Dag Hrubý

Trojúhelníková nerovnost aneb nošení vody v konvi

Učitel matematiky, Vol. 4 (1996), No. 4, 205–212

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/151429

TROJÚHELNÍKOVÁ NEROVNOST

aneb

NOŠENÍ VODY V KONVI

DAG HRUBÝ

Při probírání učiva o trojúhelníku jsem si v kvartě našeho gymnázia povídal se studenty mimo jiné také o vlastnostech stran a úhlů v trojúhelníku. Studenti sice neznali pojem trojúhelníkové nerovnosti, ale vztah

$$a + b > c \tag{1}$$

a jeho modifikace mně sami nahlásili. Bylo vidět, že to pokládají za naprosto jasné. Vím, že takové samozřejmosti nemají studenti příliš rádi. Podobně jako diskuse o stranách trojúhelníku není příliš vzrušivá ani diskuse o komutativnosti sčítání reálných čísel. Zápisy typu

$$a + b = b + a$$

se studentům moc zajímavé nezdají, dokonce bych řekl, že je někteří studenti pokládají za zcela zbytečné. Ono je to celkem pochopitelné. Pokud jim nemůžeme nabídnout operaci, která komutativní není, je třeba být trpělivý a čekat, až se dojde ke skládání zobrazení, funkcí, popř. k vektorovému součinu. Teprve potom to začne být zajímavé, teprve potom pojem „komutativní" dostane v hlavách našich studentů pevnější obrysy a my budeme triumfovat.

Vraťme se však k tomu, co je slíbeno v názvu tohoto článku. Když jsem při hodině matematiky psal na tabuli vztah (1), tak mě nečekaně napadlo, že bych to měl nějak oživit. Řekl jsem studentům, že vztah (1) je velmi důležitý, např. při některých důkazech. Uvedl jsem příklad, kdy je třeba rozhodnout, zda bod X

RNDr. Dag T. Hrubý (1948), absolvent PřF UP (matematika–chemie), ředitel gymnázia v Jevíčku, prezident Klubu Paracelsus.

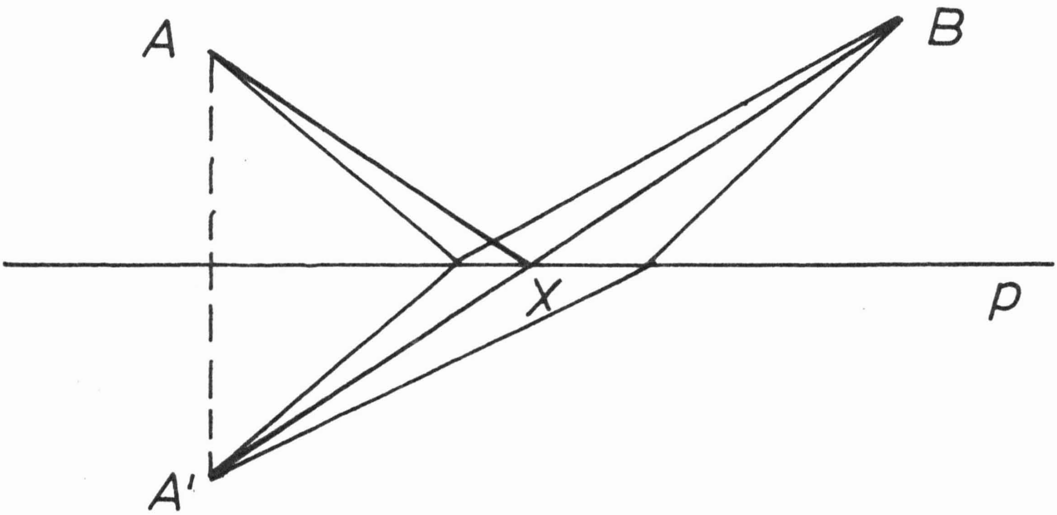
náleží úsečce AB či nikoliv. Snažil jsem se vysvětlit, že když

$$|AX| + |BX| = |AB| ,$$

tak $X \in AB$, a pokud

$$|AX| + |BX| > |AB| ,$$

tak $X \notin AB$. Diskuse probíhala celkem dobře a já jsem se tak trochu namlsal. Napadly mě další příklady využití trojúhelníkové nerovnosti; vesměs typu, který je vyjádřen na obr. 1, tj. hledání takového bodu $X \in p$, aby $|AX| + |BX|$ bylo minimální.

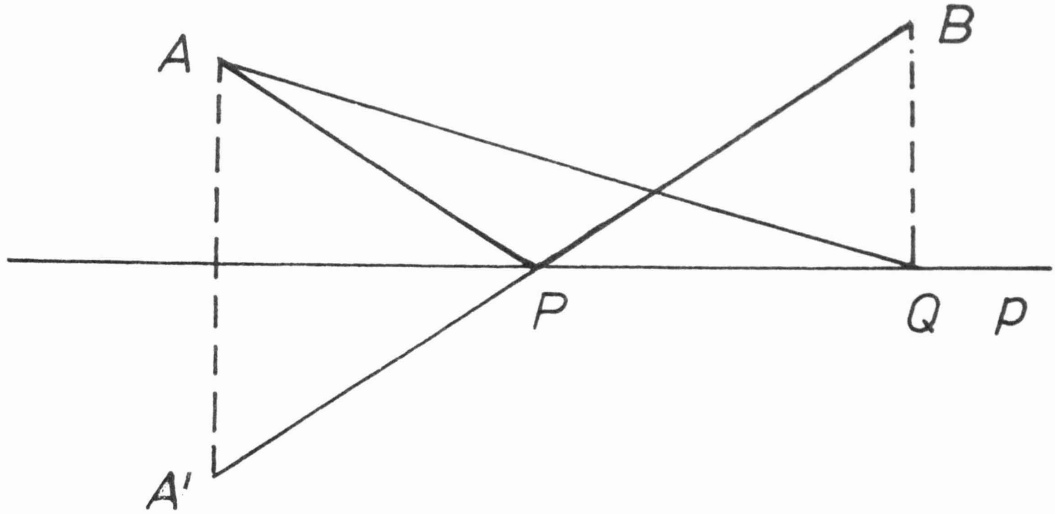


Obr. 1

Nakonec jsem usoudil, že bych to mohl ukončit nějakým příkladem ze života.

Příklad ze života:

Nedaleko potoka máme chatu A a skleník B. V chatě vezmeme konev, jdeme k potoku, nabereme vodu a jdeme do skleníku zalévat. Ve kterém místě u potoka nabereme do konve vodu, aby cesta z chaty do skleníku byla nejkratší?



Obr. 2

Samozřejmě jsem očekával řešení v duchu předcházející diskuse. Reakce studentů byla spontánní, zdálo se, že je všechno jasné, že nabereme vodu v bodě P (viz obr. 2). Najednou se přihlásila trojkařka Kodytková[1]. Prohlásila, že ona by nabrala vodu v bodě Q. Když jsem se jí zeptal, jak na to přišla, dostalo se mi následujícího vysvětlení:

No přece když jdu k potoku, tak mám konev prázdnou, ale když jdu od potoka ke skleníku, tak je konev plná vody a je těžká.

Byl jsem ohromen touto jasnou a logickou úvahou. Následovala všeobecná diskuse. Snažil jsem se studentům vysvětlit, že tím nebyla vyvrácena trojúhelníková nerovnost, ale že se jedná o jinou situaci. Nošení prázdné konve by mohlo být placeno např. 1 Kč za 100 metrů, zatímco nošení plné konve by stálo 5 Kč za 100 metrů. Potom bychom se však ptali jinak. Kde nabereme vodu u potoka, aby **cena** (nikoli **cesta**) byla minimální? Diskusi přerušilo zvonění. Zasvěcení jistě poznali, kam tato problematika patří.

Přiznávám, že jsem o této příhodě hovořil s řadou kolegů mimo Jevíčko; získal jsem dojem, že je to pobavilo, což mě povzbudilo,

[1] Anička Kodytková — viz Učitel matematiky 3(1994/95), č. 3, str. 58.

abych uvažoval o tom, že to nějak sepíši. Tady je však kámen úrazu.

Věřím, že většině z vás se občas něco zajímavého v hodině matematiky přihodí. Napadne vás, že byste o tom mohli něco napsat a podělit se tak s ostatními o svou radost, když už vaši nejbližší kolegové ve škole nemají čas vás vyslechnout. Nakonec však k napsání a odeslání článku do redakce nedojde, protože zjistíme, že nejsme schopni dostat na papír atmosféru vyučovací hodiny, dialogy se studenty, gestikulaci, pohyb po třídě atd. To, co se zdálo ve třídě velmi zajímavé a jasné, postupně bledne. Když to člověk přece jenom napíše, tak zjistí, že to není ono, že nestojí za to se tím dále trápit. Já tyto pocity velmi dobře znám. Přesto však tvrdím, že to za to stojí, že je třeba tu kůži na trh nést, protože takové zážitky z výuky mohou obohatit učitele matematiky někdy více než třeba fundovaný odborný článek. (Ten si ovšem také netroufáme napsat, protože nám chybí dostatek sebevědomí a důvěry ve vlastní síly; vždyť ani nevyřešíme — bez autorského návodu — příklady MO kategorie A.) Rád bych tímto článkem, pokud bude přijat[2], povzbudil všechny kolegy, kteří nosí svůj článek v hlavě nebo ho mají v šuplíku, aby ho dali na papír a poslali do *Učitele matematiky* nebo do jiného časopisu. Vězte, že práce vynaložená na sepsání takového článku, ať už bude nebo nebude otištěn, se vám vyplatí. Třeba si toho všimne váš pan ředitel[3], když ho na to nenápadně upozorníte, a určitě vám přidá. Mám na mysli přidání peněz.

Vidím, že jsem se až příliš rozpovídal; pan recenzent Jan Přísný by mně mohl napsat, že vařím z vody a ať se raději obrátím na nedělní rubriku některého deníku a neobtěžuji váženou redakci váženého časopisu *Učitel matematiky.*

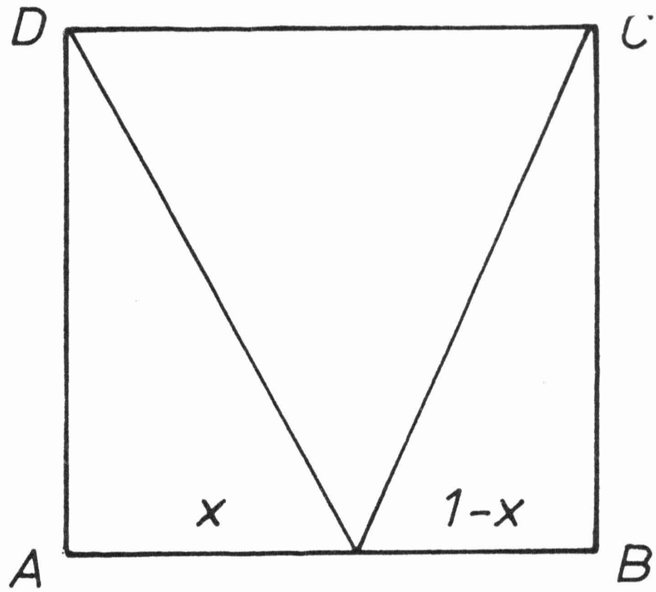
Nyní se tedy pustím do odborné stránky zde diskutovaného problému a budu matematizovat reálnou situaci — nošení vody v konvi z potoka. K úplnému řešení tohoto problému by bylo vhodné vedle matematizace provést ještě patamatematizaci, což

[2] Redakce článek přijala na doporučení vedoucího redaktora. Pozn. red.

[3] Ředitel gymnázia v Jevíčku — viz profil autora článku. Pozn. red.

je však doména doc. dr. E. Caldy, CSc., HgS., FeM. Vím však, že je v současné době velice zaneprázdněn teorií panáků, konkrétněji kauzalitami typu[4]:

když Ti to nepůjde, tak si dej panáka a pokus opakuj,
když Ti to nepůjde, tak si dej panáka a pokus opakuj,
když Ti to nepůjde, tak si dej panáka a pokus opakuj,
......



Obr. 3

Přistupme nyní už definitivně k matematizaci nošení vody v konvi. Celou situaci budeme modelovat na jednotkovém čtverci $ABCD$ na obr. 3. Body D, C představují v tomto pořadí chatu a skleník, úsečka AB pak část břehu potoka. Bod $Q \in AB$ je místo nabrání vody do konve. Označme dále $|AQ| = x$. Cena za nošení prázdné konve nechť je 1 Kč za 1m a cena za nošení konve s vodou nechť je c Kč za 1 m (předpokládáme, že $c > 1$). Celková cena y za odnesení prázdné konve z bodu D do bodu Q a plné konve z bodu Q do bodu C je tedy dána vztahem

$$y = |DQ| + c|QC| \, .$$

[4] Viz ***Průvodce společenským večírkem***, Sborník 5. setkání matematiků všech typů a stupňů škol, Plzeň 1995, str. 125.

Po dosazení dostáváme

$$y = \sqrt{1+x^2} + c\sqrt{1+(1-x)^2}\,. \tag{2}$$

Naším úkolem je najít minimum funkce (2). Je

$$y' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{c(1-x)}{\sqrt{1+(1-x)^2}}\,.$$

Položíme-li $y' = 0$, pak po úpravách dostáváme

$$(1-c^2)x^4 - 2(1-c^2)x^3 + 2(1-c^2)x^2 + 2c^2x - c^2 = 0\,. \tag{3}$$

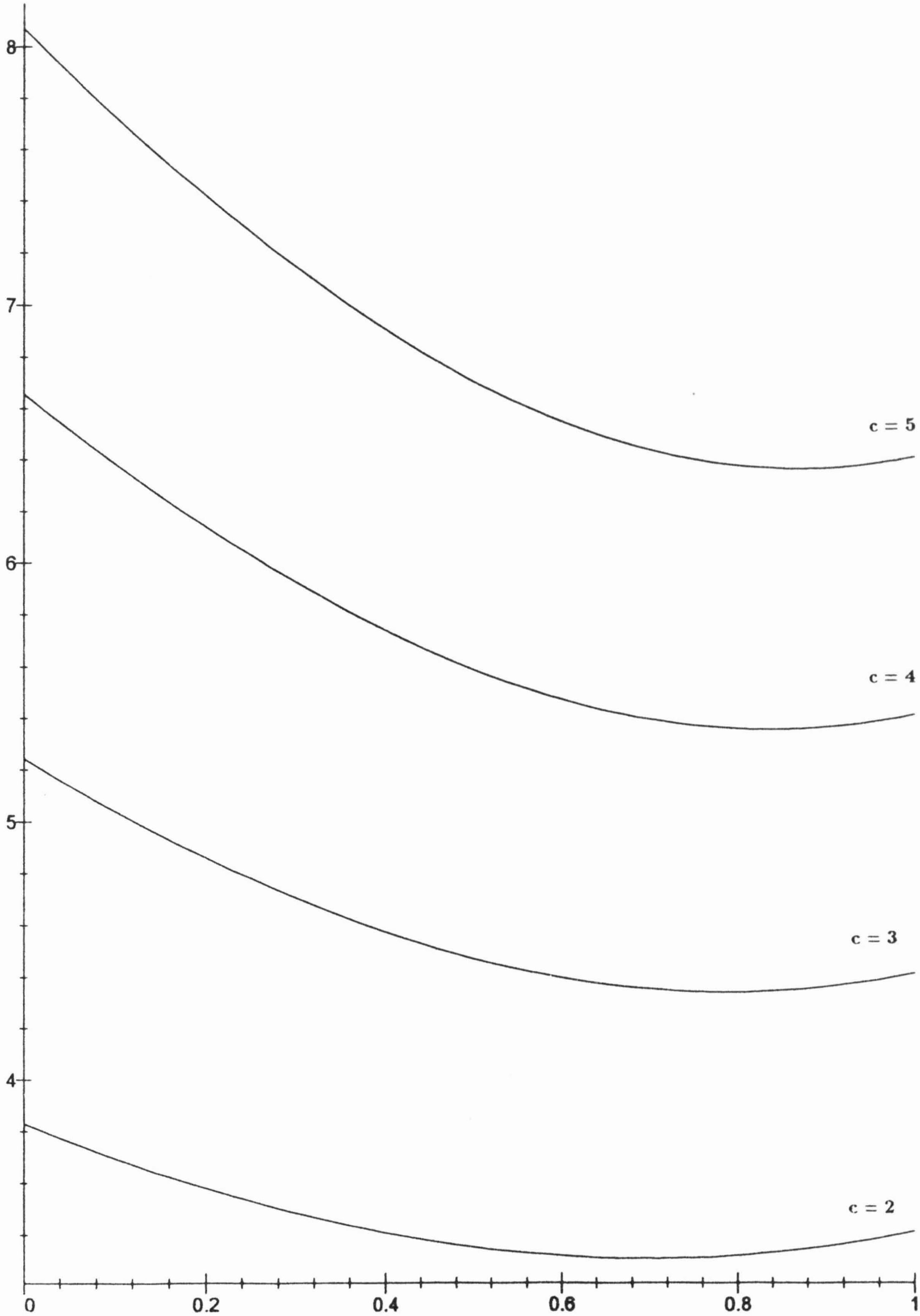
Vydělíme-li rovnici (3) výrazem $(1-c^2)$ — viz předpoklad $c > 1$, získáme rovnici (4), která nás však nijak nepotěší:

$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 + \frac{2c^2x}{1-c^2} - \frac{c^2}{1-c^2} = 0 \tag{4}$$

Rovnice (4) ukazuje, kam až se můžeme dostat při matematizaci problému, kterým je nošení konve s vodou. Dokonce mě napadá, že bychom takovou rovnici měli zatajit před zahrádkářskou veřejností, kde nošení konve s vodou představuje standardní bezproblémovou záležitost, a jsou zde oprávněné obavy z poklesu prestiže matematiky v očích zahrádkářů. O to víc nabývá na významu případná patamatematizace celého problému, která by mohla naopak prestiž matematiky u zahrádkářů pozvednout. Záleží ovšem na tom, zda doc. dr. E. Calda, HgS., FeM. zvedne hozenou rukavici.

Přiznávám dobrovolně, že jsem v tuto chvíli měl matematizace dost. Rovnice (4) člověka příliš nemotivuje k další práci a já jsem neměl dostatek sil, odvahy a důvtipu k jejímu řešení klasickými metodami. Požádal jsem proto o spolupráci kolegy v Praze, Ostravě, Zlíně, New Yorku a Basileji. Pomoc nakonec přišla ze Zlína. Ve spolupráci s RNDr. Danou Škabrahovou byla úloha řešena užitím programu MAPLE V. Výsledky jsou uvedeny na obr. 4.[5]

[5] Výslednou úpravu obrázku provedl RNDr. Roman Plch z katedry matematiky PřF MU v Brně, přestože brněnské kolegy autor článku o pomoc nepožádal. Pozn. red.



Obr. 4

Hodnoty pro x_{min} v závislosti na hodnotě parametru c jsou následující:

$$c = 2 \quad x_{min} = 0.7005345341\ ,$$

$$c = 3 \quad x_{min} = 0.7889841028\ ,$$

$$c = 4 \quad x_{min} = 0.8373875086\ ,$$

$$c = 5 \quad x_{min} = 0.8677772400\ .$$

Co říci na závěr. Snad jenom to, že učit matematiku je někdy velké dobrodružství. Z nevinné úlohy o nošení vody v konvi se dostanete k rovnicím čtvrtého stupně s parametrem, k počítačovým matematickým programům, a přitom všem prožijete řadu pěkných chvil, které vám zpříjemní náročnou práci učitele matematiky. Tak nezapomeňte a neváhejte napsat o svých příhodách. Nemusí to být v TEXu, ani nemusíte používat mohutný matematický software.

★ ★ ★