I. Ueber den Begriff der Mathematik und ihre Eintheilung.

§. 1.

Das älteste und gewisser Maßen noch immer unübertroffene Lehrbuch der Mathematik, die Elemente des Euklides, enthalten bekanntlich gar keine Erklärung der Wissenschaft, von der sie handeln. Ob ihr unsterblicher Verfasser dieses aus einer Art von Eigensinn gethan, oder weil er es nicht der Mühe werth gehalten, oder weil er uns keine vollgültige Erklärung zu geben gewußt hat: das wage ich nicht zu entscheiden. — Dagegen in allen neuern Lehrbüchern der Mathematik wird die Erklärung aufgestellt: „Die Mathematik sey die Wissenschaft der Größen.“ Diese Erklärung hat schon Kant in seiner Kritik der reinen

A Ver-

Vernunft (s. die zweyte Auflage S. 742.) getadelt, weil durch dieselbe, wie er sagt, „kein wesentliches Kennzeichen der Mathematik angegeben, wie auch die Wirkung für die Ursache genommen werde."

§. 2.

Begreiflich kömmt hiebey alles darauf an, was jemand unter dem Worte Größe verstehe. Da stellt nun der ungenannte Verfasser des Buches: Versuch das Studium der Mathematik durch Erläuterung einiger Grundbegriffe und durch zweckmäßigere Methoden zu erleichtern. Bamberg u. Würzburg 1805. (S. 4.) folgende Erklärung der Größe auf: „Eine Größe ist etwas, das ist, und durch irgend einen Sinn wahrgenommen werden kann. Diese Erklärung ist immer Eines von beyden, entweder zu weit, oder zu enge; je nachdem der Verfasser die Worte: ist und wahrgenommen werden kann entweder in ihrem weitesten Verstande, wo

sie

sie eine bloß idealische Existenz und eine Möglichkeit gedacht zu werden bedeuten, oder in ihrem engern und eigentlichen Verstande nimmt, in welchem sie nur von einem wirklich existirenden, sinnlichen Gegenstande gelten. Im ersten Falle wäre Größe; jedes gedenkbare Ding ohne Ausnahme; und wenn wir dann die Mathematik als die Wissenschaft der Größen erklärten, so würden wir im Grunde alle Wissenschaften in das Gebiet dieser Einen ziehen. Im zweyten Falle dagegen wären nur sinnliche Gegenstände Größen, und das Gebiet der Mathematik würde dann offenbar zu sehr beengt, weil doch auch übersinnliche Dinge, z. B. Geister und geistige Kräfte ein Gegenstand der Mathematik, und insbesondere der Rechenkunst werden können.

§. 3.

Doch in der That ist diese Erklärung der Größe (§. 2.), man mag sie nun so oder anders auslegen, dem Sprachgebrauche ganz zuwider. Auch habe ich ihrer hier nur erwähnt, um in der Folge daraus zu zeigen, daß auch schon diesem Verfasser eine gewisse mir wahrscheinende Idee, obgleich nur dunkel, vorgeschwebt habe. Wollen wir uns von dem Sprachgebrauche nicht allzu weit entfernen (was wir allerdings auch in den Wissenschaften nicht ohne Noth thun sollten); so müssen wir unter Größe ein Ganzes, in wie fern es aus mehreren gleichen Theilen besteht, oder noch allgemeiner, etwas, welches durch Zahlen bestimmt werden kann, verstehen. Diese Bedeutung des Wortes Größe vorausgesetzt, ist die gewöhnliche Erklärung der Mathematik, als einer Wissenschaft der Größen, freylich mangelhaft, und zwar zu enge. Denn allein und in abstracto wird die Größe nur in der reinen allgemeinen Mathesis, d. h. in der Logistik oder der Arithmetik, betrachtet, erschöpft aber den Inhalt nicht einmahl dieser Wissenschaft. So kömmt in vielen Aufgaben der Combinationslehre (dieses so wichtigen Theiles der allgemeinen Mathesis) der Begriff der Größe oder einer Zahl nicht einmahl vor;

z. B.

z. B. wenn man die Frage aufwirft: welche — (nicht wie viele) — Versetzungen die gegebenen Dinge a, b, c, . . zulassen? In den besondern Theilen der Mathematik, der Chronometrie, Geometrie, u. a. kömmt allenthalben, wie schon die Nahmen erinnern, nebst dem Begriffe der Größe, noch irgend ein anderer Gegenstand (z. B. die Zeit, der Raum, u. s. w.) vor, auf welchen der erstere bloß häufig angewendet wird; so zwar, daß es in allen diesen Disciplinen mehrere Grund- und Lehrsätze gibt, in welchen der Begriff der Größe gar nicht enthalten ist. So muß z. B. in der Chronometrie der Satz: daß alle Augenblicke — in der Geometrie jener: daß alle Puncte einander ähnlich sind, aufgestellt werden; in welchen Sätzen der Begriff einer Größe oder Zahl ganz und gar nicht enthalten ist, welche daher in der Mathematik nicht einmahl aufgestellt werden dürften, wenn sie bloß eine Wissenschaft der Größen wäre.

§. 4.

Aber nicht so leicht, als es uns ward, die bisher gewöhnliche Erklärung zu tadeln und zu verwerfen, dürfte es uns werden, eine bessere an ihre Stelle zu setzen. Wir haben vorhin bemerkt, daß jene besondern Gegenstände, die in den einzelnen Theilen der Mathematik noch neben dem Begriffe der Größe vorkommen, von einer solchen Beschaffenheit sind, daß dieser letztere leicht auf sie angewendet werden kann. Dieses könnte vielleicht auf den Gedanken führen, die Mathematik als eine Wissenschaft von solchen Gegenständen zu erklären, auf welche der Begriff der Größe besonders anwendbar ist. Und wirklich scheint es, daß selbst diejenigen, welche die (§. 1.) angeführte Erklärung annahmen, im Grunde nichts anders als dieses verstanden haben wollten. Allein bey einer genauern Betrachtung zeigt es sich, daß auch selbst diese Erklärung verwerflich sey. Anwendbar ist einmahl der Begriff der Größe durchaus auf alle Gegenstände, selbst auf Gedankendinge. Wollte

man

man also die bloße Anwendbarkeit des Größenbegriffs auf einen Gegenstand als einen hinreichenden Grund betrachten, die Lehre von demselben den mathematischen Disciplinen beyzuzählen; so würde man in der That alle Wissenschaften zur Mathematik zählen müssen, z. B. auch jene, worin der Satz erwiesen wird: daß es nur vier (oder wie Platner richtiger lehrt, nur zwey) syllogistische Figuren gebe; ingleichen jene, die lehrt: daß es nicht mehr, noch weniger als viermahl drey reine einfache Verstandesbegriffe (Kategorien) gebe; u. s. w. Man müßte also, um diese Erklärung dennoch zu retten, nur noch den Unterschied der öfteren oder seltenern Anwendbarkeit berücksichtigen, d. h. nur jene Gegenstände zur Mathematik zählen, auf welche sich der Begriff der Größe oft und vielfach anwenden läßt. Aber wer sieht nicht, daß dieses eine höchst schwankende, und gar nicht wissenschaftliche Grenzenbestimmung des mathematischen Gebietes gäbe? Wir müssen uns also nach einer bessern Erklärung umsehen.

§. 5.

§. 5.

Die kritische Philosophie scheint uns eine solche zu versprechen. Sie glaubt zwischen den beyden Hauptclassen aller menschlichen Erkenntnisse a priori, der philosophischen und mathematischen, einen bestimmten und charakteristischen Unterschied darin entdekt zu haben, daß die mathematische Erkenntniß alle ihre Begriffe in einer reinen Anschauung adäquat darzustellen, d. h. zu construiren und eben deßhalb auch ihre Lehrsätze zu demonstriren vermöge; dagegen die philosophische Erkenntniß, ermangelnd aller Anschauung, mit bloßen discursiven Begriffen sich begnügen müsse. Sonach werde das Wesen der Mathematik am eigenthümlichsten durch die Erklärung ausgedrückt: daß sie eine Vernunftwissenschaft aus Construction der Begriffe sey. (S. Kants Kritik d. r. V. S. 712.) — Diese Erklärung haben denn auch wirklich mehrere Mathematiker, welche der kritischen Philosophie anhängen, unter andern auch der um die Begründung der

rei-

reinen Mathematik so wohl verdiente Schultz in seinen Anfangsgründen der reinen Mathesis. Königsberg. 1791. aufgenommen.

§. 6.

Ich meines Theils will nur gleich offenherzig bekennen, daß ich mich bis zur Stunde — wie von der Wahrheit so mancher anderen Lehren der kritischen Philosophie — so insbesondere auch von der Richtigkeit der Kantischen Behauptungen über die reinen Anschauungen und über das Construiren der Begriffe durch sie, nicht habe überzeugen können. Ich glaube noch immer, daß schon in dem Begriffe einer reinen (d. h. a priorischen) Anschauung ein innerer Widerspruch liege; und noch weit weniger kann ich mich überreden, daß der Begriff der Zahl nothwendig in der Zeit construirt werden müsse, und daß sonach die Anschauung der Zeit zur Arithmetik wesentlich gehöre. Da ich im Anhange zu dieser Abhandlung ein Mehreres hierüber sage; so begnüge ich mich, hier nur hinzuzufügen,

gen, daß es der selbstdenkenden Köpfe in Deutschland doch manche und wohl gar viele gibt, welche mit diesen Behauptungen Kants eben so wenig einverstanden sind, als ich. Selbst Einige, die jener Kantischen Erklärung anfangs geneigt gewesen, fanden sich in der Folge genöthigt, sie wieder zu verlassen. Hieher gehört z. B. H. Michelsen in seinen Beyträgen zur Beförderung des Studiums der Mathematik. Berlin. 1790. S. I. B. 5. Stück.

§. 7.

Aber belehrender, als was H. M. in dieser Abhandlung sagt war mir, was ich in der allgemeinen Leipz. Litteratur-Zeitung. (1808 Jul. St. 81) antraf. Der gelehrte H. Rec. tadelt die so gewöhnliche Erklärung der Mathematik, als einer Wissenschaft der Größen, und sagt hierauf: „Die Größe ist nur darum Gegenstand der Mathematik, weil sie die allgemeinste Form ist, endlich zu seyn, die Mathematik aber, ihrer Natur nach, eine allgemeine Formenlehre ist; und zwar Arithmetik, in

so

so fern sie die Größe, als die allgemeine Form endlicher Dinge, Geometrie, in so fern sie den Raum als die allgemeine Form der Natur; Zeitlehre, in so fern sie die allgemeine Form der Kräfte; Bewegungslehre, in so fern sie die allgemeine Form der im Raum wirkenden Kräfte betrachtet.“ — Ich weiß nicht, ob ich diese Erklärungen ganz nach dem Sinne ihres Erfinders verstehe; aber so viel muß ich bekennen, sie halfen mir folgende Erklärung und Eintheilung der reinen Mathematik, die ich nach ihrem Hauptgrundrisse schon vorher entworfen hatte, noch mehr ausbilden und entwickeln.

§. 8.

Ich denke also, daß man die Mathematik am besten als eine Wissenschaft erklären könnte, die von den allgemeinen Gesetzen (Formen) handelt, nach welchen sich die Dinge in ihrem Daseyn richten müssen. Unter dem Worte Dinge begreife ich hier nicht bloß solche, welche ein objectives, von unserem Bewußtseyn unabhängiges

giges Daseyn besitzen, sondern auch solche, die bloß in unsrer Vorstellung existiren, und dieses zwar wieder entweder als Individuen (d. i. Anschauungen), oder als bloße allgemeine Begriffe; mit einem Worte also — alles, was überhaupt ein Gegenstand unsers Vorstellungsvermögens werden kann. Sage ich ferner, die Mathematik handle von den Gesetzen, nach welchen sich diese Dinge in ihrem Daseyn richten; so zeiget dieß an, daß unsre Wissenschaft sich nicht mit dem Beweise des Daseyns dieser Dinge, sondern nur ganz allein mit den Bedingungen ihrer Möglichkeit beschäftige. Und indem ich diese Gesetze allgemeine nenne, so gebe ich zu verstehen, daß sich die Mathematik niemahls mit einem einzelnen Dinge als Individuo, sondern allezeit mit ganzen Gattungen befasse. Diese Gattungen können indessen freylich bald höhere, bald niedere seyn; und darauf wird sich eben die Eintheilung der Mathematik in einzelne Disciplinen gründen.

§. 9.

§. 9.

Zu enge wird man die hier gegebene Erklärung wohl nicht finden; denn sie umfaßt offenbar alles, was man in das Gebiet der Mathematik bisher nur immer gezählt hat. Desto mehr befürchte ich aber, daß man sie etwa *zu weit* finden, und ihr den Vorwurf machen dürfte, daß sie der *Philosophie* (der Metaphysik) zu wenig übrig lasse. Diese wird nähmlich durch meine Erklärung nur noch auf das einzige Geschäft eingeschränkt, das *wirkliche Daseyn* gewisser Gegenstände aus apriorischen Begriffen zu beweisen. (1 Mathematik und Metaphysik, die beyden Hauptbestandtheile unserer apriorischen Erkenntnisse, wären einander nach dieser Erklärung dergestalt entgegen gesetzt, daß *erstere* die allgemeinen Bedingungen abhandelte, unter welchen das Daseyn der Dinge *möglich* wird; die letztere dagegen versuchte, die *Wirklichkeit* gewisser Gegenstände (als etwa der Freyheit, Gottes und der Unsterblichkeit der Seele) *a priori* zu beweisen; oder mit andern Worten, *jene* beschäftigte sich

mit

mit der Frage: wie müssen Dinge beschaffen seyn, die möglich seyn sollen? diese würfe die Frage auf: welche Dinge sind wirklich — und zwar (weil sie dieß a priori beantworten soll) — mit Nothwendigkeit wirklich? Oder noch kürzer, die Mathematik würde von der hypothetischen, *) die Metaphysik von der absoluten Nothwendigkeit handeln.

§. 10.

Wenn ich auf irgend einen mir bisher neuen Gedanken verfalle, pflege ich mir allezeit die Frage vorzulegen, „ob denn noch niemand vor mir dieselbe Ansicht gehabt habe?" Finde ich dieß, so gewinnt natürlich auch meine Ueberzeugung. Was nun die obige Erklärung anlangt, so

*) Obgleich nicht alle ihre Sätze diese hypothetische Form besitzen, weil die Bedingung, besonders in der Chronometrie und Geometrie, wo sie bey allen Sätzen dieselbe ist, stillschweigend übergangen wird.

so brauche ich es nicht erst zu sagen, wie so ganz nahe das, was der scharfsinnige Hr. Rec. (§. 7.) gesagt hat, mit meiner Darstellung zusammentrifft, wofern es nicht vollends auf Eines hinausläuft. Aber auch dem Verfasser des Buches (§. 2.) scheint diese Idee, obschon nur dunkel, vorgeschwebt zu haben. Denn indem er die Größe, oder den Gegenstand der Mathematik, als das, was ist, erklärte; so scheint er wohl gefühlt zu haben, daß sich die Mathematik mit allen Formen der Dinge, nicht bloß mit ihrer Zusammensetzbarkeit aus gleichen Theilen (der Zählbarkeit) beschäftige. — Kant erkläret die reine Naturwissenschaft, (welche man doch von jeher unter dem Nahmen der Mechanik als einen Theil der Mathematik angesehen hat), als eine Wissenschaft von den Gesetzen, unter welchen das Daseyn der Dinge (der Phänomena) stehet. Durch diese Erklärung kann man sehr leicht auf unsre oben angegebene geleitet werden. Zeit und Raum sind nähmlich gleichfalls zwey Bedingungen, unter welchen das Daseyn der Erscheischeinungsdinge stehet; die Chrono- und Geometrie also, welche die Eigenschaften dieser beyden Formen in abstracto betrachten, handeln ebenfalls, obgleich nur mittelbarer Weise, von den Gesetzen, unter welchen das Daseyn der Dinge (nähmlich der sinnlichen) stehet. Die Arithmetik endlich, welche von den Gesetzen der Zählbarkeit handelt, entwickelt eben darum die allgemeinsten Gesetze, nach welchen sich die Dinge in ihrem Daseyn, selbst in ihrem idealen Daseyn, richten müssen.

§. 11.

Versuchen wir nun, aus dieser Erklärung der Mathematik eine logische Eintheilung dieser Wissenschaft in mehrere einzelne Disciplinen herzuleiten. Gelingt es uns ziemlich natürlich mit dieser Eintheilung; so dürfte auch dieses wieder ein neuer Bestättigungsgrund für die Gültigkeit jener Erklärung seyn. Ihr zu Folge soll die Mathematik eine Wissenschaft von den Gesetzen seyn, nach welchen sich die Dinge in ihrem Daseyn richten müssen. Diese Gesetze sind nun entweder so allgemein, daß sie auf alle Dinge ganz ohne Ausnahme anwendbar sind, oder nicht. Die ersteren zusammen gestellt und wissenschaftlich geordnet, werden demnach den ersten Haupttheil der Mathematik ausmachen, den man die allgemeine Mathesis nennen kann; alles Uebrige ist dann besondere Mathesis.

Anm. Zu dieser allgemeinen Mathesis gehört, wie wir unten sehen werden, die Arithmetik, Combinationslehre, u. m. a. Diese Theile der Mathematik muß man also den übrigen (der Chronometrie, Geometrie, u. s. w.) nicht als coordinirt betrachten; viel mehr sind leztere der allgemeinen Mathesis insgesammt, wie Arten der Gattung, subordinirt. Und weil der Begriff der Zahl einer von jenen der allgemeinen Mathesis ist, so wird er auch in allen diesen besondern Theilen zwar häufig vorkommen, aber doch ihren Inhalt nicht erschöpfen.

§. 12.

§. 12.

Um nun die besondern, oder speciellen Theile der Mathematik zu erhalten, müssen wir die Dinge selbst, mit deren allgemeinen Formen sich die Mathematik beschäftigt, in gewisse Classen bringen. Aber bevor wir dieses noch thun, laßt uns auf einen gewissen Begriff unsers Verstandes aufmerksam machen, der zwar (so viel ich einsehe) nicht völlig auf alle Dinge anwendbar ist, in die allgemeine Mathesis also nach aller Strenge zwar nicht aufgenommen werden sollte; aber der von der andern Seite sich doch auf Dinge von so verschiedener Art anwenden läßt daß er zu einer Eintheilung der Mathematik in einzelne Disciplinen wohl kaum tauglich wäre. Dieses ist der Begriff der Entgegensetzung. Ich glaube nicht, daß es zu jedem Dinge ein ihm entgegengesetztes gebe; aber das Vor- und Nachherseyn in der Zeit, das Dießseits- und Jenseitsliegen im Raume, Kräfte, die nach entgegen gesetzten Richtungen wirken, in der Mechanik,

Ver-

Vermögen und Schulden in der Berechnung des Cassastandes, das Angenehme und Unangenehme in den Empfindungen, das Gute und Böse in den freyen Willensentschließungen u. drgl. — sind lauter Beyspiele der Entgegensetzung, welche uns zur Genüge beweisen, wie ausgebreitet die Anwendbarkeit dieses merkwürdigen Begriffes sey. Zugleich ersehen wir aus eben diesen Beyspielen, wie wenig dieser Begriff dazu geeignet sey, um eine Hauptabtheilung der mathematischen Disciplinen in solche, auf welche er anwendbar oder nicht anwendbar wäre, zu begründen. Im Gegentheile die wirklich bestehenden Eintheilungen (die wir doch auch nicht ganz umstossen dürfen) sind nach einem ganz andern obgleich nur dunkel gedachten Eintheilungsgrunde gemacht; und man hat bey jeder einzelnen Disciplin das mitgenommen, was sich durch die Anwendung jenes Begriffs auf ihren Gegenstand besonderes ergibt. Das Allgemeine aber, was sich von allen der Entgegensetzung fähigen Dingen ohne Ausnahme sagen läßt, verdient allerdings eine abgesonderte Betrachtung. Es kann (wie man es gewisser Maßen auch schon gethan hat) in einem besondern Anhange zu der allgemeinen Mathesis vorgetragen werden.

§. 13.

Alles, was wir uns immer als existirend denken sollen, das müssen wir uns als Eines von beyden, entweder als nothwendig, oder als frey (d. h. nicht nothwendig) in seinem Daseyn denken *). Das, was wir uns als etwas Freyes denken, unterliegt eben darum auch keinen Bedingungen und Gesetzen in seinem Werden (oder Daseyn **) ist also kein Gegenstand der Mathematik.***)

Das-

*) Ein Beyspiel der erstern Art ist die Geschwindigkeit eines bewegten Körpers; ein Beyspiel der zweyten jede menschliche Willensentschließung.

**) Falls es nähmlich nicht wird, sondern nur ist, wie z. B. das freye Wirken der Gottheit, wie fern wir es uns nicht in der Zeit gedenken.

***) Wohl aber der Gegenstand der Moral welche die Frage untersucht: wie das,

— Dasjenige, was wir als nothwendig in seinem Daseyn denken, ist es entweder schlechthin (d. i. an sich), oder nur bloß bedingt (d. i. unter Voraussetzung von etwas Andern). Das an sich Nothwendige heißt — Gott, und wird als ein nicht bloß möglicher, sondern wirklicher Gegenstand in der Metaphysik betrachtet.(*) Es bleibt uns also nur noch das hypothetisch Nothwendige übrig, welches wir als gewirket durch einen Grund gedenken. Es gibt nun gewisse allgemeine Bedingungen, nach denen sich alles, was durch einen Grund (es sey in oder außerhalb der Zeit) gewirket ist, in seinem Werden oder Daseyn richten muß. Diese Bedingungen zusammen genommen und wissenschaftlich geordnet, werden also den ersten Hauptheil der besondern Mathesis ausmachen, welchen ich in Ermanglung eines besseren Nahmens Grundlehre oder Aetiologie nenne.

Anm.

(*) was frey geschieht (oder ist), geschehen (oder seyn) soll.

Anm. Dieser Theil der Mathematik enthält die Lehrsätze von Grund und Folge, deren einige man sonst auch in der Ontologie vorzutragen pflegte; z. B. daß ähnliche Gründe ähnliche Folgen haben; ingleichen die Lehren, welche man unter dem Namen der Wahrscheinlichkeitsrechnung begreift, welches letztere ich hier nur aus dem Grunde erinnere, damit man nicht glaube, es werde dieser wichtige Theil der Mathematik von uns vielleicht ganz übergangen. Uebrigens muß die Aetiologie im wissenschaftlichen Vortrage vor der Chrono- und Geometrie vorangehen, weil letztere sich auf gewisse Lehrsätze der ersteren berufen, wie wir zu seiner Zeit deutlicher sehen werden.

§. 14.

Alles, was wir uns nicht nur als wirklich denken, sondern als wirklich wahrnehmen sollen, das müssen wir in der Zeit, und — wenn wir es überdieß als ein Ding ausser uns erkennen sollen, auch noch im Raume wahrneh-

men.

men. Mit andern Worten, Zeit und Raum sind die beyden Bedingungen, unter welchen alle sinnlichen Dinge, d. h. alle Dinge, die uns als wirklich erscheinen sollen, stehen müssen. Entwickeln wir also die Eigenschaften der Zeit und des Raumes in abstracto, und ordnen sie wissenschaftlich; so werden auch diese Wissenschaften zur Mathematik gezählet werden müssen, indem auch sie, obgleich nur mittelbarer Weise, von den Bedingungen handeln, nach welchen sich die Dinge in ihrem Daseyn richten müssen. So haben wir also den zweyten und dritten Bestandtheil der besondern Mathesis, die Zeitlehre (Chronometrie), und die Raumlehre (Geometrie).

Anm. Es ist an sich ziemlich gleichgültig, welche von diesen beyden Wissenschaften wir im Systeme der andern vorsetzen, indem die Eigenschaften der Zeit und des Raumes von einander ganz unabhängig sind. Dennoch, weil der Begriff der Zeit auf mehrere Gegenstände anwendbar ist, als jener des Raumes,

mes, scheint es zweckmäßiger, die Chronometrie der Geometrie voran gehen zu lassen.

§. 15.

Werden zuletzt die Zeit und der Raum nicht in abstracto bloß, sondern als ausgefüllt mit wirklichen Dingen, und zwar mit solchen betrachtet, welche nicht frey in ihrem Daseyn, sondern den Gesetzen der Caussalität unterworfen sind; so kommen zwey neue Wissenschaften zum Vorschein, welche aus den §. 14. genannten, mit jener im §. 13. gleichsam zusammengesetzt sind. Nähmlich:

a) Die allgemeinen Gesetze, nach welchen sich unfreye Dinge, die in der Zeit sind, in ihrem Daseyn (und in ihren Veränderungen) richten müssen, machen den Inhalt einer eigenen Wissenschaft aus, welche ich in Ermanglung einer schicklicheren Benennung Ursachenlehre, oder chronische Aetiologie nenne. *)

b)

*) Ich unterscheide nähmlich die Worte Grund und Ursache. Letzteres bedeu-

b) Die allgemeinen Gesetze, unter welchen unfreye Dinge, die in der Zeit und im Raume zugleich sind, stehen, machen den Inhalt jener mathematischen Disciplin aus, die man die reine Naturwissenschaft, sonst auch Bewegungslehre oder Mechanik nennt.

Anm. In das Gebiet der chronischen Aetiologie gehören z. B. die Lehrsätze: „Jede Wirkung ist mit ih„rer Ursache gleichzeitig; die Größe „der Wirkung, welche aus einer con„stanten Ursache entspringt, verhält „sich wie das Product aus dem Grade „der Ursache in die Zeit ihres Wirkens;" u. drgl. Diese Lehrsätze sind nähmlich so allgemein, daß sie nicht bloß von räumlichen, materiellen Dingen, sondern auch von den Kräften der Seele, von unsern Vorstellungen, und überhaupt von allen Dingen gelten, die in der Zeit erscheinen, und dem Gesetze der Caus-

---

tet mir einen Grund, der in der Zeit wirkt.

Caussalität unterliegen. — Die reine Naturwissenschaft kennt man bereits.

§. 16.

Man hat auch häufig von einer Wissenschaft gesprochen, in welcher die allgemeinen Gesetze der Möglichkeit einer Bewegung ohne Rücksicht auf eine bewegende Kraft — also die Begriffe von Zeit, Raum und Materie ohne jenen von einer Ursache vorkommen sollten. Hermann, Lambert und Kant haben diese Wissenschaft Phoronomie genannt, und letzterer sie als einen Theil der reinen Naturwissenschaft betrachtet, in welche sie aber nach unserer obigen Erklärung nicht gehören würde. Herr E. G. Fischer in seiner Untersuchung über den eigentlichen Sinn der höheren Analysis, nebst einer idealen Uebersicht der Mathematik und Naturkunde nach ihrem ganzen Umfange. Berlin. 1808. stellt diese Wissenschaft gleichfalls auf, und läßt sie unter dem Nahmen Phorometrie

zu-

zunächst auf die Geometrie, als zweyten Haupttheil der räumlichen Mathematik folgen. Allein wenn anders die Ansichten, welche ich in der Folge mitzutheilen gedenke, nicht ganz unrichtig sind, so kann eine solche Wissenschaft gar nicht existiren; denn alle Sätze, die man in ihr bisher aufgestellt hat, sind in der That nur mittelst Zuziehung des Begriffs der Ursache erweislich.

§. 17.

Noch pflegt man die einzelnen Disciplinen der Mathematik in gemeine und höhere abzutheilen. Es ist mir aber für diese Eintheilung bis jetzo noch kein echt wissenschaftlicher Eintheilungsgrund bekannt. In wie fern ein solcher Eintheilungsgrund sich bloß auf eine einzelne Disciplin (z. B. die Geometrie) erstrecken sollte, werden wir von ihm schicklicher bey der Abhandlung dieser Disciplin insbesondere sprechen. Hier also nur von solchen Eintheilungsgründen, die sich durchs ganze Gebiet der Mathematik hindurch erstrecken sollen. Dieß ist der

Fall

Fall bey allen denjenigen, welche man für die allgemeine Mathesis vorgeschlagen hat; indem Eintheilungen, welche bey dieser gemacht sind, eben darum auch durch alle besondern Theile der Mathematik hindurch gehen müssen. In des Herrn Michelsen Gedanken über den gegenwärtigen Zustand der Mathematik, u. s. w. Berlin 1789. wird die gemeine und höhere Mathesis dadurch abgetheilt, daß die eine beständige, die andere veränderliche Größen (oder wohl überhaupt Dinge) zu ihrem Objecte habe. Diese Eintheilung glaube ich schon darum nicht annehmen zu können, weil ihr stillschweigend die Voraussetzung zum Grunde liegt, welche von Vielen sogar in die Erklärung der Mathematik aufgenommen worden, daß es das einzige Geschäft der Mathematik sey, Größen, die nicht gegeben sind, aus andern, die gegeben sind, zu finden. Wenn dieses richtig wäre, so sollten alle Sätze der Mathematik die Form von Aufgaben besitzen; Grundsätze, Lehrsätze, u. s. w. könnten in ihr eigentlich gar nicht vorkommen. Al-

lein,

lein, bevor man fragen kann, was aus gegebenen Dingen folge, muß man erst dargethan, oder als Forderung angenommen haben, daß diese Dinge gegeben seyn können, d. h. möglich sind. — Eine ganz andere Eintheilung schlägt uns H. M. in seinen schon oben erwähnten Beyträgen im I. B. 2. St. (Ueber den Begriff der Mathematik und ihre Theile.) vor. Hier nimmt er drey Haupttheile der allgemeinen Mathesis an: 1) die niedere, welche die Größen aus gleichen Bestandtheilen bestehen läßt; 2) die höhere, worin die Größen zum Theil aus gleichen, zum Theil aus ungleichen Bestandtheilen zusammengesetzt gedacht werden (Differenze- und Summenlehre); 3) die transcendentale, in welcher die Bestandtheile der Größen eigentliche Elemente, oder Größeneinheiten im strengsten Sinne sind (Differenzial- und Integralrechnung). — Ich weiß nicht, ob ich diese Eintheilung recht verstehe; denn mich däucht, in eben dem Sinne, in welchem man von der Differenz- und Summenrechnung sagen kann, daß sie die Grö-

ßen

ßen aus — zum Theil gleichen, zum Theil ungleichen Bestandtheilen zusammengesetzt betrachten, thut es schon die gemeine Rechenkunst, wenn sie z. B. $2 + \frac{1}{2}$ als ein Ganzes ansieht. Noch weniger sehe ich ein, wie die Differenzialien als Größeneinheiten im strengsten Sinne des Worts betrachtet werden können, da man doch auch ihnen eine Größe, wenigstens eine intensive beylegt.

Am besten dürften wohl noch diejenigen verfahren, welche zur höheren Mathesis bestimmt nur das zählen, worin der Begriff eines Unendlichen (gleichviel ob eines unendlich Großen oder Kleinen) oder der eines Differenzials vorkömmt. Nur ist dieser Begriff zur Stunde noch nicht hinlänglich aufgeklärt. Sollte es aber dereinst entschieden werden, daß das Unendliche, oder das Differenzial, nichts anders als ein symbolischer Ausdruck sey, gerade wie $\sqrt{-1}$, dgl.; und sollte es sich zugleich ergeben, daß die Methode, das Wahre durch bloß symbolische Erdichtungen zu beweisen, eine zwar ganz besondere, aber doch immer richtige und logisch zuläs-

sige

sige Beweisart sey: dann, glaube ich, würde man am zweckmäßigsten verfahren, in das Gebiet der höheren Mathematik mit dem Begriffe des Unendlichen, auch jeden andern zu verweisen, der so wie er symbolisch ist. Gemeine Mathesis wäre dann jene, welche nur lauter reelle — höhere, welche auch bloß symbolische Begriffe oder Ausdrücke in ihren Vortrag aufnimmt.

§. 18.

Auch über die Eintheilung der Mathematik in reine und angewandte haben wir etwas zu erinnern. Versteht man nähmlich, wie insgemein geschieht, unter der angewandten Mathematik so viel als empirische; so können wir, uns nicht zu widersprechen, nicht einmahl das Daseyn einer solchen zugeben, weil wir die ganze Mathematik in unsrer obigen Erklärung zu den rein a priorischen Wissenschaften zählten. Aber befürchte man darum nur nicht, daß wir auf diese Art einen beträchtlichen Theil der mathematischen Disciplinen etwa einbüßen werden. Die Geschichte

schichte der Mathematik zeigt, daß man je länger, je Mehreres von dem, was man im Anfange bloß aus Erfahrungen angenommen hatte, in der Folge aus Begriffen herleiten, und also als einen Theil der reinen apriorischen Mathesis behandeln gelernt habe. Und dieses dürfte schon Grundes genug seyn, in wissenschaftlicher Hinsicht keinen Unterschied zwischen reiner und empirischer Mathematik zu gestatten; denn weil nur wir z. B. das Daseyn einer Anziehungskraft, und das Gesetz, daß sie im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung wirke, nicht a priori herzuleiten wissen *): folgt daraus schon, daß es auch unsre Nachkommen nie wissen werden, und daß es schlechterdings nicht a priori herleitbar sey? — Aber noch mehr, das, was man in den sogenannten angewandten Theilen der Mathematik aus der Erfahrung annimmt, macht diese Disciplinen im Grunde nicht empirisch. Denn die Mathematik handelt ja überhaupt nicht von dem, was wirklich Statt findet, sondern von den Be-

din-

*) Kant hat es gleichwohl versucht.

dingungen oder Formen, die etwas haben muß, wenn es Statt finden soll. Es wird also nichts anders nöthig seyn, als daß man jene Sätze, die die Erfahrung angibt, bloß hypothetisch vortrage, und dann von Einer Seite die Möglichlichkeit dieser Hypothesen, und von der andern die Folgen, die sich aus ihnen ergeben, durch apriorische Schlüsse herleite. Dann kömmt im ganzen Vortrage kein empirisches Urtheil vor, die Wissenschaft ist also apriorisch. So braucht man z. B. zum Vortrag der Optik keinesweges aus der Erfahrung das Gesetz zu entlehnen, daß sich das Licht im Durchgange aus Luft in Glas in dem Verhältnisse 3 : 2 breche, u. dgl.; sondern es ist genug, wenn man a priori nur die Möglichkeit einer Materie, wie das Licht ist, und ihrer Brechung beym Durchgang durch verschiedene Mittel begreiflich macht, worauf man dann in hypothetischer Form den Vortrag einrichtet: „wenn es eine Materie gibt, die u. s. w.; so müssen sich diese und jene Folgen daraus ergeben.“ Jene Möglichkeit aber kann nie schwer zu beweisen seyn, indem doch alles, was in der Erfahrung als wirklich wahrnehmbar seyn soll, schon voraus als möglich erkannt werden muß.

§. 19.

In so fern man also unter der angewandten Mathematik eine solche verstehen will, die sich auf einige aus der Erfahrung entlehnte Sätze wesentlich gründet, glaube ich nicht, daß sich ihr Daseyn rechtfertigen lasse. Aber man kann unter dem Nahmen der angewandten Mathematik auch etwas ganz Anderes verstehen, etwas, welches ich lieber praktische — oder, mit einem aus der kritischen Philosophie entlehnten Ausdrucke, wohl noch bestimmter — technische Mathematik nennen möchte. Diese ist ein zum nützlichen Gebrauche für das bürgerliche Leben besonders eingerichteter Vortrag der mathematischen Disciplinen. Ein solcher Vortrag unterscheidet sich von dem rein wissenschaftlichen auf eine ganz bestimmte Art durch die Verschiedenheit des Zweckes, es, der bey dem letzteren die möglichst größte Vollkommenheit der wissenschaftlichen Form, und dadurch wieder die möglichst beste Uebung im richtigen Denken — bey jenem dagegen unmittelbare Brauchbarkeit für die Bedürfnisse des Lebens ist. Daher kömmt es denn ferner, daß in dem praktischen Vortrage alle zu allgemeinen Ansichten, welche zur Anwendung nicht unumgänglich nöthig sind, hinweg gelassen, dagegen recht viele Beyspiele und specielle Beziehungen auf wirklich vorhandene Fälle eingeflochten werden. Man thut sich auch nicht den Zwang an, diese wirklichen Fälle (wie es bey einem rein wissenschaftlichen Vortrage geschehen müßte) als bloße Möglichkeiten anzuführen, sondern man stellt sie geradezu als durch Erfahrungen erwiesene Wirklichkeiten auf. Uebrigens brauche ich es nicht erst zu sagen, daß in den meisten wirklich vorhandenen Lehrbüchern der Mathematik eine gewisse gemischte Methode zum Grunde liege, die jene beyden Zwecke, den rein wissenschaftlichen und praktischen, vereint beabsichtiget; daß es auch gar nicht meine Meinung sey, dieß jenen Lehrbüchern im Allgemeinen etwa zum Fehler anzurechnen. Ein völlig zweckmäßiges Lehrbuch, nach der gemischten Methode verfaßt, wäre in der That ein noch weit brauchbareres Werk als ein bloß wissenschaftliches. Nur glaube ich, das erstere kann nicht zu Stande kommen, bevor man das bloß wissenschaftliche System noch nicht vollendet hat. Wer nun an der Vervollkommnung des letztern arbeitet, dem kann man es erlauben, den zweyten Zweck für diese Zeit ganz außer Augen zu setzen, um seine Aufmerksamkeit nur auf den Einen, die wissenschaftliche Vollkommenheit allein zu heften.

§. 20.

Aus allen diesem erhellet nun, wie ich glaube, daß es nur die §. 11 — 15 genannten Hauptheile einer wissenschaftlich geordneten Mathematik gebe. Folgende Tafel stellt sie in einer bequemen Uebersicht dar. Die eingeklammerten Worte bezeichnen den Gegenstand jeder Disciplin.

A.

Allgemeine Mathesis.
(Ding überhaupt.)

B.

Besondere mathematische Disciplinen.
(besondere Dinge)

I.

A e t i o l o g i e
(unfreyes Ding.)

II.

(unfreyes sinnliches Ding.)

a.

(Form desselben in abstracto.)

α	β
Zeitlehre (Zeit.)	Raumlehre. (Raum.)

b.

(sinnliches Ding in concreto.)

α	β
Chronische Aetiologie. (sinnliches Ding in der Zeit.)	Reine Naturwissenschaft. (sinnliches Ding in Zeit und Raum.)

Ueber