Karel Mačák

Přibližná konstrukce pravidelných mnohoúhelníků

Učitel matematiky, Vol. 4 (1996), No. 4, 194–200

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/151427

PŘIBLIŽNÁ KONSTRUKCE PRAVIDELNÝCH MNOHOÚHELNÍKŮ

KAREL MAČÁK

Eukleidovské konstrukce pravidelných n-úhelníků vepsaných do dané kružnice patří ke klasickým problémům antické matematiky (viz např. [1]) a (přinejmenším) pro $n = 3, 4, 6$ patří dodnes ke klasickým úlohám školské geometrie. Definitivní odpověď na otázku, pro která n je eukleidovská konstrukce pravidelného n-úhelníku možná, dal až Karl Friedrich Gauss (1777–1855) ve své knize *Disquisitiones arithmeticæ* (1801), když dokázal, že pravidelný n-úhelník lze sestrojit eukleidovsky právě tehdy, má-li číslo n tvar

$$n = 2^k p_1 p_2 \dots p_m ,$$

kde k je celé nezáporné číslo a $p_1, p_2, \dots, p_m$ jsou navzájem různá prvočísla tvaru

$$F(r) = 2^{2^r} + 1,$$

kde r je celé nezáporné číslo[1]. Z toho plyne, že např. pravidelný sedmiúhelník, devítiúhelník a řadu dalších nelze eukleidovsky sestrojit; má tedy smysl hledat jejich přibližné konstrukce, které by byly dostatečně jednoduché a přitom uspokojivě přesné. Jedna taková historická konstrukce zde bude popsána.

[1] Taková prvočísla se nazývají Fermatova; je známo, že čísla $F(0) = 3$, $F(1) = 5$, $F(2) = 17$, $F(3) = 257$ a $F(4) = 65\,537$ jsou prvočísla. Fermat předpokládal, že všechna čísla $F(r)$ dle (2) jsou prvočísla, ale už L. Euler dokázal, že

$$F(5) = 2^{32} + 1 = 641 \cdot 6\,700\,417$$

a tedy není prvočíslo; dodnes není známo žádné další Fermatovo prvočíslo a není ani známo, zda Fermatových prvočísel je konečně či nekonečně mnoho (viz např. [2], str. 144).

Historická konstrukce

V r. 1731 vyšla v Augsburgu učebnice geometrie[2], jejíž úplný titul zněl:

Herrn BURKHARD VON PÜRCKENSTEIN, *Weyland Josephi, des glorwürdigsten Röm. Kaysers Mathematici* AUSERLESENER ANFANG ZU DENEN HÖCHST–NÜTZLICHEN MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN, *worinnen man durch eine gar leichte, und neue Art, sich einen geschwinden Grund zur Feld–messerey, und andern daraus entspringenden Wissenschaften machen kan. Samt einem Anhang oder Beschreibung, derer in denen Geometrischen Kupffer–Figuren beygefügten Ungarischen Städten, Vestungen, und Schlössern, unter welchen nicht wenige, so bishero in keinem Reyß– und Landbeschreibungen des Königreichs Ungarn vor Augen gelegt worden, befindlich sind.*
Mit 123. Kupffern geziert. Augsburg, Verlegts David Raymund Werk, und Johann Jacob Mayer, MDCCXXXI.

(Pana BURKHARDA VON PÜRCKENSTEINA, Weylanda Josefa, matematika nejvznešenějšího císaře římského, VYBRANÝ POČÁTEK NEJVÝŠE NUTNÝCH MATEMATICKÝCH VĚD, ve kterém si lze zcela lehkým a novým způsobem získat rychlý základ k zeměměřičství a jiným z toho plynoucím vědám. S dodatkem čili popisem uherských měst, pevností a zámků, které jsou připojeny ke geometrickým mědirytinám a z nichž nemálo nebylo dosud vyobrazeno v žádném cestopisu ani zeměpisu. Ozdobeno 123 mědirytinami. Augsburg ... 1731.)

Obsah knihy tvoří 104 řešených geometrických úloh; z řešení je jasné, že jsou povolena pouze eukleidovská řešení, i když se tento pojem v knize vůbec neobjevuje. Ke každé úloze je připojen samostatný obrázek s řešením; řešení jsou podána bez jakéhokoli rozboru nebo důkazu, zcela v podobě jakéhosi „technologického postupu“: zabodni kružidlo do bodu ..., opiš kružnici, prolož přímku body ... atd. Sedmá úloha třetí kapitoly je věnována

---

[2] Vycházíme zde z exempláře nalezeného v knihovně kostela sv. Kříže v Liberci.

konstrukci pravidelného n-úhelníku; její zadání zní:

In einen jeden vorgegebenen Circkel ein solches Regular Viel-Ecke einzuschreiben, als man verlangt, oder den Circkel-Grenz in so viel gleiche Theile abzutheilen, als man begehrt.

(Do daného kruhu vepsat takový mnohoúhelník, jaký je požadován, nebo hranici kruhu rozdělit na tolik stejných částí, kolik je požadováno.)

V době vydání této knihy ještě nebylo známé konečné řešení tohoto problému a Pürckenstein uvádí bez důkazu následující řešení[3] (viz obr. 1):

Der gegebene Circkel seye AkB; man verlanget z. B. darein ein Regular-Dreyzehn-Eck einzuschreiben.

Hand-Griff.

Ziehe den Diameter AB aus dem Punct A. Ziehe nach gebührlicher Länge eine gerade Linie AC, trage darauf (angefangen von dem Punct A) gleiche dreyzehen Theil. Ziehe zusammen den letzten Theil mit einer Linie aus B. Durch den Theil oder Zahl 2 ziehe die gerade Linie EFD, welche parallel laufe mit der Linie 13,B und den Diameter durchschneide in dem Punct F. Fasse unterdessen die Weite des Diameters AB und schreibe aus denen zwey Puncten AB zwey gleiche Bögen, welche sich durchcreutzen in G. Aus dem Punct G und durch den Durchschnitts-Punct F ziehe eine gerade Linie GHF. Der Theil AH wird ein dreizehender Theil seyn nach dem Verlangen.

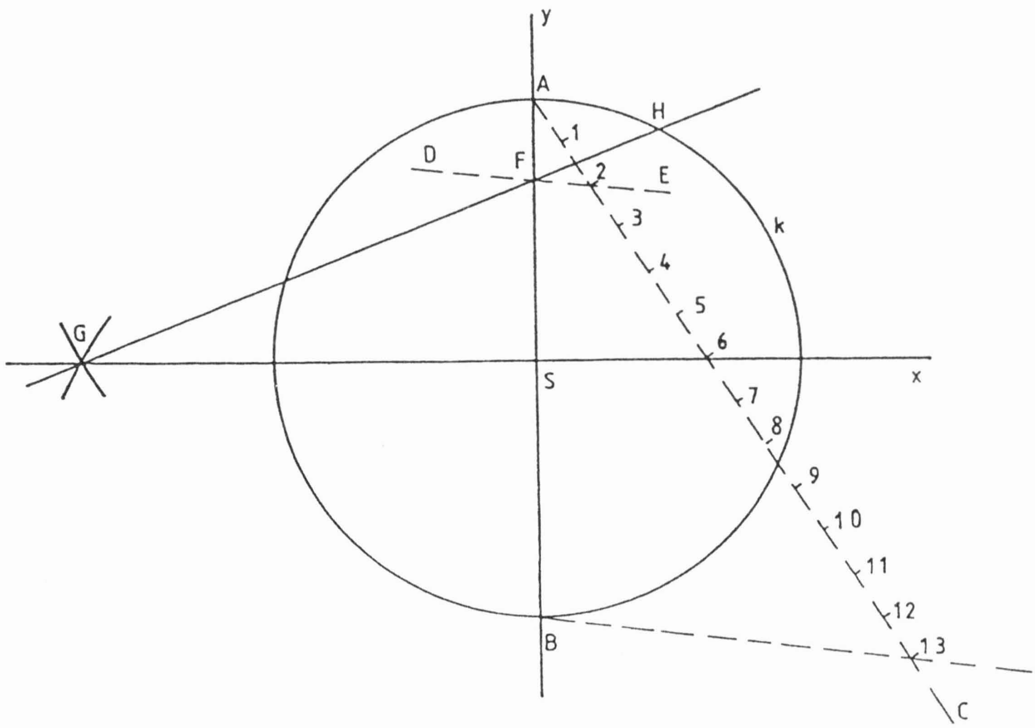
(Daný kruh budiž AkB; je požadováno např. vepsat do něj pravidelný třináctiúhelník.

Postup.

Narýsuj průměr AB z bodu A. Narýsuj přímku AC náležité délky, nanes na ni (počínaje z bodu A) stejných třináct dílů. Narýsuj přímku spojující poslední díl a bod B. Dílem nebo číslem 2 narýsuj přímku EFD, která probíhá rovnoběžně s přímkou 13,B a protíná průměr v bodu F. Vezmi mezitím délku průměru AB a opiš z oněch dvou bodů AB dva stejné oblouky, které se překříží

[3] Podle [3], str. 672, je jeho autorem francouzský mědirytec a geometr Abraham de Bosse (1602–1676), který ho uveřejnil ve své knize *Traité de pratiques géométrales et perspectives* (1665).

v G. Z bodu G prolož průsečíkem F přímku GHF. Díl AH bude třináctým dílem podle požadavku.)



Obr. 1

Konstrukce pravidelného třináctiúhelníku podle Pürckensteina[4]

Prozkoumejme tuto konstrukci pomocí obr. 1 metodami analytické geometrie, ale pro obecný počet vrcholů n; poloměr dané kružnice přitom budeme považovat za jednotkový, tj. $|AS| = 1$. Pak z konstrukce plyne, že bod F má souřadnici

$$y_F = 1 - \frac{4}{n}$$

a bod G má souřadnici

$$x_G = -\sqrt{3}\,.$$

[4] V Pürckensteinově knize nejsou v obrázku nakresleny souřadnicové osy.

Kdyby byla konstrukce přesná, pak by bod H měl souřadnice

$$x_H = \sin\frac{2\pi}{n}, \; y_H = \cos\frac{2\pi}{n}$$

a body F, G, H by ležely na přímce. Abychom tedy ověřili přesnost konstrukce, vypočítejme nyní souřadnice x_H^* průsečíku přímky FG, která má rovnici

$$y = \frac{1-\frac{4}{n}}{\sqrt{3}} \cdot x + 1 - \frac{4}{n}\,,$$

s danou kružnicí $x^2 + y^2 = 1$. Dostáváme

$$x_H^* = \frac{\sqrt{3 - 2(1-\frac{4}{n})^2 - (1-\frac{4}{n})^2}}{(1-\frac{4}{n})^2 + 3} \cdot \sqrt{3}\,,$$

z čehož lze porovnáním s (3) snadno zjistit, že pro $n = 3$, 4 a 6 je $x_H^* = x_H$ a tedy pro $n = 3$, 4 a 6 je Pürckensteinova konstrukce přesná[5]. Pro $n \geq 4$ lze absolutní chybu konstrukce středového úhlu $\angle ASH$ (ve stupních) vyjádřit vzorcem

$$\Delta_A(n) = (\arcsin x_H^* - \frac{2\pi}{n}) \cdot \frac{180}{\pi}$$

a relativní chybu této konstrukce (v procentech) lze vyjádřit vzorcem

$$\Delta_R(n) = \Delta_A(n) \cdot \frac{5n}{18}\,.$$

Vzorce (4), (5) byly prozkoumány na PC pomocí programového produktu *Mathematica.* Bylo zjištěno, že pro žádná další n (kromě již uvedených hodnot $n = 4$ a 6) není $\Delta_A(n) = 0$; maximální absolutní chyba je cca $0{,}64^\circ$ pro $n = 22$ a

$$\lim_{n\to\infty} \Delta_A(n) = 0\,.$$

---

[5] Z hlediska školské geometrie je správnost Pürckensteinovy konstrukce pro $n = 4$ zřejmá, pro $n = 3$ a $n = 6$ ji lze dokázat pomocí podobnosti trojúhelníků.

Relativní chyba roste pro $n \geq 6$, ale je ohraničená; platí

$$\lim_{n\to\infty} \Delta_R(n) = 100(\frac{2\sqrt{3}}{\pi} - 1) \doteq 10,26\% \, .$$

Pürckensteinova konstrukce je tedy přesná jen pro $n = 3, 4$ a 6, přesto ji však považujeme za zajímavou i z dnešního hlediska. Je univerzální, poměrně přesná a hlavně velice jednoduchá; vyžaduje pouze znalost sestrojení rovnostranného trojúhelníku a rozdělení úsečky na n stejných dílů, takže je v dosahu možností žáků základní školy.

Slušelo by se uvést na závěr nějaké informace o panu von Pürckensteinovi, ale bohužel se nám o něm nepodařilo zjistit vůbec nic. Není uveden v žádné nám dostupné knize vztahující se k dějinám matematiky. Z jeho knihy je jasné, že nebyl žádným teoretikem; zřejmě patřil k „praktickému“ proudu matematiky, který byl pěstován mimo rámec univerzit (srovnej např. [4]), čemuž by nasvědčovala i skutečnost, že jeho kniha je napsána německy, nikoli latinsky, jak bylo u odborných knih té doby zvykem.

Závěrečná poznámka

Vraťme se ještě k otázce přesné (tj. eukleidovské) konstrukce pravidelných n-úhelníků a shrňme základní fakta o jejich sestrojování pro „malá“ $n \leq 20$. Jak už bylo řečeno, pro $n = 3, 4$ a 6 se jedná o klasickou školní úlohu; protože rovněž půlení úhlu je klasická školní úloha, lze snadno setrojit i pravidelný osmi-, dvanácti-, šestnáctiúhelník atd. Poněkud horší je situace s pravidelným pětiúhelníkem (a tedy i deseti-, dvacetiúhelníkem atd.); tomu se sice obdivovali už pythagorejci (viz např. [1], str. 56), ale (dle zkušeností autora tohoto příspěvku) studenti přicházející na vysokou školu jeho konstrukci málokdy znají. Z (1) a (2) plyne, že pravidelný sedmi-, devíti-, jedenácti-, třinácti- a čtrnáctiúhelník nelze eukleidovsky sestrojit. Pravidelný patnáctiúhelník uměli sestrojit už staří Řekové; v Eukleidových *Základech* je jeho konstrukce popsána v poslední (šestnácté) větě čtvrté knihy[6]. Pravidelný sedmnáctiúhelník sestrojil jako první K. F. Gauss v r. 1796 a pod vlivem tohoto objevu se rozhodl pro studium matematiky; do té doby také uvažoval o studiu klasické filologie a byl i v této oblasti považován za nadaného (dle [5]). Pravidelný osmnácti- a devatenáctiúhelník dle (1) a (2) nelze eukleidovsky sestrojit.

Pro milovníky „velkých" pravidelných n-úhelníků ještě uveďme, že K. F. Gauss údajně nalezl i konstrukci pravidelného n-úhelníku pro $n = F(3) = 257$ a popsal ji na více než 150 stranách (dle [6], str. 201; citace původního pramene není bohužel uvedena).

Literatura

[1] BEČVÁŘ, J.: *Hrdinský věk řecké matematiky.* In: Historie matematiky I. Sborník semináře pro vyučující na středních školách, Jevíčko, srpen 1993. JČMF, Brno 1994.

[2] FUCHS, E.: *Co ještě nevíme o prvočíslech.* Ibid.

[3] CANTOR, M.: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.* Bd. II., Teubner, Leipzig 1900.

[4] NOVÝ, L.: *Učebnice praktické geometrie v Čechách ke konci 1. poloviny 18. století.* In: Sborník pro dějiny přírodních věd a techniky III, str. 153–178. Praha 1957.

[5] WUSSING, H.: *Karl Friedrich Gauss.* Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 22(1977), 195–204.

[6] *Enciklopedičeskij slovar junogo matematika.* Pedagogika, Moskva 1985.

[6] Jedná se vlastně o odečtení středového úhlu pravidelného desetiúhelníku (36°) od středového úhlu pravidelného šestiúhelníku (60°), čímž se získá středový úhel 24° potřebný k sestrojení pravidelného patnáctiúhelníku.