musí

[68] Zde L.S. Rieger konstruuje pomocnou rostoucí posloupnost Φ-filtrů obsahujících F. Hledaný Φ-prvofiltr P je jejich množinovým sjednocením.

[69] Tj. vyjádřitelné v symbolech predikátového kalkulu prvního řádu. L.S. Rieger je nazývá *elementární*.

[70] Slovem *výraz* označoval L.S. Rieger to, čemu dnes říkáme formule, slovem *formule* rozuměl dokazatelnou formuli.

[71] Tj. (dnes) predikátu.

[72] V dnešní řeči pouze proměnných.

[73] [R10], str. 226.

[74] Tato věta byla poprvé dokázána (ve slabším znění) Leopoldem Löwenheimem v práci [Löw15]. Značné zjednodušení Löwenheimova důkazu a zobecnění této věty podal o pět let později Thoralf Skolem v [Sko20].

[75] Tj. model, jehož univerzum je spočetná množina (viz část 4.1.1).

L.S. Rieger tuto větu uvádí v následujícím znění: *Každá bezesporná teorie prvního řádu může být považována za teorii jistých relací mezi přirozenými čísly.* [R10], str. 228.

mít rovněž spočetný model. V teorii množin platí, že mohutnost potenční množiny libovolné množiny m je ostře větší než mohutnost množiny m. Je-li však model teorie množin spočetný, pak všechny množiny této teorie musí být spočetné. To je ve (zdánlivém) rozporu s G. Cantorem (1845–1918), který v roce 1874 dokázal existenci nespočetných množin. Ve skutečnosti se o spor nejedná, neboť tyto množiny jsou nespočetné pouze uvnitř modelu. Z vnějšího hlediska jsou spočetné.

Prostřednictvím těchto výsledků byly objeveny nestandardní modely aritmetiky (viz část 4.2.6).

3.3.3 *Ob algebrach Suslina (S-algebrach) i ich predstavlenii* [R11] (1955)

V práci *O Suslinových*[76] *algebrách a jejich reprezentacích* L.S. Rieger jako první zavedl zobecnění σ-algeber na tzv. Suslinovy algebry. Zhruba lze říci, že se tyto algebry vztahují k tzv. A-operaci (známé z deskriptivní teorie množin) stejně jako σ-algebry k borelovským operacím.

Článek [R11] vznikl v souvislosti se snahou nalézt zobecnění TL-algebry predikátového kalkulu prvního řádu na algebru kvantifikace proměnných matematické logiky druhého řádu. Jak L.S. Rieger píše, tato publikace je v jistém smyslu algebraizací části deskriptivní teorie množin. Jeho cílem bylo podat algebraické analogie (v řeči Booleových algeber) některých pojmů deskriptivní teorie množin a sepsat fundamentální myšlenky související s plánovanou novou teorií kvantifikace proměnných matematické logiky. V práci [R11] poznamenává, že k tisku připravuje hlubší propracování této teorie. Není nám však známo, že by k publikování jeho dalších poznatků skutečně došlo.

Základní výsledky L.S. Rieger prezentoval již na schůzi *Československé matematické společnosti* v Praze dne 25. 5. 1953.[77] V článku [R11] přiznává, že některá tehdy uvedená zobecnění se poté ukázala jako nesprávná. O aplikacích v matematické logice druhého řádu L.S. Rieger přednášel na *8. sjezdu polských matematiků* ve Varšavě v září téhož roku, jednalo se o referát *O kvantifikátorech spojujících logické proměnné 2. řádu.*

O dva roky později se L.S. Rieger účastnil *4. sjezdu československých matematiků*, kde vystoupil 2. 9. 1955 s referátem *Suslinovy algebry a jejich representace* a 5. 9. s příspěvkem *O problému kvantifikace predikátových proměnných matematické logiky.* Dodejme, že o této problematice L.S. Rieger též referoval dne 29. 3. 1954 v *Matematické obci pražské* pod názvem *K algebraisaci deskriptivní theorie množin.*

---

[76]Mikhail Yakovlevich Suslin (1894–1919), ruský matematik, který pracoval zejména v obecné topologii a deskriptivní teorii množin. Jeho jméno je spojeno zejména s tzv. *Suslinovým problémem*, který se týká uspořádání množin reálných čísel. V šedesátých letech minulého století bylo dokázáno, že tento problém je nezávislý na axiomech Zermelovy-Fraenkelovy teorie množin, tedy že jej v této teorii nelze dokázat ani vyvrátit.

[77]V tento den L.S. Rieger vystoupil v *Matematické obci pražské* s přednáškou *O Kolmogorovových algebrách I.* Na jeho vystoupení navazovala druhá část *O Kolmogorovových algebrách II*, která se uskutečnila 15. 6. 1953.

Publikace [R11] je rozdělena do osmi paragrafů. Členění následujícího textu nebude přesně odpovídat členění Riegrově, linii práce však zachováme.

Hlavní témata práce

Definice: Nechť B je Booleova algebra. Říkáme, že B je *Suslinova algebra* (či *S--algebra*), jestliže pro každý systém $\{b_{k_1,\ldots,k_n}\}$ prvků algebry B, kde $k_1,\ldots,k_n \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$, (tzv. *Suslinův systém*)[78] platí

$$\sup_{(k_n)_{n=1}^{\infty}} \bigwedge_{n=1}^{\infty} b_{k_1,\ldots,k_n} \in B.$$

V tomto případě definujeme operaci

$$A(\{b_{k_1,\ldots,k_n}\}) := \sup_{(l_m)_{m=1}^{\infty}} \bigwedge_{m=1}^{\infty} b_{l_1,\ldots,l_m}$$

a říkáme, že v B je splněna (*Suslinova*) *A-operace* $A(\{b_{k_1,\ldots,k_n}\})$.[79]

Jsou-li prvky S-algebry množiny, nazýváme ji *S-těleso*.

L.S. Rieger se v práci [R11] soustředil na následující otázky:

1. Je možné (a za jaké podmínky) zobecnit Kolmogorovův-Sierpińského proces,[80] známý z deskriptivní teorie množin, na S-algebry a dostává se toto zobecnění mimo rámec teorie množin?[81]

2. Lze charakterizovat S-těleso tzv. C-množin bodů Cantorova diskontinua jako (v jistém smyslu) volnou Booleovu algebru?

3. Můžeme (a za jaké podmínky) považovat S-algebry za homomorfní obrazy S-těles?

V závěru článku [R11] L.S. Rieger uvádí poznámky o možnostech zobecnění metod a výsledků práce a nastiňuje aplikace v matematické logice druhého řádu.

[78] Indexová množina tohoto systému je tedy $\mathbb{N} \cup (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \cup (\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}) \cup \ldots$

[79] Jedná se o algebraickou analogii Suslinovy A-operace z deskriptivní teorie množin pro případ Booleových (konkrétně Suslinových) algeber.

[80] Viz [Sie26].

[81] L.S. Rieger podává v pátém paragrafu práce [R11] nejprve nutnou a postačující podmínku pro konvergenci tohoto procesu – formulovaného pro Suslinovy algebry – v ω_1 krocích. Tento proces konverguje např. v každém S-tělese.

Prostřednictvím právě zmíněných podmínek pak získává odpověď na stanovenou otázku (na její první a poslední část odpovídá kladně). Dále je ukázáno, že rozšíření Kolmogorovova-Sierpińského procesu na S-algebry je významné, neboť existují S-algebry, v nichž tento proces konverguje a které nejsou S-izomorfní (viz dále) s S-tělesem.

Podmínky nuly

Definice: Nechť b_k^α jsou prvky σ-algebry B,[82] kde $k \in \mathbb{N}, \alpha < \omega_1$. Říkáme, že v B je splněna *slabá*, resp. *silná podmínka nuly*, jestliže pro všechny prvky $b_k^\alpha \in B, k \in \mathbb{N}, \alpha < \omega_1$, takové, že

$$b_k^\alpha \wedge b_k^\beta = 0 \text{ pro } \alpha \neq \beta,$$

resp. takové, že

$$b_k^\alpha \geq b_k^\beta \text{ pro } \alpha < \beta \text{ a } \inf_\alpha b_k^\alpha = 0,$$

platí

$$\inf_\alpha \bigvee_{k=1}^{\infty} b_k^\alpha = 0.$$

Dále L.S. Rieger uvádí předpoklady, za nichž je slabá podmínka nuly důsledkem silné podmínky nuly. Poznamenejme, že slabou podmínku nuly splňuje např. každá volná σ-algebra. Obě podmínky nuly jsou splněny v těch σ-algebrách, které splňují tzv. *podmínku spočetnosti řetězců*[83].

Nyní je třeba zavést modifikaci pojmu homomorfismu pro S-algebry.

Definice: Nechť A, B jsou S-algebry a φ zobrazení A do B. Pak φ se nazývá S*-homomorfismus*, jestliže platí:

1. $\varphi(A(\{b_{k_1,\dots,k_n}\}))= A(\{\varphi(b_{k_1,\dots,k_n})\})$ pro každý Suslinův systém $\{b_{k_1,\dots,k_n}\}$ algebry A,
2. $\varphi(a') = (\varphi(a))'$ pro každé $a \in A$.

Zákony distributivity

Definice: Nechť B je S-algebra a $a_{i,j} \in B, i, j \in \mathbb{N}$. Potom B se nazývá *slabě distributivní*, jestliže

$$\bigwedge_{i=j}^{\infty} \bigvee_{j=1}^{\infty} a_{i,j} = A(\{b_{k_1,\dots,k_n}\}),$$

kde $b_{k_1,\dots,k_n} = a_{1,k_1} \wedge \dots \wedge a_{n,k_n}$.

Definice: Nechť $(\{a^i_{k_1,\dots,k_n}\})_{i=1}^{\infty}$ je posloupnost Suslinových systémů v S--algebře B. Pak Suslinův systém $\{b_{l_1,\dots,l_m}\}$ daný vztahy

$$b_k = a_k^1,$$

$$b_{k,l} = a_k^1 \wedge a_{k,l}^1,$$

$$b_{k,l,m} = a_k^1 \wedge a_{k,l}^1 \wedge a_m^2,$$

[82] S-algebra je zesílením pojmu σ-algebry.

[83] Tj. podmínku, že v transfinitní posloupnosti $a_1 \leq \dots \leq a_\alpha \leq \dots$ se od určitého spočetného indexu $\bar{\alpha}$ jedná o rovnost.

$$b_{k,l,m,n} = a^1_k \wedge a^1_{k,l} \wedge a^2_m \wedge a^1_{k,l,n},$$

$$b_{k,l,m,n,p} = a^1_k \wedge a^1_{k,l} \wedge a^2_m \wedge a^1_{k,l,n} \wedge a^2_{m,p},$$

$$b_{k,l,m,n,p,q} = a^1_k \wedge a^1_{k,l} \wedge a^2_m \wedge a^1_{k,l,n} \wedge a^2_{m,p} \wedge a^3_q,$$

$$\dots$$

se nazývá *diagonální systém* posloupnosti $(\{a^i_{k_1,\dots,k_n}\})_{i=1}^{\infty}$.

Definice: Daná S-algebra B se nazývá *silně distributivní*, jestliže pro libovolnou posloupnost $(\{a^i_{k_1,\dots,k_n}\})_{i=1}^{\infty}$ Suslinových systémů platí

$$\bigwedge_{i=1}^{\infty} A(\{a^i_{k_1,\dots,k_n}\}) = A(\{b_{l_1,\dots,l_m}\}),$$

kde $\{b_{l_1,\dots,l_m}\}$ je diagonální systém posloupnosti $(\{a^i_{k_1,\dots,k_n}\})_{i=1}^{\infty}$.

Podobně jako u podmínek nuly není obecně slabá distributivita důsledkem silné distributivity. Nicméně např. všechna S-tělesa jsou silně i slabě distributivními S-algebrami. Dále L.S. Rieger dokazuje následující vztahy mezi podmínkami danými zákony distributivity a podmínkami nuly:

- Žádné z těchto podmínek nejsou ve sporu, tj. existují silně i slabě distributivní S-algebry, které splňují obě podmínky nuly, např S-tělesa všech podmnožin nějaké množiny.
- Podmínky opačné ke všem uvedeným podmínkám též nejsou ve sporu.
- Ze silné ani slabé podmínky nuly nevyplývá ani slabý zákon distributivity.
- Ze silného ani slabého zákona distributivity nevyplývá ani slabá podmínka nuly.

Volné S-algebry

Definice: S-algebra A se nazývá *volná* slabě (silně) distributivní S-algebra s počtem m volných generátorů, pokud v A existuje podmnožina G mohutnosti m taková, že platí:

1. jediná slabě (silně) distributivní S-podalgebra algebry A obsahující podmnožinu G je sama A,
2. každé zobrazení φ podmnožiny G do jakékoliv slabě (silně) distributivní S-algebry B může být rozšířeno na S-homomorfismus algebry A do algebry B.

Dodáme-li k právě uvedené definici silnou podmínku nuly, dostáváme pojem volné slabě (silně) distributivní S-algebry se silnou podmínkou nuly. L.S. Rieger dále dokazuje následující dvě tvrzení:

Věta: Pro jakékoliv kardinální číslo $m \neq 0$ existuje volná silně distributivní S-algebra s počtem m volných generátorů. Tato algebra je definována jednoznačně (až na S-izomorfismus). Budeme ji označovat D_m.

Věta: Pro jakékoliv kardinální číslo $m \neq 0$ existuje volná slabě distributivní S-algebra se silnou podmínkou nuly a s počtem m volných generátorů. Tato algebra je definována jednoznačně (až na S-izomorfismus). Budeme ji označovat $\tilde{D}_m^0$.

Poznámka: Zde je vhodné říci několik slov o obecných důkazových metodách existence volné algebraické struktury určitého typu. Nejprve se konstruují „slova", tj. formální mnohočleny, které odpovídají daným operacím v algebraické struktuře a jejich kombinacím. Prvky hledané algebraické struktury se pak sestrojují jako třídy stejně silných slov.

Existují přitom dva způsoby:

1. Metoda významu slov, při níž je třída stejně silných slov tvořena všemi slovy, která „vždy" (tj. při libovolných významech nejjednodušších slov, která vystupují jako „algebraické proměnné") induktivně získávají stejné významy v jakémkoliv daném systému významů určitého typu. Tímto způsobem L.S. Rieger postupoval např. v práci [R7], viz část 3.2.4.

2. Metoda induktivní konstrukce relace stejné síly mezi slovy. Tento postup je použit v důkazu předchozích dvou vět.

Charakterizace S-tělesa C-množin Cantorova diskontinua

Následující dvě věty dávají odpověď na druhou otázku položenou v úvodní části:

Věta: Minimální S-těleso tzv. C-podmnožin zobecněného Cantorova diskontinua C_m je volná silně distributivní S-algebra s počtem m volných generátorů a je S-izomorfní s S-algebrou D_m.[84]

Věta: S-těleso C-podmnožin Cantorova diskontinua $C = C_{\aleph_0}$ je volná slabě distributivní S-algebra se silnou podmínkou nuly a s počtem m volných generátorů a je S-izomorfní s S-algebrou $\tilde{D}_{\aleph_0}^0$.

Důsledkem těchto tvrzení je vztah $D_{\aleph_0} \cong \tilde{D}_{\aleph_0}^0$.

Zároveň jsme získali následující rozšíření Loomisovy věty:

Věta: Každá silně distributivní S-algebra je S-homomorfním obrazem vhodného S-tělesa množin.

To dává pozitivní odpověď na významně omezený Birkhoffův problém č. 80 (viz část 3.2.4); zde se jedná o omezení na distributivní S-algebry. Připomeňme, že obecně je odpověď na tento problém negativní, dokonce i v případě jeho zeslabení na S-algebry.

---

[84] *Minimálním S-tělesem* C-množin zobecněného Cantorova diskontinua C_m rozumíme nejmenší S-těleso podmnožin tohoto prostoru, které obsahuje všechny otevřené a současně uzavřené množiny.

Zároveň tím dostáváme odpověď na třetí otázku položenou v úvodu. Vzhledem k tomu, že byl v práci [R11] uveden příklad S-algebry, která není S-homomorfním obrazem žádného S-tělesa, je odpověď na první část této otázky negativní.

Na článek [R11] později navazovali např. P.J. Campbell v [Cam71], E. Ellentuck ([Ell75] a [Ell77]). S-algebrám se dále věnovali např. W. Mallory v [Mal76] a R. Morais ([Mor76] a [Mor77]). Na závěr poznamenejme, že recenzent práce [R11] R. Sikorski v ní nalezl několik chyb, které ve své recenzi podrobně popsal.

3.3.4 *Zametka o t. naz. svobodnych algebrach s zamykanijami* [R12] (1957)

Článek *Poznámka o tzv. volných algebrách s uzávěry* je věnován jedné chybné větě citované G. Birkhoffem, jež byla v [Bir48] navíc mylně přiřazena K. Kuratowskému. Cílem Riegrovy práce [R12] je objasnit nesprávnost jejího znění i připisovaného autorství.[85]

Definice: Booleova algebra B se nazývá *algebra s uzávěrem*[86], jestliže je na množině jejích prvků definována dodatečná unární operace uzávěru splňující axiomy:[87]

1. $(\forall x \in B)(\forall y \in B)\left(\overline{x \vee y} = \overline{x} \vee \overline{y}\right)$,
2. $\overline{0} = 0$,
3. $(\forall x \in B)\left(x \leq \overline{x}\right)$,
4. $(\forall x \in B)\left(\overline{\overline{x}} = \overline{x}\right)$.

Poznámka: L.S. Rieger uvádí, že algebry s uzávěry byly tehdy studovány zejména kvůli jejich aplikacím v tzv. modálních systémech matematické logiky. Mezi fundamentální práce v té době patřil článek [MT44] autorů J.C.C. McKinseyho a A. Tarského, algebrami s uzávěry se též zabývali např. H. Rasiowa a R. Sikorski.

Zmiňovaná nesprávná věta z [Bir48] tvrdí, že *volná algebra s uzávěrem, která má jeden generátor, obsahuje právě 16 prvků.* L.S. Rieger toto tvrzení vyvrací v [R12] tím, že dokazuje následující větu:

Věta: Volná algebra s uzávěrem, která má jeden generátor, má nekonečný spočetný počet prvků.

V důkazu této věty podává příklad algebry s uzávěrem a jedním generátorem mající nekonečně mnoho prvků. Využívá zde strukturu později nazvanou

[85] L.S. Rieger poznamenává, že na tyto chyby upozornil K. Kuratowského již v roce 1950, ruský překlad Birkhoffovy monografie [Bir48] však způsobil jejich rozšíření.

[86] Angl. *closure algebra.*

[87] Jedná se o klasické axiomy uzávěrové operace, které se objevují např. v definici topologického prostoru.

Riegrův-Nishimurův svaz (viz část 3.2.2). Zároveň poznamenává, že jeho větu lze odvodit z úvah v [R5] a [MT48]. Zmiňuje se též o možné příčině obou chyb. Domnívá se, že jsou způsobeny nesprávnou interpretací Kuratowského výsledku z [Kur48], kde je podán seznam 14 množin, jež mohou být získány ze zadané množiny topologického prostoru pomocí operací uzávěru a doplňku. Po přidání prázdné množiny a celého prostoru dostaneme strukturu o 16 prvcích, tu však nelze považovat za Booleovu algebru (není např. distributivní).

V souvislosti s Riegrovým-Nishimurovým svazem je práce [R12] citována v článcích V.B. Šehtmana [Šeh78] a F. Bellissimy [Bel86].

3.4 Citace v monografiích

Riegrovy algebraicko-logické práce jsou dosti často citovány v monografiích věnovaných teorii svazů, zejména pak matematické logice. U konkrétních výsledků byly jejich citace zmíněny přímo v oddílech věnovaných příslušným matematickým dílům.

Nejvíce je L.S. Rieger citován v již zmíněných knihách R. Sikorského *Boolean algebras* [Sik60] a H. Rasiowé a R. Sikorského *The mathematics of metamathematics* [RS63]. V monografii [Sik60] jsou citovány práce [R4], [R5], [R6], [R8], [R10], [R11], [R12] a zejména [R7]. Autoři monografie [RS63] se odkazují na Riegrovy publikace [R4], [R7] a [R8], nejvíce jsou zde zmiňovány výsledky publikované v [R5], a to v oddílu věnovaném právě intuicionistické výrokové logice.

Článek [R5] je dále citován v monografii S.C. Kleeneho a R.E. Vesleyho *The foundations of intuitionistic mathematics* [KV65], v knize *Foundations of set theory* [FBL73], jejímiž autory jsou A.A. Fraenkel (1891–1965), Y. Bar-Hiller a A. Lévy, a v poměrně nedávné monografii A. Chargova a M. Zakharyascheva *Modal logic* [ChZ97]. To vše svědčí o značném významu publikace [R5] pro světovou matematiku.

Riegrova práce [R7] je dále zmiňována v Kleeneho díle *Mathematical logic* [Kle67] a publikace [R8] v knize A. Grzegorczyka (nar. 1922) *An outline of mathematical logic* [Grz74]. Tyto dva články též patří mezi Riegrova nejvýznamnejší díla.

Ryze algebraická monografie G. Grätzera *General lattice theory* [Grä78] cituje Riegrovy práce [R4] a [R6]. Tyto publikace spolu s [R7] jsou též citovány v Birkhoffově *Lattice theory* [Bir67].

Na Riegrovy články [R5] a [R8] se též odkazuje česky psaná monografie z roku 1996 s názvem *Kurt Gödel* [MN96], jejímiž editory jsou J. Malina (nar. 1945) a J. Novotný (nar. 1944).

3.4.1 Odkazy ve sborníku *Studies in the history of mathematical logic* [Sur73]

Publikace *Studies in the history of mathematical logic* [Sur73] byla sestavena Katedrou logiky na Jagellonské univerzitě v polském Krakově. Obsahuje příspěvky z každoročně konané *Konference z historie logiky* pořádané Polskou akademií věd. Sborník [Sur73] je rozdělen do tří tématických celků, jeden z nich tvoří *Příspěvky k historii úplnosti predikátového kalkulu prvního řádu.*

Tato část obsahuje pět referátů: *Kurt Gödel's doctoral dissertation* (J. Zygmunt), *A survey of the methods of proof of the Gödel-Malcev's completeness theorem* (J. Zygmunt), *The concept of the Lindenbaum algebra: its genesis* (S.J. Surma), *On the old and new methods of interpreting quantifiers* (A. Wroński) a *L. Rieger's logical achievement* (W. Szczech).[88]

Příspěvek *A survey of the methods of proof of the Gödel-Malcev's completeness theorem*[89] porovnává důkazy A. Mostowského [Mos48], E.W. Betha [Bet51], L. Henkina [Hen49], G. Hasenjägera [Has53], H. Rasiowé a R. Sikorského [RS50], J. Reichbacha [Rei55] a L.S. Riegra. Jsou zde mj. popsány hlavní výsledky Riegrovy práce [R8] a zmíněna jeho důkazová metoda z článku [R7]. V souvislosti s Riegrovou další modifikací důkazu (na základě tzv. substitutivně indexované Booleovy algebry, viz část 5.2.1) je zde citována jeho monografie [R22].

V článku *The concept of the Lindenbaum algebra: its genesis*[90] prezentuje S.J. Surma tři nezávislá zobecnění původní Lindenbaumovy metody, která byla použita k důkazu Gödelovy věty o úplnosti. Jedná se o metodu J. Łośe [Łoś55], dále L. Henkina [Hen49] a a dalších autorů, a do třetice H. Rasiowé a R. Sikorského [RS50] a též L.S. Riegra. V této souvislosti jsou zde opět citovány práce [R7] a [R8].

3.5 Vznik a vývoj teorie svazů

O vzniku a formování teorie svazů v období do roku 1939 je pojednáno v monografii H. Mehrtense (nar. 1946) *Die Entstehung der Verbandstheorie* [Meh79]. Pojem svaz se objevil již ve druhé polovině devatenáctého století, a to v oblasti algebraické logiky a nezávisle v teorii čísel. V těchto souvislostech je uváděno jméno E. Schrödera (1841–1902), který navazoval na výsledky z logiky G. Boolea (1815–1864) a C. Peirceho (1839–1914) (viz část 5.3.4). K axiomatické výstavbě svazů dospěl R. Dedekind (1831–1916) v rámci snah o zobecnění pojmů z elementární teorie čísel v teorii celých algebraických čísel. R. Dedekind např. zavedl pojem modulárnosti a dokázal řadu důležitých vlastností týkajících se charakteristiky různých typů svazů.

Tyto výsledky však ve své době nebyly dostatečně pozitivně přijaty. Svazy se dostaly do popředí zájmu matematiků až ve třicátých letech dvacátého století. Svazová problematika se v této době objevuje v řadě oblastí, publikují se práce věnované jejím aplikacím. K poměrně rychlému zformování teorie svazů jako samostatné matematické disciplíny přispěla mj. van der Waerdenova[91]

[88] Článek [Szc73] věnovaný osobnosti L.S. Riegra byl již zmíněn v části 1.6.12.

[89] [Sur73], str. 165–238.

[90] [Sur73], str. 239–253.

[91] Bartel Leendert van der Waerden (1903–1996), holandský matematik. Věnoval se zejména algebře, algebraické geometrii, aplikaci teorie grup v kvantové fyzice, dále pak statistice a historii matematiky.

monografie *Moderne Algebra* [Wae31] a obzvláště pak vědecké dílo Garretta Birkhoffa (nazývaného otcem teorie svazů), který jako první souhrnně zpracoval teorii svazů do jednoho celku. Jeho monografie *Lattice theory* ([Bir40] a později její rozšířené vydání [Bir48]) se stala základním studijním materiálem z teorie svazů ve světě a inspirovala vznikající československý výzkum.

Právě rok 1940 bývá považován za rok formálního vzniku teorie svazů. Mezi slavná jména související s počátky této disciplíny patří K. Menger (1902–1985), O. Ore (1899–1968), J. von Neumann (1903–1957), M.H. Stone, A. Tarski či V.I. Glivenko.

3.5.1 Počátky teorie svazů v Československu

Studium a vývoj teorie svazů v tehdejším Československu v období do Riegrovy smrti v roce 1963 je detailně zmapován v dizertační práci Š. Bilové [Bil04] (viz též knižní zpracování [Fuch04]). O významných výsledcích z dalších let se dozvídáme ze stručného článku K. Drbohlava [Drb87].

V české literatuře se poprvé objevuje odkaz na teorii svazů již v roce 1939, a to v článku O. Borůvky [Bor39]. Přestože se Borůvka na tuto problematiku přímo nezaměřoval, významně přispěl k rozšíření teorie svazů v československé matematice a má velkou zásluhu na rozvoji poválečné algebry v Brně a na Slovensku.

Počátek rozvoje algebry v Praze je jednoznačně spjat s osobností Vladimíra Kořínka, který je prvním českým autorem práce věnované výhradně svazové problematice ([Koř42]). I svým pedagogickým působením se zasloužil o rozvoj studia teorie svazů v české matematice. V. Kořínkovi je věnována monografie Zdeňky Kohoutové a Jindřicha Bečváře (nar. 1947) [KB05].

Po skončení druhé světové války se u nás teorie svazů soustředila do tří center: v Praze, Brně a na Slovensku. Mezi pražské matematiky, kteří navazovali na dílo V. Kořínka (zejména na jeho výsledky týkající se Schreierovy věty a vlastností Zassenhausovy[92] metody zjemnění řetězců ve svazech), patří Ludvík Janoš (nar. 1922), Čestmír Vitner (nar. 1925), Václav Vilhelm (nar. 1925) a Václav J. Havel (nar. 1927). S teorií svazů je spojeno i jméno Otomara Hájka (nar. 1930) a význačného algebraika Vlastimila Dlaba, který se věnoval především axiomatickému studiu obecných algebraických závislostních struktur.

L.S. Rieger, který se zabýval zejména Booleovými algebrami a aplikacemi v matematické logice, pracoval poměrně odděleně.

Z brněnských algebraiků jmenujme vedle O. Borůvky např. Karla Koutského (1897–1964)[93], který se svazům věnoval z topologického pohledu, a Miloslava Mikulíka (nar. 1927), který se soustředil hlavně na metrické svazy. Na Slovensku se po válce teorii svazů věnovali Ján Jakubík a Milan Kolibiar (1922–1994)[94].

[92] Hans Julius Zassenhaus (1912–1991).

[93] Viz Polák, V., *Zemřel profesor Karel Koutský*, PMFA **9** (1964), 376; Sekanina, M., *Život a dílo profesora Dr. Karla Koutského. Seznam prací profesora Dr. Karla Koutského*, ČPM **90** (1965), 250–256.

[94] Viz Jakubík, J. a Katriňák, T., *Šesdesiatiny profesora Milana Kolibiara*, ČPM **107** (1982), 320–325 (též CMJ **32(107)** (1982), 498–503; Math. Slovaca **32** (1982), 189–194);

Ján Jakubík se v dané době zabýval hlavně vztahem mezi grafovým a svazovým izomorfismem a rozklady svazů na direktní součin, dále se věnoval kongruencím a tzv. Jordanově-Dedekindově podmínce pro řetězce. Vyřešil též pět Birkhoffových problémů. Milan Kolibiar studoval ve svazech ternární operaci, operaci „mezi“, soustředil se též na metrické multisvazy, kongruence a axiomatickou výstavbu modulárních svazů.

Šedesátá a sedmdesátá léta

Na konci šedesátých let začíná do svazové problematiky významně zasahovat Ladislav Beran, který publikuje řadu prací z teorie tzv. ortomodulárních svazů a o těchto strukturách vydává monografii [Ber84] ([Ber85]). Ta je patrně, jak píše K. Drbohlav, první monografií tohoto typu ve světové literatuře.

V roce 1976 Jiří Tůma (nar. 1952) a Pavel Pudlák pozitivně řeší, v rámci speciálního semináře vedeného Pavlem Goralčíkem, jeden z nejobtížnějších Birkhoffových problémů. Dokázali, že každý konečný svaz lze reprezentovat jako podsvaz konečného svazu ekvivalencí. Věta je významná obzvláště v kombinatorice, byla dokázána prostřednictvím tzv. regrafových funkcí objevených J. Tůmou.

Katriňák, T., *The 70th anniversary of Professor Milan Kolibiar*, Math. Slovaca **42** (1992), 251–256 (též CMJ **42** (1992), 187–190); Katriňák, T., *Professor Milan Kolibiar (1922–1994)*, Math. Slovaca **44** (1994), 489; Katriňák, T., *In memoriam: Milan Kolibiar (1922–1994)*, ORDER **12** (1995), 321–325.

Literatura

[AKS85a] Adams, M.E., Koubek, V., a Sichler, J., *Endomorphisms and homomorphisms of Heyting algebras*, Algebra Universalis **20(2)** (1985), 167–178.

[AKS85b] Adams, M.E., Koubek, V., a Sichler, J., *Homomorphisms and endomorphisms of distributive lattices*, Houston J. Math. **11(2)** (1985), 129–145.

[Bel86] Bellissima, F., *Finitely generated free Heyting algebras*, J. Symb. L. **51(1)** (1986), 152–165.

[Ber84] Beran, L., *Orthomodular lattices (algebraic approach)*, Academia, Praha, 1984.

[Ber85] Beran, L., *Orthomodular lattices (algebraic approach)*, P. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Boston, Lancaster, 1985.

[Ber99] Berka, K., *Vývoj logiky v ČSR v letech 1945–1953*, Sborník z konference Věda v Československu 1945–1953, 1998 (Praha), Karolinum, 1999, pp. 499–505.

[Bet51] Beth, E.W., *A topological proof of the theorem of Löwenheim-Skolem-Gödel*, Proc. Konink. Nederl. Akad. Wet., Ser. A **54** (1951), 436–444.

[BH90] Ball, R.N. a Hager, A.W., *Epicompletion of Archimedian l-groups and vector lattices with weak unit*, J. Australian Math. Soc., Ser. A, Part 1 **48** (1990), 25–56.

[Bil04] Bilová, Š., *Lattice theory in Czech and Slovak mathematics until 1963*, dizertační práce, Masarykova univerzita, Brno, 2004.

[Bir40] Birkhoff, G., *Lattice theory*, AMS, New York, 1940, 2. vyd. AMS, New York, 1948; 3. vyd. AMS, Providence, 1967, 1973; rusky *Teorija struktur*, Izd. inost. lit., Moskva, 1952; *Teorija rešetok*, Nauka, Moskva, 1984.

[Bir48] Birkhoff, G., *Lattice theory*, AMS, New York, 1948.

[Bir67] Birkhoff, G., *Lattice theory*, AMS, New York, 1967.

[Bor39] Borůvka, O., *Teorie grupoidů, část první*, Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk **275** (1939).

[Bož84] Božic, M., *Positive logic with double negation*, Publ. Inst. Math. **35(49)** (1984), 21–31.

[Cam71] Campbell, P.J., *Suslin logic*, dizertační práce, Cornell University, New York, 1971.

[Car34] Carnap, R., *Logische Syntax der Sprache*, Springer, Wien, 1934, 2. vyd. Springer, Wien, 1968; anglicky *Logical syntax of language*, Kegan, Trench, Trübner, London, 1937; Routledge & Kegan, London, 1949, 1964, 1967; Routledge, London, 2000.

[Car43] Carnap, R., *Formalisation of logic*, Harvard University Press, Cambridge, 1943, spolu s [Car46] vydáno jako *Introduction to semantics and formalisation of logic*, Harvard University Press, Cambridge, 1959, 1961, 1968, 1975.

[Car46] Carnap, R., *Introduction to semantics*, Harvard University Press, Cambridge, 1946, vydáno též 1942, 1948; spolu s [Car43] vydáno jako *Introduction to semantics and formalisation of logic*, Harvard University Press, Cambridge, 1959, 1961, 1968, 1975.

[Čech37] Čech, E., *Topologické prostory*, ČPMF **66** (1937), D225–D264.

[Čub88] Čubric, D., *There are denumerably many ternary intuitionistic Sheffer functions*, Notre Dame J. Formal Logic **29** (1988), 579–581.

[Day65] Day, G.W., *Free complete extensions of Boolean algebras*, Pacific J. Math. **15** (1965), 1145–1151.

[Drb87] Drbohlav, K., *Algebra, logika a teorie množin*, PMFA **32** (1987), 78–85, též Vývoj matematiky v ČSR v období 1945–1985 a její perspektivy (Netuka, I., ed.), Univerzita Karlova, Praha, 1986, pp. 54–69.

[Dro89] Droste, M., *The existence of rigid measurable spaces*, Topology and its Applications **31(2)** (1989), 187–195.

[Ell75] Ellentuck, E., *The foundations of Suslin logic*, J. Symb. L. **40** (1975), 567–575.

[Ell77] Ellentuck, E., *Free Suslin algebras*, CMJ **27(102)** (1977), 201–219.

[FBL73] Fraenkel, A.A., Bar-Hiller, Y., a Lévy, A., *Foundations of set theory*, North--Holland Publishing Company, Amsterdam, London, 1973, 1. vyd. Fraenkel, A.A. a Bar-Hillel, Y., *Foundations of set theory*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1958.

[Fef95] Feferman, S. (ed.), *Kurt Gödel: Collected works, III*, Oxford University Press, New York, Oxford, 1995.

[Fuch04] Fuchs, E. (ed.), *Mathematics throughout the ages, II*, Výzkumné centrum pro dějiny vědy, Praha, 2004.

[Gai64] Gaifman, H., *Infinite Boolean polynomials, I*, Fund. Math. **54** (1964), 229–250.

[Gen34] Gentzen, G., *Untersuchungen über das logische Schliessen*, Math. Z. **39** (1934), 176–210, 405–431.

[Gli29] Glivenko, V.I., *Sur quelques points de la logique de Brouwer*, Bull. Ac. Sci. Belg. **15(5)** (1929), 183–188.

[GM68] Groot de, J. a Maurice, M.A., *On the existence of rigid compact ordered spaces*, Proc. AMS **19** (1968), 844–846.

[Göd30] Gödel, K., *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls*, Monatsh. Math. Phys. **37** (1930), 349–360.

[Göd33] Gödel, K., *Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls*, Erg. Koll. Wien **4** (1933), 39–40.

[Grä78] Grätzer, G., *General lattice theory*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1978, 2. vyd. Birkhäuser Verlag, Basel, 1998.

[Gro59] Groot de, J., *Groups represented by homeomorphism groups*, Math. Ann. **138** (1959), 80–102.

[Grz74] Grzegorczyk, A., *An outline of mathematical logic*, PWN, Warszawa, 1974, též P. Reidel Publishing Company, Dodrecht, Holland, Boston, 1974; polsky *Zarys logiki matematycznej*, 1. vyd. PWN, Warszawa, 1961; 2. vyd. PWN, Warszawa, 1969; 3. vyd. PWN, Warszawa, 1973; 4. vyd. PWN, Warszawa, 1975; 5. vyd. PWN, Warszawa, 1981; 6.vyd. PWN, Warszawa, 1984.

[Hal64] Hales, A.W., *On the non-existence of free complete Boolean algebras*, Fund. Math. **54** (1964), 45–66.

[Har56] Harrop, R., *On disjunctions and existential statements in intuitionistic systems of logic*, Math. Ann. **132** (1956), 347–361.

[Has53] Hasenjäger, G., *Eine Bemerkung zu Henkin's Beweis für die Vollständigkeit des Prädikatenkalküls der ersten Stufe*, J. Symb. L. **18** (1953), 42–48.

[Hen49] Henkin, L., *The completeness of the first order functional calculus*, J. Symb. L. **14** (1949), 159–166.

[Hey30] Heyting, A., *Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik*, S.-B. Preuss. Ak. Wiss., Phys. math. Kl. (1930), 42–56.

[HK39] Hermes, H. a Köthe, G., *Theorie der Verbände*, Enz. math. Wiss., Bd. I, Teil 1, Heft 5, 13 (1939).

[ChZ97] Chagrov, A. a Zakharyaschev, M., *Modal logic*, Claredon Press, Oxford, 1997.

[Itu83] Iturrioz, L., *Symmetrical Heyting algebras with operators*, Z. math. Logik Grund. Math. **29(1)** (1983), 33–70.

[Jaś36] Jaśkowski, S, *Recherches sur le système de la logique intuitioniste*, Actes du Congrès International de Philosophie Scientifique, VI Philosophie des mathématiques. Actualités scientifiques et industrielles 393 (Paris), 1936, pp. 58–61.

[Joh37] Johansson, I., *Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus*, Compositio Mathematica **4** (1937), 119–136.

[Jón51] Jónsson, B., *A Boolean algebra without proper automorphisms*, Proc. AMS **5** (1951), 766–770.

[Kat51] Katětov, M., *Remarks on Boolean algebras*, Colloquium Mathematicum **2** (1951), 227–235.

[KB05] Kohoutová, Z. a Bečvář, J., *Vladimír Kořínek 1899–1981*, Ústav soudobých dějin AV ČR, Praha, 2005.

[Kle52] Kleene, S.C., *Introduction to metamathematics*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1952, též Van Nostrand Co., New York, 1952; North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1962, 1967, 1971, 1974, 1980, 1996; rusky *Vvedenie v metamatematiku*, Izd. inostr. lit. Moskva, 1957.

[Kle62] Kleene, S.C., *Disjunction and existence under implication in elementary intuitionistic formalism*, J. Symb. L. **27** (1962), 11–18.

[Kle67] Kleene, S.C., *Mathematical logic*, J. Wiley & Sons, New York, 1967, též J. Wiley & Sons, New York, 1968; Dover Publications, New York, 2002; rusky *Matematičeskaja logika*, Mir, Moskva, 1973; francouzsky *Logique mathématique*, J. Gabay, Paris, 1987.

[Koř42] Kořínek, V., *Der Schreiersche Satz und das Zassenhaussche Verfahren in Verbänden*, Věstník KČSN, tř. mat.-přír., ročník 1941 **14** (1942), 1–28.

[Kur48] Kuratowski, K., *Topologie, I*, Monografie Mat., Warszawa, 1948, 1. vyd. Warszawa, 1933; 3. vyd. Nakl. Polskiego Towarzystwa Mat., Warszawa, 1952; 4. vyd. PWN, Warszawa, 1958; anglicky *Topology, I*, Academic Press, New York, 1966; PWN, Warszawa, 1966.

[KV65] Kleene, S.C. a Vesley, R.E., *The foundations of intuitionistic mathematics*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1965.

[Lav81] Lavalette de, G.R.R., *The interpolation theorem in fragments of logics*, Proc. Konink. Nederl. Akad. Wet., Ser. A **84(1)** (1981), 71–86.

[Loo47] Loomis, L.H., *On the representation of σ-complete algebras*, Bull. AMS **53** (1947), 757–760.

[Löw15] Löwenheim, L., *Über Möglichkeiten im Relativkalkül*, Math. Ann. **76** (1915), 447–470.

[Łoś55] Łoś, J., *The algebraic treatment of the methodology of elementary deductive systems*, Studia Logika **2** (1955), 151–212.

[Mal76] Mallory, W., *Suslin cylindrical algebras*, dizertační práce, Rutgers University, New Jersey, 1976.

[Mal90] Malyugin, S.A., *Sequential order topologies*, Siberian Math. J. **31(1)** (1990), 165–168.

[Meh79] Mehrtens, H., *Die Entstehung der Verbandstheorie*, Gerstenberg Verlag, Hildesheim, 1979.

[MN96] Malina, J. a Novotný, J. (ed.), *Kurt Gödel*, NAUMA, Brno, 1996.

[Mor76] Morais, R., *Projective logic*, dizertační práce, Rutgers University, New Jersey, 1976.

[Mor77] Morais, R., *Projective logics and projective Boolean algebras*, Non-classical Logics, Model Theory and Computability. Proc. 3rd Latin-Am. Symp. Math. Logic, 1976 (Capinas), 1977, pp. 201–221.

[Mos48] Mostowski, A., *Logika matematyczna*, Monografie Mat., Warszawa, 1948.

[MT44] McKinsey, J.C.C. a Tarski, A., *The algebra of topology*, Ann. Math. **45** (1944), 141–191.

[MT46] McKinsey, J.C.C. a Tarski, A., *On closed elements in closure algebras*, Ann. Math. **47** (1946), 122–162.

[MT48] McKinsey, J.C.C. a Tarski, A., *Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting*, J. Symb. L. **13** (1948), 1–15.

[Nis60] Nishimura, I., *On formulas of one variable in intuitionistic propositional calculus*, J. Symb. L. **25** (1960), 327–331.

[Pan41] Pankajam, S., *On the formal structure of the propositional calculus, I*, J. Indian Math. Soc. **5** (1941), 49–61.

[Pan42] Pankajam, S., *On the formal structure of the propositional calculus, II*, J. Indian Math. Soc. **6** (1942), 51–62, 102.

[Pil50] Pilčak, B.Ju., *O probleme razrešimosti dlja isčislenija zadač*, Doklady Akademii Nauk SSSR **75** (1950), 773–776.

[Pil52] Pilčak, B.Ju., *Ob isčislenii zadač*, Ukr. mat. žurnal **4** (1952), 174–194.

[Pol98] Polacik, T., *Propositional quantification in the monadic fragment of intuitionistic logic*, J. Symb. L. **63** (1998), 269–300.

[Pro90] Procházka, L., *Algebra*, Academia, Praha, 1990.

[Pul82] Pultr, A., *Úvod do topologie a geometrie, I*, SPN, Praha, 1982.

[Rei55] Reichbach, J., *On the completeness of the functional calculus of the first order*, Studia Logica **2** (1955), 245–250.

[Rob51] Robinson, A., *On the metamathematics of algebra*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1951.

[RS50] Rasiowa, H. a Sikorski, R., *A proof of the completeness theorem of Gödel*, Fund. Math. **37** (1950), 193–200.

[RS53] Rasiowa, H. a Sikorski, R., *Algebraic treatment of the notion of satisfiability*, Fund. Math. **40** (1953), 62–95.

[RS58] Rasiowa, H. a Sikorski, R., *On isomorphism of Lindenbaum algebras with fields of sets*, Colloquium Mathematicum **5** (1958), 143–158.

[RS63] Rasiowa, H. a Sikorski, R., *The mathematics of metamathematics*, PWN, Warszawa, 1963, 2. vyd. PWN, Warszawa, 1968; 3. vyd. PWN, Warszawa, 1970; rusky *Matematika metamatematiky*, Nauka, Moskva, 1972.

[Rub89] Rubin, M., *On the reconstruction of topological spaces from their groups of homeomorphisms*, Trans. AMS **312(2)** (1989), 487–538.

[Sie26] Sierpiński, W., *Sur une propriété des ensembles (A)*, Fund. Math. **8** (1926), 362–369.

[Sik48] Sikorski, R., *On the representation of Boolean algebras as fields of sets*, Fund. Math. **35** (1948), 247–258.

[Sik51] Sikorski, R., *A note to Rieger's paper „On free $\aleph_\xi$-complete Boolean algebras"*, Fund. Math. **38** (1951), 53–54.

[Sik60] Sikorski, R., *Boolean algebras*, Springer, Berlin, 1960, 2. vyd. Springer, Berlin, 1964; 3. vyd. Springer, Berlin, 1969; rusky *Bulevy algebry*, Mir, Moskva, 1969; španělsky *Algebras de Boole*, Universidad nacional del Sur, Bahia Blanca, 1968 (patrně zkráceno).

[Sik62] Sikorski, R., *On representation of Lindenbaum algebras*, Prace matematyczne **7** (1962), 97–105.

[Sko20] Skolem, T., *Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen*, Skrifter utgit av Videnskabsselskapet i Kristiania, I. Matematisk-naturvidenskabelig klasse, 4 (1920), 1–36.

[Sko23] Skolem, T., *Einige Bemerkung zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre*, Proc. 5th Scand. Math. Congr., 1922 (Helsinki), 1923, pp. 217–232.

[Sol66] Solovay, R.M., *New proof of a theorem of Gaifman and Hales*, Bull. AMS **72** (1966), 282–284.

[Sto36] Stone, M.H., *The theory of the representations for Boolean algebras*, Trans. AMS **40** (1936), 37–111.

[Sto37] Stone, M.H., *Topological representations of distributive lattices and Brouwerian logic*, ČPMF **67** (1937), 1–25.

[Sur73] Surma, S.J. (ed.), *Studies in the history of mathematical logic*, Wydawnictwo Polskiej Akademii Nauk, Wroclaw, 1973.

[Szc73] Szczech, W., *L. Rieger's logical achievement*, Studies in the history of mathematical logic (Surma, S.J., ed.), Wydawnictwo Polskiej Akademii Nauk, Wroclaw, 1973, pp. 261–265.

[Šeh78] Šehtman, V.B., *Rieger-Nishimura lattices*, Soviet. Math. Dokl. **19** (1978), 1014–1018.

[Tar36a] Tarski, A., *Gründzüge des Systemenkalküls, I*, Fund. Math. **25** (1936), 503–526.

[Tar36b] Tarski, A., *Gründzüge des Systemenkalküls, II*, Fund. Math. **26** (1936), 283–301.

[Tar38] Tarski, A., *Der Aussagenkalkül und die Topologie*, Fund. Math. **31** (1938), 103–134.

[Tse83] Tselkov, V., *Intuitionistic modal logics contradicting Rieger-Nishimura logics*, Proc. 12th Spring Conf. Mathematics and Education in Mathematics (Sofia), Bulgar. Akad. Nauk, 1983, pp. 133–139.

[Vak85] Vakarelov, D., *An application of Rieger-Nishimura formulas to the intuitionistic modal logics*, Studia Logica **44** (1985), 79–85, též Bull. Sect. Logic. Pol. Acad. Sci. **13** (1984), 120–124.

[Wae31] Waerden van der, B.L., *Moderne Algebra*, Springer, Berlin, 1931, 2. vyd. Springer, Berlin, 1937, 1940; Ungar Publishing Company, New York, 1943; 3. vyd. Springer, Berlin, 1950; 4. vyd. Springer, Berlin, 1959; anglicky *Modern algebra*, Ungar Publishing Company, New York, 1949–1950, 1953, 1966, 1969; rusky *Sovremennaja algebra*, OGIZ, Moskva, 1947.

[Waj38] Wajsberg, M., *Untersuchungen über den Aussagenkalkül von A. Heyting*, Wiadomości Matematyczne **46** (1938), 45–101.

[WD39] Ward, M. a Dillworth, R.P., *Residuated lattices*, Trans. AMS **45** (1939), 335–354.

[Wro76] Wroński, A., *The number of isomorphism types of subdirectly indecomposable pseudo-Boolean algebras*, Rep. Math. Logic **6** (1976), 117–119.

[Yas98] Yashin, A.D., *New solutions to Novikov's problem for intuitionistic connectives*, J. of Logic and Comp. **8(5)** (1998), 637–664.