Emil Calda

Známá rovnost v souvislostech asi neznámých

Učitel matematiky, Vol. 6 (1998), No. 1, 18–21

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/151362`

ZNÁMÁ ROVNOST V SOUVISLOSTECH ASI NEZNÁMÝCH

Emil Calda

Pedagogická zásada č. 721:
Umíme-li náhodou vyřešit daný příklad několika způsoby, ukážeme je. Jedním způsobem je žák deprimován pouze jednou.
HgS

Jeden ze způsobů, jak ukázat, že pro všechna přirozená n platí rovnost

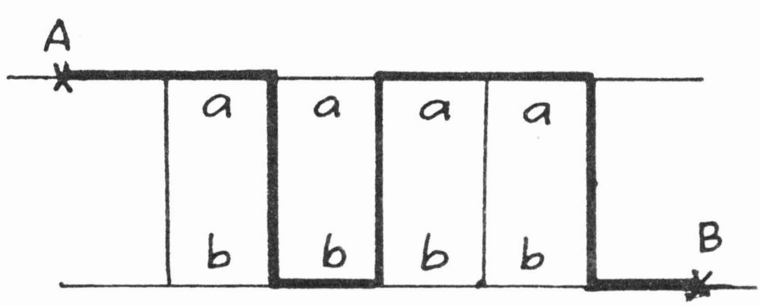
$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n\,,$$

spočívá v dosazení $a=1$ a $b=1$ do binomického rozvoje výrazu $(a+b)^n$. Jiný způsob je založen na tom, že kombinační číslo $\binom{n}{k}$ udává počet k-prvkových podmnožin n-prvkové množiny, takže výraz na levé straně uvedené rovnosti určuje počet všech podmnožin n-prvkové množiny. Tento počet však můžeme vyjádřit i tak, že každou podmnožinu n-prvkové množiny zakódujeme pomocí uspořádané n-tice sestavené z nul a jedniček podle toho, které prvky daná podmnožina obsahuje a které nikoli. Tím dosáhneme toho, že každé této podmnožině odpovídá jediná uspořádaná n-tice sestavená z nul a jedniček, přičemž toto přiřazení je vzájemně jednoznačné. A protože těchto uspořádaných n-tic je 2^n — na každém místě této n-tice je buď nula nebo jednička — je všech podmnožin n-prvkové množiny také 2^n.

Tato odvození jsou v matematicko-pedagogických kruzích všeobecně známá a při vyučování používaná. Následující způsob odvození jsem „objevil“ teprve nedávno, když jsem vymýšlel příklady pro kapitolu *Kombinatorika* ve 3. dílu učebnice matematiky pro netechnické obory SOŠ a SOU. (Tuto novou učebnici si dovoluji pedagogické veřejnosti co nejsrdečněji doporučit.)

Představme si dvě silnice vedoucí podél břehů řeky (každá podél jednoho), které jsou mezi místem A na jednom břehu a místem B na břehu druhém propojeny pěti mosty (obr. 1). Máme určit počet způsobů, jak dojet z A do B, nemáme-li žádným bodem projet víc než jedenkrát. (Jeden z možných způsobů je na obr. 1 znázorněn silnou čarou.) Abychom dodrželi pedagogickou zásadu č. 721, vyřešíme tuto úlohu dvěma způsoby.

1. Každý úsek mezi dvěma sousedními mosty označíme a nebo b podle toho, zda tento úsek leží na silnici procházející bodem A nebo B. Každé cestě z A do B pak odpovídá jediná uspořádaná čtveřice sestavená z písmen a, b — silně vytažené cestě na obr. 1 odpovídá čtveřice (a, b, a, a). Vzhledem k tomu, že toto přiřazení je vzájemně jednoznačné a že počet těchto čtveřic je 2^4, je hledaný počet cest z A do B také 2^4.



Obr. 1

Snadným zobecněním pro případ n mostů dostaneme, že počet způsobů, jak za daných podmínek dojet z A do B je 2^{n-1}.

2. Uvědomme si, že k tomu, abychom se daným způsobem dopravili z A do B, je nutné projet lichý počet mostů! Pro případ pěti mostů to znamená, že musíme zjistit, kolika způsoby lze z pěti mostů vybrat jeden nebo tři nebo pět. Je jasné, že počet způsobů, jak to provést, je

$$\binom{5}{1} + \binom{5}{3} + \binom{5}{5}.$$

I tento výsledek snadno zobecníme pro případ n mostů; počet způsobů, jak za daných podmínek dojet z A do B je

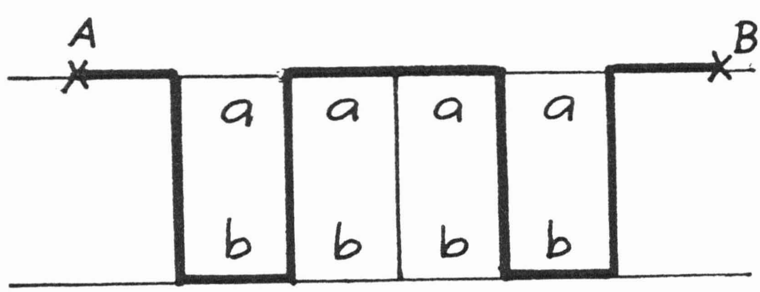
$$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots+\binom{n}{l},$$

kde l je největší liché číslo nejvýše rovné n.

Porovnáním výsledků získaných v bodech 1 a 2 pro n mostů, dostaneme rovnost

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots=2^{n-1}.$$

Předpokládejme nyní, že máme řešit úlohu, jejíž zadání je stejné jako v příkladu předchozím až na to, že místa A, B jsou na témže břehu řeky (obr. 2).



Obr. 2

Postupujeme-li prvním z výše uvedených způsobů, dojdeme v obecném případě n mostů k tomu, že počet cest splňujících dané podmínky je opět 2^{n-1} — jde totiž zase o počet uspořádaných $(n-1)$–tic sestavených z písmen a, b.

Při druhém způsobu je nutno si uvědomit, že k dojetí z A do B musíme projet sudý počet mostů! V obecném případě n mostů je tedy počet cest splňujících dané podmínky

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots+\binom{n}{s},$$

kde s je největší sudé číslo nejvýše rovné n.

Porovnáním výsledků získaných oběma způsoby pro n mostů dostaneme rovnost

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = 2^{n-1}.$$

Na závěr už jen zbývá sečíst rovnosti, které jsme získali pro místa A, B na různých březích a pro místa A, B na témže břehu. Dostaneme tak rovnost

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} = 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n .$$

Dospěli jsme sice k výsledku nikoli novému, ale cestou, která — jak doufám — byla zajímavá a neokoukaná.

★ ★ ★

T

Thales z Milétu

Thaletova věta žákům praví,
že je úhel nad průměrem pravý.
Do dnešních dnů vůbec ale neví se,
zda nějaké úhly má i levice!

E. Calda