Jaromír Šimša

38. mezinárodní matematická olympiáda MMO

Učitel matematiky, Vol. 6 (1998), No. 1, 44–47

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/151367`

38. MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

MMO

Letošní ročník této soutěže se konal od 18. do 31. července v argentinském městě Mar del Plata (asi 400 km jižně od Buenos Aires na pobřeží Atlantského oceánu). Zúčastnilo se ho 460 středoškoláků z 82 zemí celého světa. K tomuto v historii MMO rekordnímu počtu přispěla skutečnost, že pozvání na soutěž přijala poprvé řada zemí střední a jižní Ameriky.

Vedoucími delegace České republiky byli doc. Jaromír Šimša, CSc. (Matematický ústav AV ČR, pobočka Brno) a dr. Jaroslav Švrček, CSc. (Přírodovědecká fakulta UP Olomouc). Pro soutěž byla Ústředním výborem Matematické olympiády vybrána tato šestice žáků:

Libor Barto (3. roč. G Praha 1, Hellichova)
Pavel Podbrdský (3. roč. G Brno, tř. kpt. Jaroše)
Jan Spěvák (4. roč. G Praha 1, Hellichova)
Lukáš Vokřínek (2. roč. G Brno, tř. kpt. Jaroše)
Jan Vybíral (4. roč. G Bílovec)
Petr Zima (3. roč. G Kladno)

Několikaměsíční přípravě i vlastní akci věnoval početný štáb argentinských organizátorů velkou pozornost a píli, takže zahraniční účastníci se před odjezdem domů shodli na tom, že celý průběh soutěže i řady pestrých doprovodných akcí se obešel bez závad a nedostatků, vše bylo velmi dobře zajištěno. Funkci čestného předsedy Organizačního výboru přijal argentinský prezident Carlos Menem, na slavnostním zahájení i zakončení vystoupila s projevy tamní ministryně školství Susana Decibe. Od příjezdu soutěžících až do závěrečného vyhlášení výsledků byl průběh MMO podrobně sledován argentinským tiskem i televizí. Akce byla finančně podporována významnými firmami, hlavními sponzory byly společnosti IBM, Xerox Document Company, papírny Witcel a Telefónica de Argentina.

Soutěžící jako obvykle řešili v každém z obou soutěžních dnů po třech úlohách, za každou z nich mohli získat nejvýše 7 bodů, za celou soutěž tedy nejvíce 42 bodů. Podle skutečných bodových zisků všech 460 soutěžících rozhodla mezinárodní porota o tom, že zlatou medailí budou oceněni soutěžící, kteří dosáhli 35–42 bodů (bylo jich 39), stříbrnou 25–34 bodů (70 soutěžících) a bronzovou 15–24 bodů (122 soutěžících).

P. Podbrdský (35 b.) získal zlatou, L. Barto (30 b.) a J. Vybíral (27 b.) stříbrné, P. Zima (20 b.) a L. Vokřínek (18 b.) bronzové medaile, bez ocenění zůstal pouze J. Spěvák (9b.). Je to nesporně náš "úspěch pětiletí", vždyť zlatou medaili vybojovala naposledy J. Syrovátková v r. 1993.

I v neoficiálním pořadí družstev jsme dosáhli pěkného výsledku, a to 18. místa z 82 (loni 27. ze 75): 1. Čína (223 b.), 2. Maďarsko (219 b.), 3. Írán (217 b.), 4.–5. Rusko a USA (202 b.), 6. Ukrajina (195 b.), 7.–8. Bulharsko a Rumunsko (191 b.), 9. Austrálie (187 b.), 10. Vietnam (183 b.), 11. Jižní Korea (164 b.), 12. Japonsko (163 b.), 13. Německo (161 b.), 14. Tchaj-wan (148 b.), 15. Indie (146 b.), 16. Velká Británie (144 b.), 17. Bělorusko (140 b.), 18. **Česká republika** (139 b.), 19. Švédsko (128 b.), 20.–21. Polsko a Jugoslávie (125 b.), 22.–23. Izrael a Lotyšsko (124 b.), 24. Chorvatsko (121 b.), 25. Turecko (119 b.), 26. Brazílie (117 b.), 27. Kolumbie (112 b.), 28. Gruzie (109 b.), 29. Kanada (107 b.), 30.–31. Mongolsko a Hongkong (106 b.), 32.–33. Francie a Mexiko (105 b.), 34.–35. Arménie a Finsko (97 b.), 36. **Slovensko** (96 b.), 37.–38. Argentina a Holandsko (94 b.), 39. JAR (93 b.), 40. Kuba (91 b.), 41.–42. Belgie a Singapur (88 b.), 43. Rakousko (86 b.) ...

Na závěr uveďme zadání všech šesti soutěžních úloh (doplněné o názvy zemí, které je do soutěže navrhly):

1. (BĚLORUSKO) Body roviny s celočíselnými souřadnicemi jsou vrcholy jednotkových čtverců. Tyto čtverce jsou obarveny střídavě černě a bíle (jako na šachovnici).

Pro libovolnou dvojici kladných celých čísel m a n uvažujme pravoúhlý trojúhelník, jehož vrcholy mají celočíselné souřadnice a jehož odvěsny délek m a n leží podél stran čtverců.

Nechť S_1 je celkový obsah černé části trojúhelníku a S_2 celkový obsah jeho bílé části. Označme

$$f(m,n) = |S_1 - S_2|\,.$$

(a) Vypočtěte $f(m,n)$ pro všechna kladná celá čísla m a n, která jsou buď obě sudá, nebo obě lichá.
(b) Dokažte, že $f(m,n) \le \frac{1}{2}\max\{m,n\}$ pro všechna m a n.
(c) Ukažte, že neexistuje žádná konstanta C taková, že $f(m,n) < C$ pro všechna m a n.

2. (Velká Británie) Trojúhelník ABC má nejmenší úhel při vrcholu A. Body B a C rozdělují kružnici trojúhelníku opsanou na dva oblouky. Nechť U je vnitřní bod toho oblouku mezi body B a C, který neobsahuje bod A.

Osy úseček AB a AC protínají přímku AU po řadě v bodech V a W. Přímky BV a CW se protínají v bodě T.

Dokažte, že

$$|AU| = |TB| + |TC|.$$

3. (Rusko) Nechť $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou reálná čísla splňující podmínky:

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| = 1$$

a

$$|x_i| \le \frac{n+1}{2} \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Dokažte, že existuje pořadí $y_1, y_2, \ldots, y_n$ čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ takové, že

$$|y_1 + 2y_2 + \cdots + ny_n| \le \frac{n+1}{2}\,.$$

4. (Írán) Matice $n \times n$ (tabulka o n řádcích a n sloupcích), jejíž všechny prvky jsou z množiny $S = \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$, se nazývá *stříbrná* matice, když pro každé $i = 1, \ldots, n$ její i-tý řádek a i-tý sloupec dohromady obsahují všechny prvky S. Dokažte, že

(a) neexistuje žádná stříbrná matice pro $n = 1997$;

(b) stříbrné matice existují pro nekonečně mnoho hodnot n.

5. (Česká republika) Najděte všechny dvojice (a, b) celých čísel $a \geq 1$, $b \geq 1$, které splňují rovnici

$$a^{b^2} = b^a.$$

6. (Litva) Pro každé kladné celé n označme $f(n)$ počet způsobů vyjádření čísla n ve tvaru součtu mocnin čísla 2 s nezápornými celými exponenty.

Vyjádření, která se liší jen pořadím sčítanců, považujeme za stejná. Například $f(4) = 4$, protože číslo 4 můžeme vyjádřit následujícími čtyřmi způsoby: 4; $2+2$; $2+1+1$; $1+1+1+1$.

Dokažte, že pro každé celé číslo $n \geq 3$ platí

$$2^{n^2/4} < f(2^n) < 2^{n^2/2}.$$

Jaromír Šimša

★ ★ ★

V

F. Viète

Rovnici jsem vzpurnou řešil do noci,
neznámá x pálila mě horce.
Nevzdala se, i když jsem měl k pomoci
Viètovy formule a vzorce.

E. Calda