Učitel matematiky

Emil Calda

O jedné zajímavé posloupnosti

Učitel matematiky, Vol. 5 (1997), No. 2, 81–82

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/151400

O JEDNÉ ZAJÍMAVÉ POSLOUPNOSTI

EMIL CALDA

Na posloupnosti $\{a_n\}$, kde $a_n = \sqrt{1+24n}$, není na první pohled nic pozoruhodného. Stačí však, abychom vypočetli několik prvních členů, 5, $\sqrt{73}$, $\sqrt{97}$, 11, $\sqrt{145}$, 13, $\sqrt{193}$, $\sqrt{217}$, $\sqrt{241}$, $\sqrt{265}$, 17 $\sqrt{313}$, $\sqrt{337}$, 19, ... , a svůj názor nejspíše změníme. Zdá se, že v této posloupnosti jsou kromě čísel iracionálních už jenom prvočísla; možná, že vůbec všechna prvočísla větší než tři! Tyto domněnky nyní prozkoumáme. Budeme k tomu potřebovat následující jednoduché tvrzení: *Každé prvočíslo větší než tři je možno vyjádřit v tvaru* $6k \pm 1$, *kde* $k \in N$. (Uvědomte si, že každé přirozené číslo má některý z tvarů $6k$, $6k \pm 1$, $6k \pm 2$, $6k + 3$, kde $k \in N$, a že čísla $6k$, $6k \pm 2$ a $6k + 3$ prvočísla nejsou.)

Nejprve ověříme, že mezi členy posloupnosti $\{\sqrt{1+24n}\}$ jsou všechna prvočísla větší než tři. Zvolme tedy libovolné prvočíslo $p > 3$, zapišme je v tvaru $p = 6k \pm 1$, kde $k \in N$, a hledejme přirozené číslo n takové, že

$$\sqrt{1+24n} = 6k \pm 1.$$

Umocněním dostaneme

$$1 + 24n = (6k \pm 1)^2 = 36k^2 \pm 12k + 1 = 12k(3k \pm 1) + 1 \ ,$$

odkud

$$n = \frac{k}{2}(3k \pm 1) \ .$$

Snadno ověříme, že toto číslo vyhovuje původní rovnici; je rovněž jasné, že je to číslo přirozené.

Dokázali jsme tak, že každé prvočíslo větší než tři je členem uvažované posloupnosti. Čtenář však jistě vidí, že jsme dokázali o něco více: členem této posloupnosti je nejen každé prvočíslo větší než tři, ale každé přirozené číslo, které lze vyjádřit v tvaru $6k \pm 1$, kde $k \in N$. Členy zkoumané posloupnosti nejsou tedy kromě čísel iracionálních jen prvočísla, ale i některá jiná přirozená čísla. Snadno se můžeme přesvědčit, že

$$a_{26} = \sqrt{1 + 24 \cdot 26} = 25 = 6 \cdot 4 + 1,$$

$$a_{51} = \sqrt{1 + 24 \cdot 51} = 35 = 6 \cdot 6 - 1,$$

$$a_{100} = \sqrt{1 + 24 \cdot 100} = 49 = 6 \cdot 8 + 1 \quad \text{atd.}$$

Nyní ukážeme, že v posloupnosti $\{\sqrt{1+24n}\}$ nejsou jiná přirozená čísla než čísla tvaru $6k \pm 1$, kde $k \in N$. Je-li $\sqrt{1+24n}$ přirozené číslo, existuje $m \in N$ takové, že

$$1 + 24n = m^2 ,$$

odkud

$$n = \frac{(m-1)(m+1)}{24} .$$

Protože je n přirozené, je m liché, takže $m-1$ a $m+1$ jsou dvě po sobě jdoucí sudá čísla; jedno z nich je proto dělitelné čtyřmi, takže součin $(m-1)(m+1)$ je dělitelný osmi. Jedno z čísel $m-1$, $m+1$ musí být dále dělitelné třemi; vzhledem k tomu, že je sudé, je dělitelné šesti. Je tedy

$$m = 6k + 1 \quad \text{nebo} \quad m = 6k - 1, \text{ kde } k \in N.$$

Z předpokladu, že $\sqrt{1+24n}$ je číslo přirozené, jsme tak odvodili, že

$$\sqrt{1+24n} = 6k \pm 1, \quad k \in N .$$

Mezi členy posloupnosti $\{\sqrt{1+24n}\}$ nejsou tedy jiná přirozená čísla, než čísla tvaru $6k \pm 1$, kde $k \in N$.

Shrneme-li získané výsledky, vidíme, že svůj původní dojem o členech posloupnosti $\{\sqrt{1+24n}\}$ musíme poněkud opravit: mezi členy této posloupnosti jsou nejen všechna prvočísla větší než tři, ale vůbec všechna přirozená čísla, která lze vyjádřit ve tvaru $6k \pm 1$, kde $k \in N$. Otázku, do jaké míry jsou získané výsledky zajímavé, ponechávám na čtenáři; ten také sám nejlépe posoudí možnost jejich využití při procvičování některých partií (dělitelnost, posloupnosti).