BERNARD BOLZANO A ZÁKLADY MATEMATICKÉ ANALÝZY

Objev diferenciálního a integrálního počtu Newtonem a Leibnizem na konci 17. století otevřel matematice nové obzory a současně poskytl mocnou a pro další vývoj nepostradatelnou pomůcku rozvíjející se fyzice. Není proto divu, že nový obor matematiky, tzv. matematická analýza, který dovoloval řešení problémů, na něž dříve nebylo pomyšlení, a současně neustále stavěl před matematiky problémy nové, prodělal v následujícím 18. století bouřlivý vývoj, při kterém se matematikové, oslněni nesmírnými novými výhledy, pouštěli na daleké objevné cesty nestarajíce se přitom příliš o upevnění základů, na nichž nová nauka spočívala. Tento stav nebyl ovšem natrvalo udržitelný a v první polovici 19. století vyrostla budova matematické analýzy do takové výšky, že její další budování bylo nemyslitelné bez upevnění jejích základů. Tak dochází k období velké revize základů analýzy, které trvá asi padesát let a které je možno považovat za dovršené dílem Weierstrassovým asi okolo r. 1870; současně s touto revizí pokračuje ovšem i rozvoj ostatních směrů v matematice za neustálého vzájemného působení.

Na tomto stupni vývoje nemohla asi tato revize být provedena jinak než důslednou aritmetizací analýzy. Tato aritmetizace se v díle Weierstrassově stupňuje až k jednostrannosti, která byla později korigována moderním vývojem matematiky; ostatně se již ve zmíněném období projevuje tato dialektika ve vývoji matematiky: tak B. Riemann, který např. svou teorií integrálu přispěl podstatně k *aritmetizaci* analýzy, byl současně geniálním budovatelem *geometrické* teorie analytických funkcí.

Bylo by však omylem, odlišovat tuto revizi jako práci pouze „kritickou" například od „tvůrčího" období 18. století. Revize základů analýzy vedla nejenom k upevnění toho, co již bylo známo, ale také k objevům nových spolehlivých a obecných metod, které dovolují často shrnout v jediné větě přečetné výsledky, z nichž dříve každý vyžadoval zvláštního vyšetřování — nehledě k tomu, že taková obecná věta znamená i kvalitativně daleko vyšší stupeň poznání, než tisíc jejích speciálních případů — na které ovšem nesmíme zapomínat, nemáme-li utonout ve verbalismu. Tyto metody dávají tedy matematikovi daleko účinnější a jednodušeji ovladatelný nástroj, kterým se může pustit do mnohem obtížnějších a složitějších problémů než dříve.

Řekl jsem již, že toto velké období revize je možno považovat za skončené okolo roku 1870, kdy byly upevněny základní pojmy, souvisící s pojmem limity, a odvozeny hlavní věty o nich a kdy budova byla dovršena[1]) také vybudováním teorie reálných čísel (z různých teorií reálných čísel je u nás dosud asi nejpopulárnější Dedekindova teorie řezů). Na počátku tohoto období se pak setkáváme s naším krajanem Bernardem Bolzanem (1781—1848).

Bolzano nebyl ovšem jen matematikem a jeho mnohostranná blahodárná činnost zanechala hlubokou stopu v našem národním životě. Zde si však povšimneme pouze Bolzanova díla matematického, které tvoří velmi podstatný úsek jeho činnosti a kterému patří významné místo v dějinách matematiky; např. ve Velké sovětské encyklopedii je heslo o Bolzanovi velkou většinou věnováno právě jeho dílu matematickému. Ale ani matematickým dílem Bolzanovým se zde nebudeme zabývat v celé jeho šíři, nýbrž pouze potud, pokud se dotýká revize základů matematické analýzy. Zdá se vskutku, že tyto jeho práce svým významem nesrovnatelně převyšují jeho ostatní práce matematické, ať se týkají geometrie nebo teorie čísel.

Za života Bolzanova vyšly vlastně jen dvě nevelké, ale velmi významné jeho práce, týkající se základů analýzy: „Der binomische Lehrsatz und als Folgerung aus ihm der polynomische und die Reihen, die zur Berechnung der Logarithmen und Exponentialgrössen dienen, genauer als bisher erwiesen" z r. 1816 a „Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reele Wurzel der Gleichung liege" z r. 1817 (dále citováno jako Analytický důkaz). K nim sluší přičíst dvě práce rázu spíše filozofického, totiž „Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik, 1. Lieferung" z r. 1810, obsahující jakýsi program pro další Bolzanovu práci v matematice, a „Paradoxien des Unendlichen", sepsané r. 1847—48 a vydané po Bolzanově smrti r. 1851 F. Přihonským. Z těchto prací je nejvýznamnější Analytický důkaz, k němuž se ještě vrátíme. Všechny tyto práce zůstaly dlouho téměř neznámy a teprve dlouho po Bolzanově smrti upozornili někteří vynikající matematikové na jejich význam a od té doby byl Bolzano ceněn jako jeden z předních budovatelů základů moderní analýzy. Ale tyto práce zdaleka nevyčerpávají Bolzanovo dílo v tomto oboru. Koncem první světové války našel plzeňský profesor M. Jašek v tehdejší vídeňské dvorní knihovně v Bolzanově pozůstalosti rozsáhlý rukopis, který byl potom r. 1930 vydán Královskou českou společností nauk pod názvem „Functionenlehre". Vydání je opatřeno výraznou předmluvou prof. K. Petra a pečlivými poznámkami prof. K. Rychlíka. V tomto díle jsou ve dvou oddílech (o spojitosti a o derivaci) uplatněny systematicky zásady, kterých Bolzano užil ve speciálním případě v Analytickém důkazu. Toto dílo, dokončené asi r. 1831—34, obsahuje mnohé základní poznatky, které byly znovu objeveny až po desítiletích. Maně se vtírá otázka, jak by se byl změnil vývoj analýzy, kdyby toto Bolzanovo dílo bylo publikováno včas. Dnes, kdy se více než kdy jindy zamýšlíme nad naší kulturní národní tradicí, je snad na místě připomenout, co dlužíme velkému dílu Bolzanovu.

---

[1]) „Dovršena" směrem dolů: logicky je teorie reálných čísel počátkem, na kterém budujeme analýzu v reálném oboru; historicky vznikla na konci tohoto období, neboť při revizi základů se šlo od „povrchu" do hloubky.

Moje následující poznámky nezamýšlejí nic více, než znovu upozornit na závažnost díla Bolzanova a na některé problémy, které se mohou vyskytnout při jeho hodnocení.

Řekli jsme již, že první práce Bolzanovy z tohoto oboru (Binomická poučka a Analytický důkaz z let 1816 a 1817) stojí na samém počátku období revize základů analýzy. Mezi jeho velkými současníky najdeme několik, kteří ve svých pracích na různých místech přispěli k spolehlivému vybudování základů analýzy, ale systematicky nalézáme tyto otázky v oné době zpracovány snad jen u A. Cauchyho v jeho „Cours d'Analyse" (1821), „Résumé des leçons ... sur le Calcul Infinitésimal" (1823), „Leçons sur le Calcul différentiel" (1829). Bolzanův Analytický důkaz je tedy starší; naproti tomu později se Bolzano s Cauchyovými díly seznámil a ve své „Functionenlehre" je cituje. Ale mezi oběma velkými vědci je podstatný rozdíl. Cauchy je především matematik (a to jeden z největších matematiků všech dob), který se zabývá základními otázkami především jen potud, pokud je k dalším vývodům potřebuje. Naproti tomu je Bolzano současně filozof. Sám praví, že matematika jej především zajímá jako odvětví filozofie a cvičení ve správném myšlení. Tato okolnost se zřetelně obráží v jeho díle. Především jde v rozboru základních pojmů, ve studiu jejich vzájemných vztahů a ve snaze o přesnost důkazů dále než Cauchy. Za druhé po stránce čistě „odbornické" není Bolzano dost zkušeným a obratným matematikem. Jaký vliv měl tento nedostatek na jeho dílo, ukáži později na příkladech.[2])

Proberme nyní jeho Analytický důkaz, jakožto nejvýznamnější z Bolzanových děl, týkajících se základů analýzy a vydaných za jeho života. Věta, které je toto pojednání věnováno, je tato: Jestliže funkce spojitá v uzavřeném intervalu nabývá v krajních bodech tohoto intervalu hodnot různého znamení, je tato funkce aspoň v jednom vnitřním bodě intervalu rovna nule.

Bolzano uvádí tuto větu ve tvaru trochu zkomplikovaném (zbytečně): jsou-li f, g dvě funkce spojité v uzavřeném intervalu $[a, b]$ a je-li $f(a) < g(a), f(b) > g(b)$, existuje uvnitř tohoto intervalu aspoň jedno číslo x tak, že $f(x) = g(x)$. Tato věta je velmi plauzibilní z „názoru": spojitá čára, která probíhá částečně pod osou úseček, částečně nad ní, musí ji někde protnout. Ale Bolzano správně zdůrazňuje: to nestačí, je nutno tuto větu dokázat jakožto důsledek definice spojitosti. Spojitost pak definuje Bolzano v podstatě stejně, jako to učinil Cauchy o něco později. Následuje důkaz této věty. Bolzano předně uvádí nutnou a postačující podmínku pro konvergenci posloupnosti, tzv. *podmínku Bolzanovu-Cauchyovu*, kterou uvádí také Cauchy o čtyři roky později. Ale Bolzano jde dále než Cauchy a pokouší se o důkaz postačitelnosti této podmínky. Místo důkazu podává ovšem vlastně jen úvahu, která činí postačitelnost této podmínky plauzibilní – tak to musilo dopadnout, ježto důkaz této věty spočívá na teorii reálných čísel, která byla vybudována až asi o padesát let později.

---

[2]) Za třetí se do Bolzanova díla někdy přimísily nejasné metafyzické prvky a zmařily jeho úctyhodnou snahu. Na štěstí se tato výhrada netýká jeho prací o základech analýzy, kde obor reálných čísel (ač jeho teorie tehdy nebyla řádně vybudována) mu dával dostatečně spolehlivou základnu.

Ale již pouhé vyslovení této krajně důležité věty, v němž má Bolzano prioritu před Cauchym, svědčí o pronikavosti jeho pohledu na základní otázky analýzy. Bolzano zde také dokazuje, že posloupnost může mít jen jednu limitu; bylo by snad zajímavé zjistit, kdo kromě Bolzana si první uvědomil, že tuto větu je nutno dokázat (což je ovšem velmi snadné).

V dalším odstavci dokazuje Bolzano užitím Bolzanovy-Cauchyovy podmínky tuto větu: Jestliže všechna čísla menší než jisté číslo u mají vlastnost M a jestliže existuje aspoň jedno číslo, které nemá vlastnost M, potom existuje číslo U, které je největší ze všech čísel v, jež mají tu vlastnost, že každé číslo menší než v má vlastnost M. Rozebereme-li toto souvětí, vidíme, že Bolzano zde dokazuje větu o infimu (neboli o dolní hranici): číslo U je totiž právě infimem oněch čísel, jež nemají vlastnost M. Pro Bolzanův smysl pro poměrnou důležitost matematických vět svědčí důraz, se kterým v následujícím odstavci upozorňuje na fundamentální důležitost této věty. Hlavní větu dokazuje pak Bolzano v § 15 – stručně řečeno – takto: budiž x infimum oněch čísel y intervalu $[a, b]$, pro něž je $f(y) \geqq g(y)$; potom se lehko dokáže, že $f(x) = g(x)$. Nato dokazuje v § 17 spojitost mnohočlenu, což mu dává možnost, aby v § 18 použil věty z § 15 na případ rovnice $P(x) = 0$, kdy P je polynom.

Až na nezdar (tehdy nutný) v důkazu postačitelnosti Bolzanovy-Cauchyovy podmínky jsou všechny detaily Bolzanova důkazu správné, některé zbytečné komplikace však svědčí o nedostatku matematické zručnosti. Tak v § 15 z neznámých důvodů rozlišuje Bolzano zcela zbytečně několik případů podle znamení čísel a, b a tím značně komplikuje důkaz. Další zbytečné komplikace jsou v § 18, ty však možná souvisí s prvním odstavečkem důkazu v § 15, jehož smysl mně zůstává nejasný (ale celkem je tento odstaveček zbytečný, takže jeho nejasný smysl nevadí). Ale to všechno je jen neobratnost, nikoliv nesprávnost. Horší je to v § 16, který na štěstí nemá pro ostatní obsah práce význam. Tam totiž Bolzano tvrdí, že za předpokladů uvedených v hlavní větě má rovnice $f(x) = g(x)$ v intervalu $[a, b]$ lichý počet kořenů. Přitom Bolzano zřejmě počítá každý kořen jen jednou, i když jde o tzv. kořeny mnohonásobné. Věta je ovšem zřejmě nesprávná. Všimneme-li si, že tento odstavec, nadepsaný Anmerkung, je stylizován poněkud zběžně – takže působí dojmem ne zcela promyšlené improvizace – a uvážíme-li novost a nezvyklost Bolzanových metod, nepodivíme se příliš, že se zde dopustil chyby. Ale pozoruhodné je, že si dodatečně neuvědomil nesprávnost svého tvrzení, které by každý matematický rutinér vyvrátil nejjednoduššími příklady.

Snad tento stručný rozbor Bolzanovy práce dost jasně ukazuje jeho aritmetizující stanovisko, jeho výjimečný smysl pro otázky základů matematické analýzy a hloubku jeho důkazových metod, současně však také jeho podivuhodnou neobratnost v používání nástrojů matematického řemesla.

Obraťme se nyní k Bolzanově „Functionenlehre", vydané r. 1930. Toto asi o patnáct let pozdější dílo se zabývá rovněž základními otázkami analýzy, ale na vyšším stupni vývoje. Nejznámějším výsledkem tohoto díla je skvělý Bolzanův příklad spojité funkce, která v žádném bodě jisté množiny všude husté nemá konečnou derivaci. (Dnes víme, že tato funkce nemá derivaci v žádném bodě vůbec, ale Bolzano to nedokázal a také to nikde netvrdí.) Uvědomíme-li si, že první příklad spojité funkce, nemající derivaci v žádném bodě, uveřejnil

Weierstrass r. 1875 [3]) (podle H. A. Schwarze uváděl Weierstrass tento příklad ve svých přednáškách již dříve, od r. 1861), pochopíme, jaký rozruch vyvolala Jaškova zpráva o objevení této funkce, známé nyní pod jménem „*Bolzanova funkce*“, v Bolzanových rukopisech.

Ale bylo by velmi nesprávné, kdybychom význam „Functionenlehre“ viděli jen v této oslňující podrobnosti, v Bolzanově funkci. Zdá se mi, že hlavní její význam je v tom, že podává systematický výklad nauky o spojitosti a o derivaci funkcí jedné reálné proměnné.[4]) Tyto partie knihy jsem rozebral dost obšírně v článku „Bolzanova Functionenlehre“ (viz v této publikaci str. 39–59 – pozn. red.), ovšem jen po stránce odborné, ponechávaje definitivní hodnocení vědomě historikům matematiky. Omezím se proto jenom na několik zásadních poznámek, ilustrovaných příklady. Všimněme si např. Bolzanových úvah o spojitosti. Definice spojitosti je zde podána formálně dokonaleji než v Analytickém důkazu; mimoto zde Bolzano definuje spojitost v bodě (též zprava a zleva), kdežto dřívější definice (v Analytickém důkazu i u Cauchyho) mluvily pouze o spojitosti v intervalu. A nyní následuje teorie spojitých funkcí jedné proměnné, vyvozená přísně deduktivně z této definice. Tato teorie jde pak dvěma hlavními směry.

Především dokazuje Bolzano obecné věty o spojitých funkcích, tj. odvozuje vlastnosti, které lze dedukovat ze spojitosti funkce. Zde se především vyskytuje opět hlavní věta z Analytického důkazu, kterou mezitím dokázal také Cauchy (1821), a to se zjednodušeným důkazem, vedle ní však také řada nových vět, z nichž např. uvádím fundamentální větu o existenci největší a nejmenší hodnoty spojité funkce v uzavřeném omezeném intervalu. Důkazy jsou velmi systematicky vybudovány hlavně na dvou větách: jednak na větě o infimu, se kterou jsme se už setkali v Analytickém důkazu, jednak na větě: každá omezená posloupnost má hromadný bod. Zde pak stojíme před zajímavou otázkou: Rychlík ve svých poznámkách k „Functionenlehre“ uvádí, že tuto větu nelze nalézt v žádné z Bolzanových prací, tištěných před rokem 1930. A přece se této větě již předtím zhusta říkalo „*věta Bolzanova-Weierstrassova*“ – jak se tam jméno Bolzanovo dostalo?

Bolzano tedy zde především dokazuje řadu základních vět o spojitých funkcích, které vesměs potvrzují to, co nám povrchní názor napovídá, a které tvoří nutný podklad pro další studium spojitých funkcí. Ale Bolzano studuje pojem spojitosti ještě v jiném, řekl bych opačném směru: ukazuje, že existují funkce, mající jisté nečekané „paradoxní“ vlastnosti (dnes ovšem na těchto vlastnostech nevidíme již nic paradoxního). Tak sestrojuje např. hned na počátku funkci, která je spojitá právě v jednom bodě. Nejskvělejším příkladem je ovšem Bolzanova funkce, která je spojitá a přitom, jak Bolzano dokazuje, není monotonní v žádném

---

[3]) Přesněji řečeno: Weierstrassův příklad otiskl P. du Bois-Reymond v jedné své práci v časopise Journal für die reine und angewandte Mathematik, 79 (1875), str. 29–31.

[4]) Poznamenávám, že partie o derivaci, vyžadující více technické zběhlosti, obsahují více vadných míst, než partie o spojitosti. Mimoto obsahuje kniha též vývody o funkcích několika proměnných; ale tyto partie jsou technicky příliš složité a proto trpí u Bolzana mnoha nedostatky.

intervalu a nemá konečnou derivaci v žádném bodě jisté množiny všude husté. Kdežto tedy první směr vyšetřuje vlastnosti, které se vyskytují u všech spojitých funkcí, vyšetřuje tento druhý směr konstrukcí vhodných příkladů otázku, které vlastnosti se vyskytují aspoň u některých spojitých funkcí, tj. vyšetřuje rozsah pojmu spojitosti.[5]) Zdá se mi, že v tomto směru nebylo před Bolzanem vykonáno téměř nic. Není proto snad přehnané, nazveme-li Bolzana předchůdcem moderní obecné teorie reálných funkcí. Bylo by zajímavé, srovnat jeho dílo s vývojovou linií poněkud pozdější, danou jmény P. G. Lejeune Dirichlet — B. Riemann — H. Hankel.

Ptáme-li se, bylo-li dílo Bolzanovo v matematické analýze dostatečně zhodnoceno, musíme odpovědět záporně. Jeho Analytický důkaz i Paradoxy byly znovu vydány, a to s kritickými poznámkami. O jakési celkové hodnocení se pokusil r. 1881 O. Stolz (B. Bolzanos Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung, Mathematische Annalen 18 (1881), str. 225—279) — ovšem bez znalosti „Functionenlehre" nemůže toto hodnocení být ani zdaleka úplné a i jinak mohou být k Stolzovu článku výhrady.

Vydání „Functionenlehre" z r. 1930 je opatřeno, jak jsem již řekl, předmluvou K. Petra a poznámkami K. Rychlíka. Zmínil jsem se již o instalační řeči Petrově i o svém článku. Velmi cenná jsou sdělení objevitele Bolzanova rukopisu M. Jaška, ale jeho hodnotící poznámky je po stránce matematické nutno číst velmi kriticky. Vše to nelze však považovat za celkové hodnocení Bolzanova díla v základech analýzy.

Ti, kteří budou hodnotit kriticky Bolzanovo dílo, budou postaveni před mnoho obtíží. Především bylo hlavní Bolzanovo dílo o analýze vydáno až asi osmdesát let po jeho smrti a také ostatní jeho práce o analýze zůstaly za jeho života málo známy, takže zde schází přímý vliv na současníky, jehož sledování může pomoci v hodnocení díla.

Uvedl jsem již, že Bolzano sám říká, že se o matematiku zajímá hlavně jako o odvětví filozofie a cvičení v správném myšlení. Proto bude pro hodnocení Bolzanova díla nutno — a to se mně zdá být obzvláště těžkým úkolem — nalézt vztah mezi jeho filozofickými názory a jeho matematickým dílem. Zdá se mi, že Bolzano byl plně úspěšným tam, kde jeho zájem byl sice vzbuzen filozofickými úvahami, jež ho vedly k volbě programu a metody, kde se však při realizaci programu obešel bez úvah čistě filozofických a mohl pracovat jen na matematické bázi — jak je tomu právě v jeho pracích o základech analýzy. Naproti tomu tam, kde přímo používá některých svých metafyzických představ — jako např. v geometrii — nedosahuje Bolzano plného úspěchu právě tak jako na druhé straně tam, kde je třeba mnoha

---

[5]) Tyto dva směry zdůrazňuje také K. Petr ve své významné instalační rektorské řeči „Bernard Bolzano a jeho význam v matematice" (1926). Petr je ilustruje na dvou příkladech: Hlavní věta z Analytického důkazu je obecná věta, která potvrzuje domněnku, k níž nás vede povrchní názor; ale názor nás vede také k domněnce, že každá spojitá křivka má všude až na izolované body tečnu — a Bolzanova funkce je překvapujícím (dnes již ovšem nikoliv) příkladem funkce, která tuto domněnku vyvrací.

znalostí a schopností specificky odborně-matematických. Snad je tento soud ukvapený — ale uvedu aspoň jeden příklad, který se zdá svědčit pro jeho správnost.

Ve svých „Paradoxech“ uvádí Bolzano (s velkým důrazem) okolnost, že množina M všech čísel mezi nulou a pěti a množina N všech čísel mezi nulou a dvanácti jsou, jak dnes říkáme, ekvivalentní; to znamená, že čísla množiny M lze vzájemně jednoznačně přiřadit číslům množiny N — např. tím, že každému číslu x mezi nulou a pěti přiřadíme číslo $12x/5$, ležící ovšem mezi nulou a dvanácti. Tohoto pojmu ekvivalence si o mnoho později znovu všiml G. Cantor a vybudoval na něm svou geniální teorii kardinálních čísel. Naproti tomu Bolzano, místo aby se touto ekvivalencí dále zabýval, soudí asi takto: Tyto dvě množiny jsou sice ekvivalentní, ale přitom je jedna částí druhé, tedy nemohou mít touž „Vielheit“ — a z toho Bolzano zřejmě usuzuje, že pojem ekvivalence není u nekonečných množin závažný pro posouzení jejich „Vielheit“ a dále se ekvivalencí nezabývá. To, že Bolzano odhodil důležitý pojem ekvivalence, sotva jej nalezl, bylo patrně způsobeno nejasnými obrysy pojmu „Vielheit“ a tím, že Bolzano nevhodně použil metafyzických představ o poměru mezi „částí“ a „celkem“.

Bolzanovy věty ze základů analýzy jsou dnes nezbytnou součástí odborně-technické výzbroje každého matematika a přednášejí se v úvodních kurzech analýzy na každé univerzitě, ale ve své době byly zároveň velkým činem filozofickým, ideologickým: jsou plodem nového nazírání na základní otázky matematiky, které ze všech současníků se v nejvyspělejší formě vyskytuje právě u Bolzana. Bylo třeba postavit se na nové stanovisko a stát na něm důsledně i tehdy, vedlo-li k nečekaným, zdánlivě třeba i paradoxním důsledkům. V tom se Bolzano poněkud podobá Lobačevskému; před pokřikem omezenců jej ochránilo asi jen to, že jeho „Functionenlehre“ nebyla publikována.

Uvedu aspoň jeden příklad. Jak uvádí M. Jašek, předložil Bolzano rukopis své „Functionenlehre“ svému oblíbenému žáku A. Slivkovi ze Slivic; v Bolzanově pozůstalosti je pak zachována obšírná kritická odpověď Slivkova. V ní polemizuje Slivka s Bolzanem a praví mj., že považuje za dokazatelnou větu, že každá spojitá funkce má derivaci všude až na izolované body. Zde se setkáváme s podivuhodným dokladem houževnatosti předsudků v lidských myslích: Slivka vidí před sebou konstrukci Bolzanovy funkce — a přece nevěří v její existenci, protože odporuje dosavadním (vědecky nepodloženým) představám.[6]) Ostatně se setkáváme — právě při této otázce — s podobným případem o mnoho let později. Znamenitý francouzský matematik Ch. Hermite (neznající ovšem Bolzanovu funkci) zmiňuje se v jednom dopise Stieltjesovi o Weierstrassově spojité funkci, nemající nikde derivaci. Nepopírá ovšem její existenci — na to byl příliš dobrým matematikem — ale píše, že se „odvrací s hrůzou“ od této žalostné rány spojitých funkcí, nemajících derivaci. A toto mínění sdíleli i jiní velcí

[6]) O tom, jak Bolzano musil někdy sám v sobě bojovat se starými hledisky, zdá se svědčit jeho výklad o rozlišování funkcí prvního a druhého druhu; viz o tom na str. 53. K případu Slivkovu poznamenávám ještě: je pravda, že v Bolzanových úvahách o jeho funkci je jedna neúplnost; považuji však za vyloučené, že by si jí Slivka byl všiml.

matematikové z druhé poloviny 19. století, kteří se domnívali, že podobné úvahy o základech analýzy mohou jenom rozleptat krásnou budovu matematiky.[7]) Neměli ovšem pravdu; smělé přezkoumání základů analýzy zničilo pouze předsudky předešlého období a tím urovnalo půdu, na které se tyčí budova moderní matematiky[8]), mezi jejímiž předchůdci jedno z prvních míst — časově i významem — patří našemu Bernardu Bolzanovi.

Lehrsatz. Wenn eine Reihe von Größen

$$\overset{1}{F}x, \overset{2}{F}x, \overset{3}{F}x, \ldots, \overset{n}{F}x, \ldots, \overset{n+r}{F}x, \ldots$$

von der Beschaffenheit ist, daß der Unterschied zwischen ihrem nten Gliede $\overset{n}{F}x$ und jedem späteren $\overset{n+r}{F}x$, sey dieses von jenem auch noch so weit entfernt, kleiner als jede gegebene Größe verbleibt, wenn man n groß genug angenommen hat: so gibt es jedesmahl eine gewisse *beständige Größe*, und zwar nur *eine*, der sich die Glieder dieser Reihe immer mehr nähern, und der sie so nahe kommen können, als man nur will, wenn man die Reihe weit genug fortsetzt.

Lehrsatz. Wenn eine Eigenschaft M nicht *allen* Werthen einer veränderlichen Größe x, wohl aber *allen*, die *kleiner* sind, als ein gewisser u, zukömmt: so gibt es allemahl eine Größe U, welche die größte derjenigen ist, von denen behauptet werden kann, daß alle kleineren x die Eigenschaft M besitzen.

Dvě věty z Bolzanova díla „Rein analytischer Beweis...“

---

[7]) Je pravda, že existence takové „paradoxní“ funkce, jako je funkce Bolzanova nebo Weierstrassova, musila na první pohled působit spíše jako výstražný signál, ale v dalším vývoji vědy vede přirozeně k otázkám: O kterých třídách funkcí lze tvrdit, že mají „skoro všude“ derivaci? A jaký přesný smysl máme dát slovům „skoro všude“? Kdo zná trochu moderní teorii reálných funkcí, ví, k jak závažným výsledkům vedly tyto otázky.

[8]) Viz např. velmi výraznou předmluvu ke knize S. Saks, Théorie de l'intégrale, Varšava 1933.