Učitel matematiky

Emil Calda

Jaká je rovnice kruhu?

Učitel matematiky, Vol. 5 (1997), No. 1, 22–25

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/151413

JAKÁ JE ROVNICE KRUHU ?

EMIL CALDA

Většina středoškoláků na tuto otázku odpoví, že kruh žádnou rovnici nemá. Z odpovědí ostatních vyplývá, že si buď pletou kruh s kružnicí nebo rovnici s nerovnicí. Tyto odpovědi odrážejí fakt, že se studenti nesetkávají s tím, že by nějaký rovinný útvar byl vyjádřen rovnicí. Jsou zvyklí na to, že rovnicemi jsou vyjádřeny křivky (přímka, kružnice, parabola, graf funkce), zatímco rovinné oblasti jsou obvykle zapsány nerovnicí — např. $x^2 + y^2 \leq 1$ je jednotkový kruh se středem v počátku, $y \leq x$ je polorovina s hraniční přímkou $y = x$ a vnitřním bodem $[1; 0]$ atd. Tento fakt je velmi dobrým příkladem *nechtěného efektu*: v žádné učebnici není napsáno, že rovnicí lze vyjádřit pouze křivku a že rovinné útvary lze vyjádřit pouze nerovnicí nebo soustavou nerovnic, a přesto u studentů tento dojem v průběhu školní výuky vzniká. V následujících řádcích se ho pokusíme vyvrátit.

Vezměme tedy jednotkový kruh se středem v počátku, jehož analytické vyjádření je $x^2+y^2 \leq 1$ neboli $1-x^2-y^2 \geq 0$. K tomu, abychom toto vyjádření mohli zapsat jako rovnici, použijeme větu, která je tak jednoduchá a samozřejmá, že ji nejspíše nikde nenajdete:

$$\forall a \in \mathbb{R};\ a \geq 0 \Leftrightarrow |a| - a = 0 \tag{1}$$

Důkaz neuvádím; nikoli proto, že ho neznám, ale protože nepochybuji o tom, že ho každý čtenář vidí na první pohled. Vzhledem k tomu, že číslo $1 - x^2 - y^2$ je reálné, je podle (1) nerovnice $1 - x^2 - y^2 \geq 0$ ekvivalentní s rovnicí

$$|1 - x^2 - y^2| - 1 + x^2 + y^2 = 0\,,$$

což je hledaná rovnice jednotkového kruhu se středem v počátku.

Mírná komplikace může vzniknout, chceme-li vyjádřit rovnicí pouze vnitřek uvedeného kruhu; analytické vyjádření této oblasti dané nerovnicí $x^2 + y^2 < 1$ nebo–li $1 - x^2 - y^2 > 0$ nemůžeme převést na rovnici podle (1). Snadno však přijdeme na to, jak tuto větu upravit; platí zřejmě

$$\forall a \in \mathbb{R};\ a > 0 \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{|a|} - \frac{1}{a} = 0$$

neboli

$$\forall a \in \mathbb{R};\ a > 0 \ \Leftrightarrow\ \frac{a}{|a|} - 1 = 0\,. \tag{2}$$

V našem případě tak dostáváme, že rovnice jednotkového kruhu se středem v počátku a bez hraniční kružnice je

$$\frac{1 - x^2 - y^2}{|1 - x^2 - y^2|} - 1 = 0\,.$$

Představme si nyní, že máme dány rovnice dvou rovinných útvarů a že chceme jedinou rovnicí vyjádřit jejich průnik. Umožní nám to následující věta, kterou studenti znají spíše ve tvaru implikace:

$$\forall a, b \in \mathbb{R};\ (a = 0 \wedge b = 0) \ \Leftrightarrow\ a^2 + b^2 = 0 \tag{3}$$

Odvoďme s její pomocí např. rovnici prvního kvadrantu, tj. rovnici útvaru, který je analyticky vyjádřen soustavou nerovnic $x > 0 \wedge y > 0$. Postupně dostaneme, že pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí:

$$(x > 0 \wedge y > 0) \ \Leftrightarrow\ \left(\frac{x}{|x|} - 1 = 0 \ \wedge\ \frac{y}{|y|} - 1 = 0\right) \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \left(\frac{x}{|x|} - 1\right)^2 + \left(\frac{y}{|y|} - 1\right)^2 = 0\,.$$

Úpravou poslední rovnice získáme velice pohlednou rovnici

$$\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} = 2\,,$$

o níž by patrně málokdo ze studentů řekl, že je to rovnice prvního kvadrantu.

Chceme–li jedinou rovnicí vyjádřit sjednocení rovinných útvarů, které jsou dány svými rovnicemi, použijeme známou větu

$$\forall a, b \in \mathbb{R}; (a = 0 \vee b = 0) \Leftrightarrow ab = 0 . \tag{4}$$

Určeme na ukázku rovnici útvaru, který je sjednocením prvního a třetího kvadrantu. První kvadrant, jak už jsme zjistili, má rovnici

$$\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} - 2 = 0 ;$$

rovnici třetího kvadrantu můžeme odvodit podobným způsobem. Můžeme ji však dostat přímo, píšeme–li v rovnici prvního kvadrantu $-x$ místo x a $-y$ místo y :

$$\frac{-x}{|-x|} + \frac{-y}{|-y|} - 2 = 0$$

neboli

$$\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} + 2 = 0 .$$

Pro sjednocení obou kvadrantů dostáváme rovnici

$$\left(\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} - 2\right) \cdot \left(\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} + 2\right) = 0 ,$$

kterou snadno upravíme na tvar

$$\frac{xy}{|xy|} - 1 = 0 .$$

Zkusme ještě vyjádřit rovnici útvaru, který je v dané rovině doplňkem daného útvaru. Má–li daný útvar rovnici $f(x, y) = 0$, má jeho doplněk vyjádření $f(x, y) \neq 0$, které zapíšeme jako rovnici pomocí věty:

$$\forall a \in \mathbb{R}; \ a \neq 0 \Leftrightarrow \frac{a}{a} - 1 = 0 . \tag{5}$$

Odvoďme pro ilustraci rovnici útvaru U, který se skládá ze všech bodů roviny vyjma bodu $[x_0, y_0]$. Rovnici útvaru skládajícího se z jediného bodu $[x_0, y_0]$ dostaneme jako rovnici průniku útvarů o rovnicích $x - x_0 = 0$ a $y - y_0 = 0$; víme už, že to je rovnice $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 0$. Doplněk daného jednobodového útvaru, tj. útvar U, má analytické vyjádření $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \neq 0$, takže podle (5) je rovnice útvaru U tato:

$$\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} - 1 = 0 \,.$$

Závěrem bych rád podotkl, že si uvědomuji, že praktický význam celé této „teorie“ je mizivý; domnívám se však, že v rukách pedagoga poněkud hravého může přispět k oživení a zpestření probírané látky. Uveďme jako příklad nedávno nalezenou uměleckou kompozici profesora Ypsilona:

$$\begin{gathered}[(|4 - x| - 4 + x)^2 + (|\log_2 x - y| - \log_2 x + y)^2 + \\ +(|y - \log_{\frac{1}{2}} x| + \log_{\frac{1}{2}} x - y)^2] \cdot [(|x - \tfrac{1}{4}| + \tfrac{1}{4} - x)^2 + \\ +(|y - \log_2 x| - y + \log_2 x)^2 + (|\log_{\frac{1}{2}} x - y| - \log_{\frac{1}{2}} x + y)^2] \,.\end{gathered}$$

Přetaví-li si laskavý čtenář toto dílo do oblasti zrakového vnímání, dostane obraz poraženého kalicha. tragickou připomínku bitvy u Lipan: