František Kuřina

Heronův vzorec a kosinová věta

Učitel matematiky, Vol. 6 (1998), No. 1, 16–17

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/151333

HERONŮV VZOREC A KOSINOVÁ VĚTA

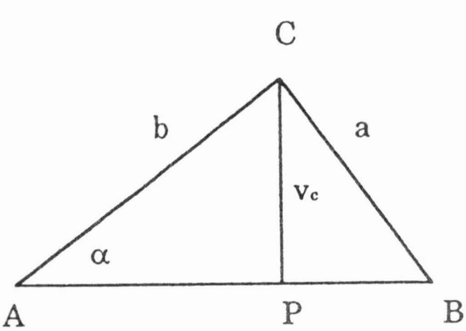
Caldovská inspirace

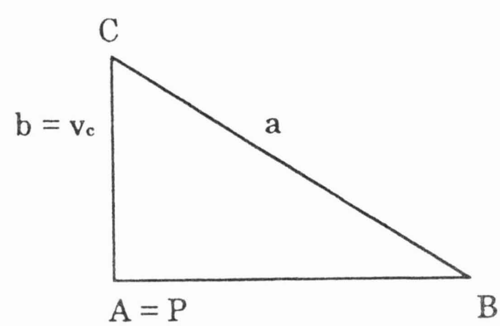
FRANTIŠEK KUŘINA

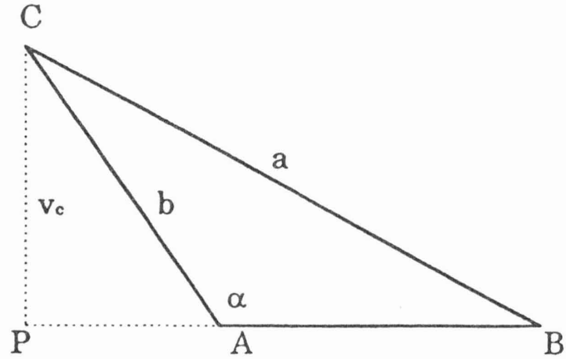
Zdá se mi, že následující odvození Heronova vzorce nezabere příliš mnoho času a navíc je lze považovat za úlohu, kterou se procvičuje pouze kosinová věta a úpravy algebraických výrazů. Máme-li vypočítat obsah trojúhelníku se stranami a, b, c, můžeme vyjít ze vzorce

$$S = \frac{1}{2} c \cdot v_c .$$

Podaří-li se nám vyjádřit výšku v_c pomocí délek stran a, b, c, bude úloha vyřešena.







Z kosinové věty vypočítáme (v označení podle obrázku)

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\ .$$

Z obrázků dále vidíme, že platí $v_c = b \cdot \sin\alpha$. Dosadíme-li do tohoto vztahu

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2}\ ,$$

dostáváme

$$v_c = \frac{1}{2c}\cdot\sqrt{(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2}\ .$$

Tento výsledek můžeme upravit na tvar

$$v_c = \frac{1}{2c}\cdot\sqrt{(a+b+c)\cdot(a+b-c)\cdot(b+c-a)\cdot(a+c-b)}\ ,$$

z něhož již bezprostředně plyne

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\ ,$$

kde

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c)\ .$$

Závěrem si ještě dovolím krátkou poznámku týkající se dalších možných odvození Heronova vzorce.

Uvedené řešení bylo poněkud pracné v úpravách algebraických výrazů, ale nevyžadovalo žádnou hlubší teorii ani umělý obrat. Jiné způsoby odvození Heronova vzorce mohou být méně pracné, ale zato vyžadují „dobré“ nápady.

Kdo ze čtenářů zná nějaké takové odvození?

LITERATURA

[1] Calda, E.: *Heronův vzorec a kosinová věta*, Učitel matematiky 5(1997), 157–159.