Luděk Spíchal

Konstrukce převrácených hodnot reálných čísel na jednotkových kuželosečkách

Učitel matematiky, Vol. 30 (2022), No. 4, 217–228

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/151486

KONSTRUKCE PŘEVRÁCENÝCH HODNOT REÁLNÝCH ČÍSEL NA JEDNOTKOVÝCH KUŽELOSEČKÁCH

Luděk Spíchal

Úvod

Ze středoškolské matematiky je obecně známo, že regulární (vlastní) kuželosečky jsou rovinné křivky vznikající průnikem kuželové plochy a roviny, která neprochází jejím vrcholem. Konkrétní druh kuželosečky závisí na orientaci roviny protínající kuželovou plochu, přičemž mezi základní typy zařazujeme *elipsu*, *parabolu* a *hyperbolu*. *Kružnice*, která je v matematice střední školy uvažována jako samostatný typ kuželosečky, je v užším slova smyslu speciálním případem elipsy. Kuželosečky se staly objektem zájmu matematiků již ve starověku, systematicky se jejich vlastnostmi zabýval zejména Apollónios z Pergy.

Článek se zabývá třídou kuželoseček, které je možné označit jako *jednotkové kuželosečky*. Po zavedení tří typů zmíněných kuželoseček tyto použijeme ke konstrukci převrácených hodnot reálných čísel. V další časti poukážeme na možnost využití konstrukce pro určení hodnoty harmonického průměru a na závěr pojem harmonického průměru uvedeme do souvislosti s tzv. pythagorejskými průměry.

Pojem *jednotkové kružnice* odpovídající křivce určené rovnicí

$$x^2 + y^2 = 1, \tag{1}$$

by měl být středoškolským studentům dobře známý, neboť je využíván pro definici goniometrických funkcí.

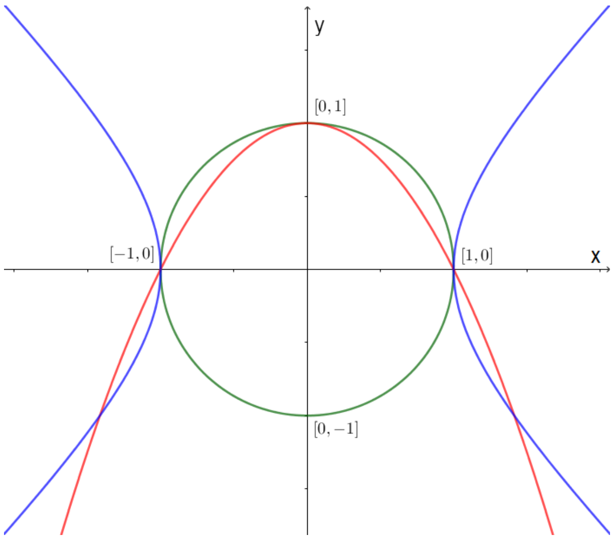
Pojmy jednotkové paraboly a jednotkové hyperboly budou analogií k jednotkové kružnici. Za *jednotkovou parabolu* budeme považovat křivku určenou rovnicí

$$x^2 + y = 1, \tag{2}$$

v případě *jednotkové hyperboly* budeme uvažovat křivku určenou rovnicí

$$x^2 - y^2 = 1. \tag{3}$$

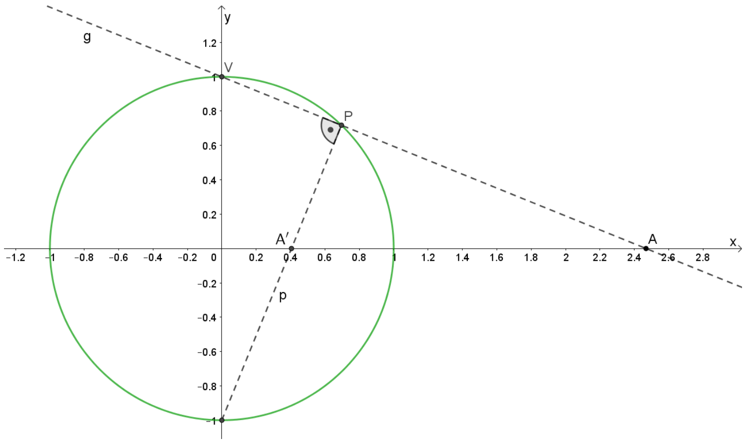
Grafy jednotkové kružnice, jednotkové paraboly a jednotkové hyperboly jsou společně s vyznačenými průsečíky se souřadnicovými osami znázorněny na obrázku 1.



Obr. 1: Grafy jednotkové kružnice, jednotkové paraboly a jednotkové hyperboly

1. Konstrukce převrácené hodnoty reálného čísla pomocí jednotkové kružnice

Postup konstrukce převrácené hodnoty reálného čísla $a \neq 0$ znázorněný na obr. 2 předpokládá sestrojení přímky $g = \overleftrightarrow{AV}$, kde bod $A[a, 0]$ je libovolný bod na ose x a $V[0, 1]$ je průsečík jednotkové kružnice s kladnou částí osy y. Přímka g protíná jednotkovou kružnici rovněž v bodě P. Kolmice p vztyčená v průsečíku P protíná osu x v bodě A', přičemž x-ová souřadnice bodu A' je převrácenou hodnotou reálného čísla a, tj. $1/a$.



Obr. 2: Konstrukce převrácené hodnoty reálného čísla pomocí jednotkové kružnice

V případě, že bod A má souřadnice $[a, 0]$ a $a \neq 0$, pak přímka g určená rovnicí

$$g : y = 1 - \frac{x}{a} \tag{4}$$

protíná jednotkovou kružnici v bodech, jejichž souřadnice určíme z řešení rovnice

$$\sqrt{1 - x^2} = 1 - \frac{x}{a},$$

kde $|x| \leq 1$. Společnými body jednotkové kružnice a přímky g jsou $V[0, 1]$ a

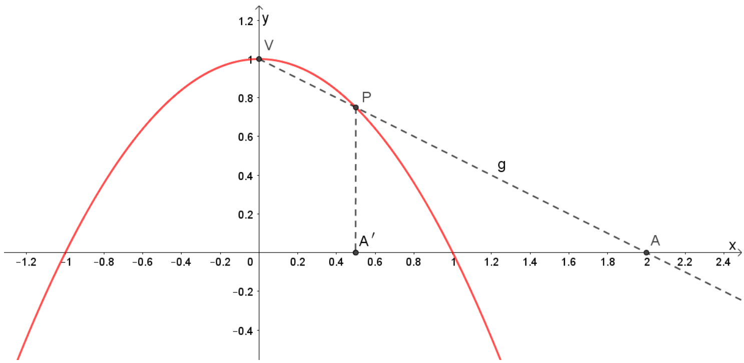
$$P\left[\frac{2a}{a^2 + 1}, \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}\right]. \tag{5}$$

Kolmice $p : y = ax - 1$ vztyčená v bodě P protíná osu x $(y = 0)$ v bodě A' se souřadnicemi $\left[\frac{1}{a}, 0\right]$.

V následujících sekcích ukážeme, že obdobný způsob, jakým jsme hledali převrácenou hodnotu reálného čísla a pomocí jednotkové kružnice, můžeme použít i v případě jednotkové paraboly a jednotkové hyperboly.

2. Konstrukce převrácené hodnoty reálného čísla pomocí jednotkové paraboly

Při konstrukci převrácené hodnoty reálného čísla a, $|a| > 1$ (obr. 3) sestrojíme kolmici na osu x z průsečíku P jednotkové paraboly a přímky g procházející vrcholem $V[0,1]$ paraboly a bodem $A[a,0]$. Kolmice protíná osu x v bodě bod A', jehož x-ová souřadnice je převrácenou hodnotou čísla a, tj. $1/a$. Pro $|a| < 1$, $a \neq 0$ bychom při konstrukci postupovali v opačném pořadí.



Obr. 3: Konstrukce převrácené hodnoty reálného čísla pomocí jednotkové paraboly

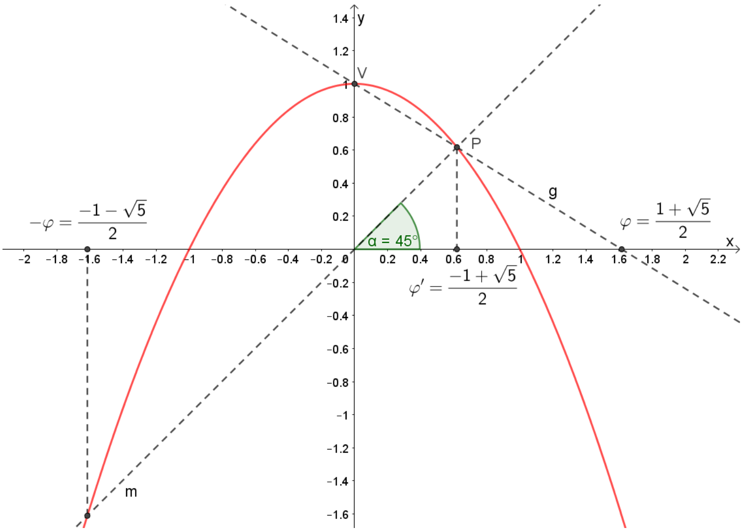
V případě, že bod $A[a,0]$ je průsečíkem přímky g a osy x, je přímka g určená rovnicí (4). Souřadnice průsečíku P získáme řešením rovnice

$$1 - x^2 = 1 - \frac{x}{a},$$

přičemž společnými body jednotkové paraboly a přímky g jsou $V[0,1]$ a

$$P\left[\frac{1}{a}, \frac{a^2-1}{a^2}\right]. \tag{6}$$

Příklad. Pro každou dvojici A, A' existuje právě jeden směrnicový úhel α. Ukažme, že pro volbu $\alpha = 45°$ tvoří zmíněnou dvojici tzv. *zlatý řez* $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a jeho převrácená hodnota $\varphi^{-1} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (obr. 4).



Obr. 4: Konstrukce zlatého čísla (φ), převrácené hodnoty ($\varphi' = \varphi^{-1}$) a opačné hodnoty ($-\varphi$) pomocí jednotkové paraboly

Řešení. V prvním kroku vypočteme souřadnice průsečíku P paraboly s rovnicí $y = 1 - x^2$ a přímky $m\colon y = x$, které určíme z řešení rovnice

$$1 - x^2 = x,$$
$$\vdots$$
$$x^2 + x - 1 = 0.$$

Platí, že

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

ze kterých vyhovuje

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Zlatý řez je průsečíkem přímky g určené vrcholem paraboly V a bodem P a osy x. Jestliže rovnici přímky g zapíšeme ve směrnicovém tvaru

$$y = kx + q,$$

pak $q = 1$ a směrnici k určíme dosazením souřadnic bodu

$$P\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right].$$

Dostaneme

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} = k \cdot \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + 1,$$

odkud

$$k = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Přímka

$$g\colon y = \frac{1-\sqrt{5}}{2}x + 1$$

protíná osu x v bodě

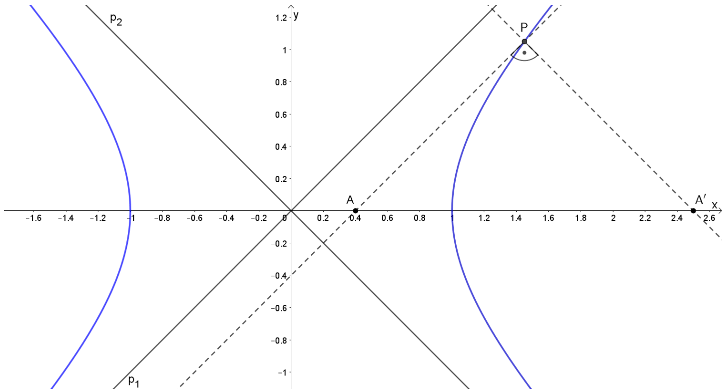
$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

který představuje hodnotu zlatého řezu $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, x-ová souřadnice průsečíku P určuje hodnotu $\varphi^{-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, tedy převrácenou hodnotu zlatého řezu (Spíchal, 2021).

Připomeňme na závěr, že zlatý řez vznikne rozdělením úsečky na dvě části tak, že poměr větší části k menší je stejný jako poměr celé úsečky k její větší části (Stewart, 2019).

3. Konstrukce převrácené hodnoty reálného čísla pomocí jednotkové hyperboly

Při konstrukci převrácené hodnoty reálného čísla $a \neq 0$ (obr. 5) sestrojíme přímku daným bodem ležícím na ose x rovnoběžnou s asymptotou jednotkové hyperboly. V průsečíku P rovnoběžky a hyperboly dále sestrojíme kolmici k rovnoběžce (neboli rovnoběžku s druhou asymptotou).



Obr. 5: Konstrukce převrácené hodnoty na jednotkové hyperbole (p_1, p_2 jsou asymptoty hyperboly)

Převrácená hodnota reálného čísla a odpovídá x-ové souřadnici bodu A', který je průsečíkem kolmice a osy x.

Jestliže $A[a, 0]$, pak přímka rovnoběžná s asymptotou $y = x$ procházející bodem A je určená rovnicí[1]

$$y = x - a.$$

Souřadnice průsečíku P rovnoběžky a hyperboly získáme z řešení rovnice

$$\sqrt{x^2 - 1} = x - a,$$

kde $|x| \geq 1 \wedge x \geq a$. Po úpravě dostáváme

$$P\left[\frac{a^2+1}{2a}, \frac{1-a^2}{2a}\right]. \tag{7}$$

[1] Analogicky bychom mohli použít asymptotu s rovnicí $y = -x$.

Kolmice k rovnoběžce vztyčená v bodě P a určená rovnicí

$$y = -x + \frac{1}{a},$$

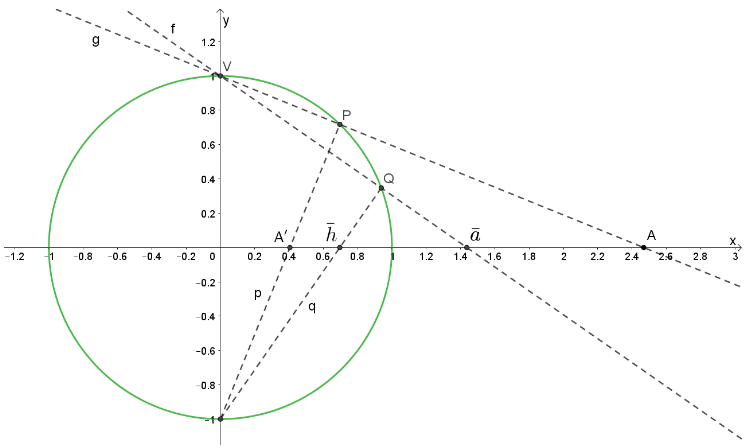
protíná osu x v bodě

$$A'\left[\frac{1}{a}, 0\right].$$

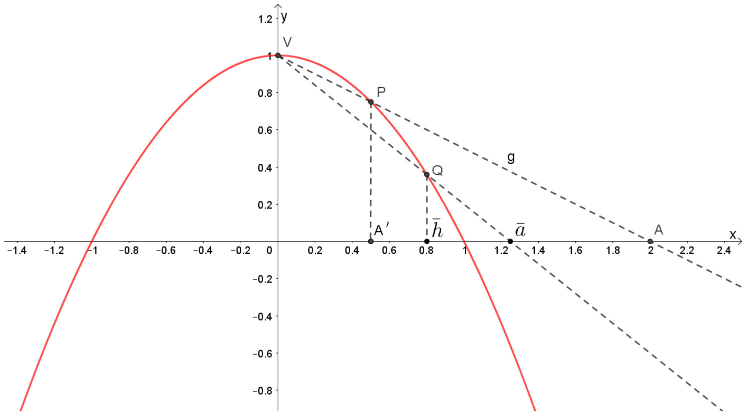
4. Konstrukce pýthagorejských průměrů pomocí jednotkových kuželoseček

Výše uvedené konstrukce převrácené hodnoty přímo vybízí k možnosti konstruovat pomocí jednotkových kuželoseček pýthagorejské průměry. Zejména průměr harmonický, jehož určení vychází ze stanovení převrácených hodnot.

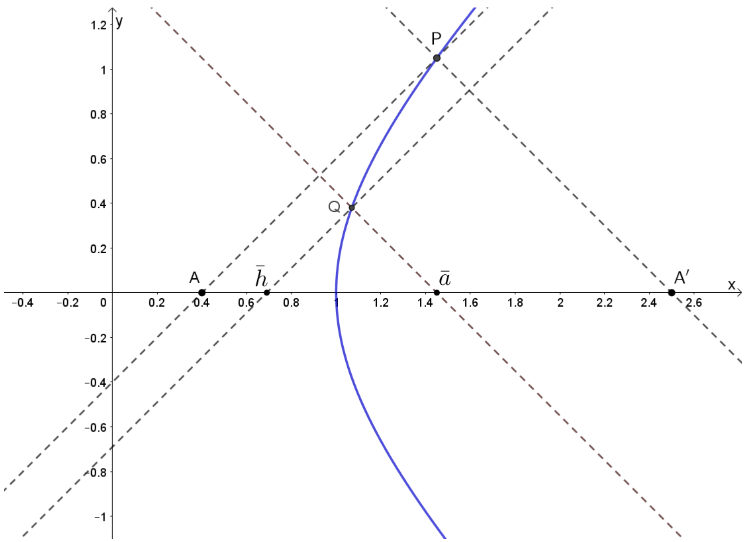
Příklady uvedené na obrázcích 6, 7 a 8 ukazují konstrukci aritmetického ($\bar{a}$) a harmonického ($\bar{h}$) průměru vůči sobě převrácených hodnot a, a' pomocí bodů $A = [a, 0]$, $A' = [a', 0]$. Aritmetickému průměru odpovídá x-ová souřadnice středu úsečky AA', harmonický průměr je její převrácenou hodnotou.



Obr. 6: Konstrukce pýthagorejských průměrů pomocí jednotkové kružnice



Obr. 7: Konstrukce pýthagorejských průměrů pomocí jednotkové paraboly



Obr. 8: Konstrukce pýthagorejských průměrů pomocí jednotkové hyperboly (znázorněno pouze jedno rameno hyperboly)

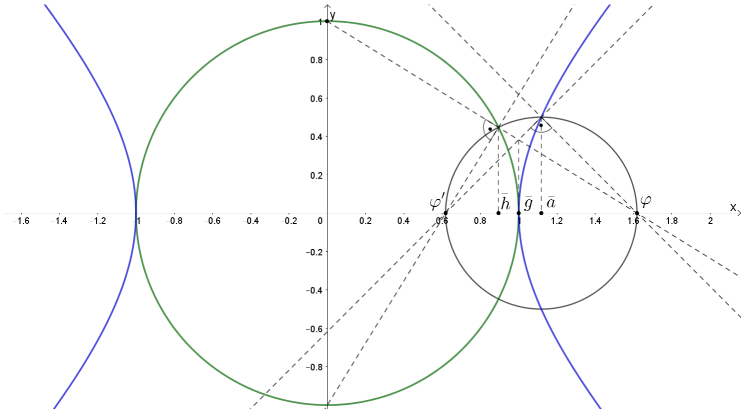
Geometrický průměr $\bar{g}$ je vzhledem k použitému modelu, ve kterém uvažujeme pýthagorejské průměry reálného čísla a jeho převrácené hodnoty, roven ve všech případech 1, neboť pro pýthagorejské průměry ($n = 2$) platí, že

$$\bar{a} \cdot \bar{h} = \bar{g}^2,$$

a dále

$$\bar{h} \leq \bar{g} \leq \bar{a}.$$

Na obrázku 9 je znázorněna konstrukce pýthagorejských průměrů zlatého řezu (φ) a jeho převrácené hodnoty (φ^{-1}) užitím jednotkové kružnice a jednotkové hyperboly.



Obr. 9: Pýthagorejské průměry zlatého řezu (φ) a jeho převrácené hodnoty ($\varphi^{-1} = \varphi'$)

5. Závěr

V článku jsme ukázali, že jednotkové kuželosečky umožňují geometrickou konstrukci převrácených hodnot reálných čísel. Jako demonstraci využití konstrukce převrácených hodnot jsme použili harmonický průměr, který jsme zařadili mezi tzv. klasické (pýthagorejské) průměry. Jejich zkoumání, které patřilo k velkým a důležitým tématům starověké řecké matematiky, je obvykle spojováno s pýthagorejskou filosofickou školou založenou předsókratovským filosofem Pýthagorem ze Samu (okolo 570 př. n. l. – po 510 př. n. l.). Pýthagorejci a jejich následovníci zkoumali zmíněné klasické průměry zejména v souvislosti s geometrií a hudbou.

Řečtí matematikové chápali tyto průměry jako poměry a rozdíly mezi třemi kladnými čísly a, b a c. Jestliže platí, že $a > b > c > 0$, pak lze jednotlivé průměry z pohledu řecké matematiky chápat jako úměry sestavené z poměru rozdílů těchto čísel a poměru tvořeného jednotlivými čísly, tj. např.

$$\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{b}.$$

Aritmetický průměr získáme v případě, že jako pravý poměr zvolíme a/a, b/b, popř. c/c, geometrický průměr získáme pro volbu a/b nebo b/c, harmonický průměr pro a/c (Gielis et al., 2014; Gielis, 2017).

Uzavřeme toto krátké pojednání poznámkou o použitém softwaru, kterým byl program GeoGebra. Je zřejmé, že při použití běžných pomůcek (kružítko, pravítko) se patrně omezíme na konstrukci převrácené hodnoty reálného čísla pomocí jednotkové kružnice. Na druhou stranu dostupnost vhodného softwaru, kterým je např. Geogebra, rozšiřuje možnosti konstrukce rovněž o použití jednotkové paraboly a hyperboly. Dodejme, že tento článek z části vznikl také jako důsledek experimentů s jednotkovými kuželosečkami a jistě nic nebrání možnosti využít Geogebru nejen k běžné školní práci, ale i jako prostředek k případným žákovským experimentům.

Literatura

[1] Gielis, J. (2017). *The Geometrical Beauty of Plants.* Atlantis Press.

[2] Gielis, J., Verhulst, R., Caratelli, D., Ricci, P. E., & Tavkhelidze, I. (2014). On means, polynomials and special functions. *The Teaching of Mathematics, XVII*(1), 1–20.

[3] Spíchal, L. (2021). Jednotková parabola, zlatý řez a parabolické π. *Rozhledy matematicko-fyzikální, 96*(1), 8–17.

[4] Stewart, I. (2019). *Neuvěřitelná čísla profesora Stewarta*. Dokořán. Argo.

Abstract

The article deals with the construction of reciprocals of real numbers using unit conic sections. The demonstrated methods are then used to determine the value of the so-called Pythagorean means. Finally, a few remarks are made about the Pythagorean means and the way they were calculated by Greek mathematicians.

Luděk Spíchal
Česká lesnická akademie Trutnov
Lesnická 9
541 01 Trutnov
e-mail: spichal@clatrutnov.cz