Emil Calda
Zákon lomu aneb nošení vody v konvi

Učitel matematiky, Vol. 5 (1997), No. 1, 19–21

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/151412

ZÁKON LOMU ANEB NOŠENÍ VODY V KONVI

EMIL CALDA

V článku „Trojúhelníková nerovnost aneb nošení vody v konvi“ (viz [4]) vyjadřuje jeho autor RNDr. Dag Hrubý, prezident Klubu Paracelsus, obavy, že výsledky, ke kterým v něm dospívá, způsobí pokles prestiže matematiky v očích zahrádkářů a naléhavě mě žádá, abych zasáhl. Protože nemohu tuto žádost nevyslyšet, pokusím se v následujících řádcích ukázat, jak je možno úlohu o nošení vody vyřešit, aniž by tím matematika ve zmíněných kruzích utrpěla; vystačím přitom jen s elementárními matematickými znalostmi, takže vysoce náročné teorie patamatematické nebude vůbec zapotřebí.

Úloha o nošení vody v konvi, jak byla formulována v uvedeném článku, spočívá v určení takové polohy bodu Q na břehu potoka AB, abychom za donesení prázdné konve z chaty D do bodu Q a plné konve z bodu Q do skleníku C zaplatili co nejméně; přitom body A, B, C, D jsou vrcholy jednotkového čtverce, cena za přenesení prázdné konve o 1 m je 1 Kč a plné konve c Kč, kde $c > 1$ (viz obr. 1a). Autor úlohy vyjádří cenu y, kterou je nutno zaplatit, jako funkci f vzdálenosti x bodu Q od bodu A, tj. :

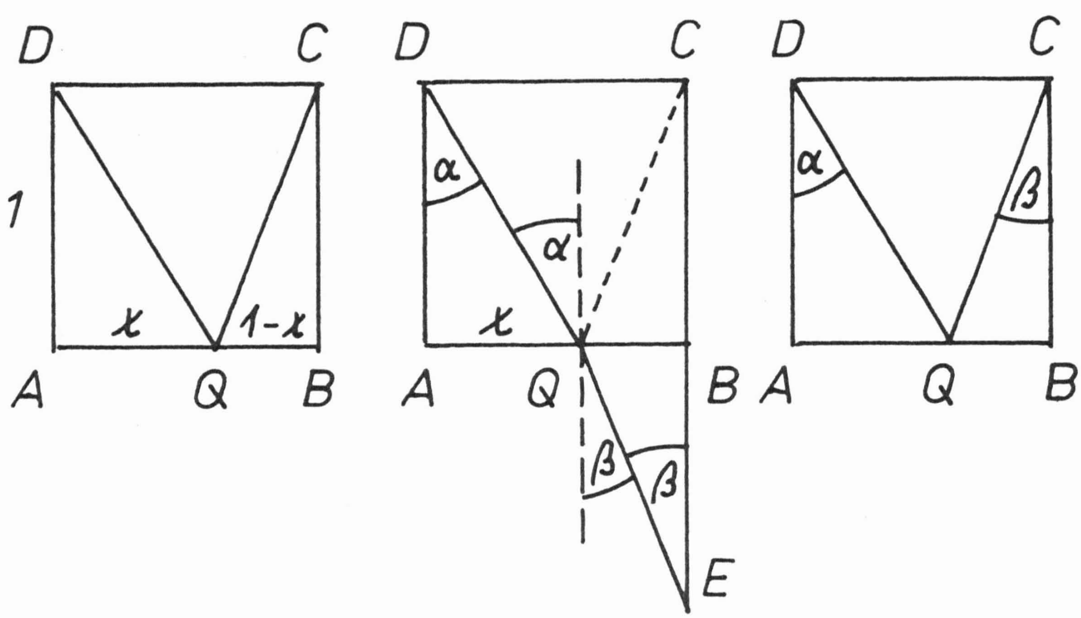
$$f : y = |DQ| + c|QC| = \sqrt{1 + x^2} + c\sqrt{1 + (1 - x)^2},$$

a z podmínky pro její minimum dojde k rovnici:

$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 + \frac{2c^2}{1 - c^2}x - \frac{c^2}{1 - c^2} = 0.$$

(Zvídavý čtenář se může přesvědčit, že tato rovnice je zvláštním případem rovnice (2) uvedené v [1], a to pro $a = b = e = 1$, $v_1 = 1$, $v_2 = \dfrac{1}{c}$). Autor ji však z důvodů, které jsou mi blízké a pochopitelné, raději neřeší a dává přednost tomu, že bod v němž funkce f nabývá svého minima, určí pro hodnoty $c = 2, 3, 4, 5$ pomocí tuzemských i zahraničních expertů a jejich počítačů.

Je jasné, že v tomto podání přesahuje řešení úlohy nejen znalosti průměrného zahrádkáře, ale i jeho možnosti výpočetně–technické. Naštěstí však můžeme polohu bodu Q určit i jiným způsobem – stačí si uvědomit, že v úloze o nošení vody v konvi jde vlastně o lom světla na rovinném rozhraní ! Všimneme–li si



Obr. 1 a, b, c

totiž, že daný problém se vůbec nezmění, když plnou konev z bodu Q poneseme nikoliv do bodu C ale do bodu E, který je s ním souměrně sdružený podle osy AB (viz obr. 1b), máme napůl vyhráno. Funkci f, jejíž minimum hledáme, vyjádříme ve tvaru:

$$f : y = |DQ| + c|QC| = \frac{|DQ|}{1} + \frac{|QE|}{\frac{1}{c}},$$

kde výraz $\dfrac{|DQ|}{1}$ interpretujeme jako dobu, za kterou světelný paprsek pohybující se v polorovině ABC rychlostí $v_1 = 1$ urazí vzdálenost $|DQ|$, a výraz $\dfrac{|QE|}{\frac{1}{c}}$ jako dobu, za kterou týž paprsek pohybující se v polorovině ABE rychlostí $v_2 = \dfrac{1}{c}$ urazí vzdálenost $|QE|$. Funkce f tedy představuje dobu, za kterou (za uvedených podmínek) světelný paprsek dorazí po lomu v bodě Q z bodu D do bodu E; její minimum máme určit. Tento výpočet si však můžeme ušetřit, víme-li, že doba potřebná k tomu, aby paprsek prošel zmíněnou dráhu, je minimální právě tehdy, když je splněn zákon lomu, tj. když platí:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{\frac{1}{c}} = c.$$

Hledaný bod Q je touto podmínkou jednoznačně určen; vrátíme-li se k původní úloze, je to takový bod úsečky AB na obr. 1c, pro nějž platí:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = c.$$

Je zřejmé, že tento výsledek umožňuje převážné většině zahrádkářů, aby si v případě potřeby bod Q určili experimentálně sami: stačí k tomu dva provázky k realizaci úseček DQ a BQ, úhloměr a kalkulačka, resp. běžné matematické tabulky. Měřením úhlů α, β pro různé body úsečky AB lze přibližně nalézt bod Q, v němž platí $\sin\alpha = c\sin\beta$.

Pro případ, že by se našel zahrádkář, který by se pokoušel o sestrojení bodu Q pouze pomocí kružítka a pravítka, upozorňuji na výsledek, který odvodili pánové L. Beran a E. Calda v [1]:

Při obecné poloze bodů X, Y ve dvou optických prostředích s různými rychlostmi šíření světla oddělených rovinným rozhraním nelze eukleidovsky sestrojit světelný paprsek procházející bodem X tak, aby po lomu na daném rozhraní procházel bodem Y.

K případnému dalšímu studiu této problematiky doporučuji [2]; ke studiu jakékoliv problematiky může být vhodné [3].

LITERATURA:

[1] Beran L., Calda E., *Eukleidovské konstrukce a lom světla I, II*, MFI **4, č. 1 a 2.**

[2] Calda L., *Odraz a lom světla a Fermatův princip*, Rozhledy MF **72 (1995), č. 2.**

[3] Kolektiv autorů, *Průvodce společenským večírkem*, Plzeň, 1995.

[4] Hrubý D., *Trojúhelníková nerovnost aneb nošení vody v konvi*, Učitel matematiky **4 (1996), č. 4(20).**