Emil Calda

K sázce mezi Saint-Exupérym a jeho kamarádem

Učitel matematiky, Vol. 4 (1996), No. 2, 85–87

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/151451

K SÁZCE MEZI SAINT-EXUPÉRYM A JEHO KAMARÁDEM

Emil Calda

V *Učiteli matematiky* z listopadu 1994 je uveřejněna úloha o sázce mezi spisovatelem Saint-Exupérym a jeho kamarádem, plukovníkem Gelléem.

V případě, že úlohu vezmeme doslovně, je její řešení velmi jednoduché. Označíme-li x, y velikosti stran podstavy, je výška kvádru rovna $\sqrt{x^2+y^2}$, a protože je kvádr tvořen přesně krychličkami o hraně 1 cm, musí být čísla $x, y, \sqrt{x^2+y^2}$ — vyjadřují-li délky hran v cm — přirozená. Jedná se tedy o pythagorejské trojúhelníky, jejichž obsah — podle další podmínky — má být $S = \frac{1}{2} \cdot xy = \frac{1}{2} \cdot 311\,850 \cdot n$, kde n je neznámé číslo. Protože není řečeno, že má být přirozené, je vidět, že úloze vyhovuje každý kvádr s hranami podstavy x, y a výškou $z = \sqrt{x^2+y^2}$, kde všechna tato čísla jsou přirozená: aby byla splněna požadovaná podmínka pro S, stačí za n vzít číslo $n = \frac{xy}{311\,850}$. Těchto kvádrů je nekonečně mnoho — jejich hrany jsou rovny stranám pythagorejských trojúhelníků. Pro zajímavost uveďme všechny tyto kvádry s výškou menší než 100 a s nesoudělnými hranami (tj. všechny primitivní pythagorejské trojúhelníky s přeponou menší než 100):

(3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17), (7, 24, 25),
(20, 21, 29), (12, 35, 37), (9, 40, 41), (28, 45, 53),
(11, 60, 61), (16, 63, 65), (33, 56, 65), (48, 55, 73),
(36, 77, 85), (13, 84, 85), (39, 80, 89), (65, 72, 97).

Tím je úloha vyřešena a mohl bych plným právem od vedoucího redaktora žádat slíbenou lukrativní odměnu. Jednomu to však nedá, neboť je zřejmé, že v úloze má být požadováno, aby číslo n bylo přirozené. Tímto požadavkem se úloha poněkud zkomplikuje: ze všech pythagorejských trojúhelníků máme vybrat pouze ty, jejichž obsah S je roven číslu $155\,925 \cdot n$, kde n je číslo přirozené.

Připomeňme si, že pythagorejské trojúhelníky o stranách x, y, z dostaneme tak, že v identitě

$$(a^2 - b^2) + 4a^2b^2 = (a^2 + b^2)^2$$

dosadíme za a, b libovolná přirozená čísla, pro něž $a > b$, a položíme

$$x = a^2 - b^2, \qquad y = 2ab \; , \qquad z \; = a^2 + b^2 \; .$$

Při řešení dané úlohy vyjděme od podmínky

$$xy = 311\,850 \cdot n = 2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot n$$

a pro zjednodušení položme $x = 15x'$, $y = 15y'$. Dostaneme $x'y' = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot n$, a protože chceme, aby x', y' byly odvěsny pythagorejského trojúhelníku, musí být $x' = a^2 - b^2$, $y' = 2ab$, kde a, b jsou přirozená, $a > b$. Po dosazení a úpravě vznikne rovnice

$$b(a - b)a(a + b) = n \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \; .$$

V tomto tvaru jsme ji napsali proto, abychom si všimli, že čísla $a - b, a, a + b$ na její levé straně tvoří aritmetickou posloupnost s diferencí b a že čísla 7, 9, 11 na straně pravé tvoří aritmetickou posloupnost s diferencí 2. Aby daná rovnice přešla v rovnost, stačí tedy položit $b = n = 2$, $a = 9$. Dostáváme tak:

$$x' = a^2 - b^2 = 77 \; , \qquad y' = 2ab = 36 \; , \qquad z' = a^2 + b^2 = 85 \; ,$$

odkud je

$$x = 15x' = 1\,155 \; , \qquad y = 15y' = 540 \; , \qquad z = 15z' = 1\,275 \; .$$

Tím je úloha Saint-Exupéryho vyřešena: Kvádr s podstavou o hranách $x = 1\,155\,cm$, $y = 540\,cm$ a výškou $z = 1\,275\,cm$ splňuje požadované podmínky; pro jeho výšku z platí $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ a pro obsah jeho podstavy platí $xy = 311\,850 \cdot 2$.

Poznamenejme ještě závěrem, že podmínky sázky jsou takové, že může nastat případ, že oba sázku vyhrají a zároveň prohrají.

Protože se v ní mluví o dnech a nocích, lze předpokládat, že dnem, se nerozumí 24 hodin, ale doba pouze poloviční (stejně tak pro noc). Předpokládejme nyní, že plukovník Gellée vyřešil úlohu za 53 hodin. Pak podle podmínek sázky platí zároveň:

- vyřešil ji dříve než za tři dny a tři noci, tj. dříve než za 72 hodin, takže sázku vyhrál a Saint-Exupéry prohrál;
- nevyřešil ji za tři dny, tj. dříve než za 36 hodin, takže sázku prohrál a Saint-Exupéry vyhrál. Diskutovat lze i o tom, co se myslí bezesnou nocí a jakou roli toto přídavné jméno v celé sázce hraje.

Za zaslanou gratulaci psanou plnicím perem Parker vedoucímu redaktorovi předem děkuji. Můj dík patří samozřejmě i tomu, kdo mu plnicí pero značky Parker zapůjčí.

★ ★ ★

Gratuluji všem úspěšným řešitelům této úlohy.

Redakce sděluje doc. dr. E. Caldovi, CSc. i dalším čtenářům, že vedoucí redaktor **našeho** *časopisu si nemusí plnicí pero zn. Parker půjčovat!*