Učitel matematiky

František Kuřina
Matematika v obrazech (3)

Učitel matematiky, Vol. 6 (1998), No. 3, 129–136

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/151321

MATEMATIKA V OBRAZECH (3)

Důkazy v geometrii

FRANTIŠEK KUŘINA

Je zvláštní, jak dlouho trvá, než se uvidí něco, co je zřejmé.

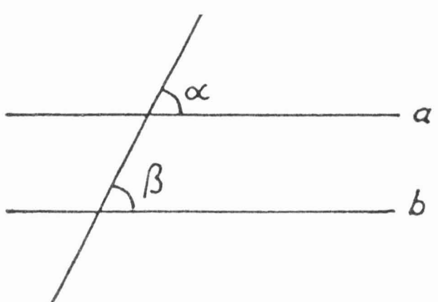
J. Stuarte

Ve třetím díle našeho seriálu připomeneme několik „důkazů (takřka) beze slov“ z elementární geometrie.

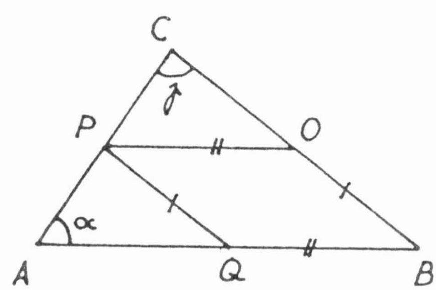
Nejdříve si všimneme základních vlastností trojúhelníku.

Geometrie, kterou studujeme ve škole, tzv. eukleidovská geometrie, je založena na této větě, která je ekvivalentní s V. Eukleidovým postulátem (obr. 1)

$$a \| b \Leftrightarrow \alpha = \beta.$$



Obr. 1



Obr. 2

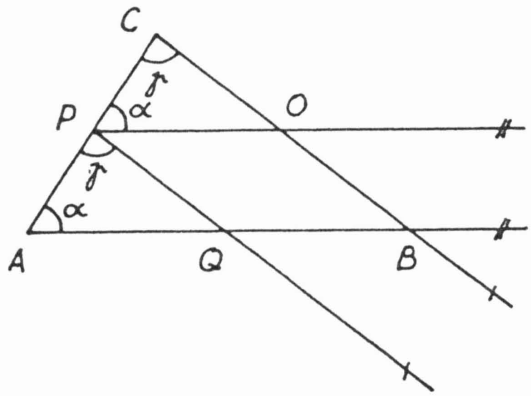
V označení podle obr. 2 platí:

$$\left.\begin{array}{c} |AP| = |PC| \\ PO \| AB \\ PQ \| BC \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} |CO| = |OB| \\ |AQ| = |QB| \end{array}$$

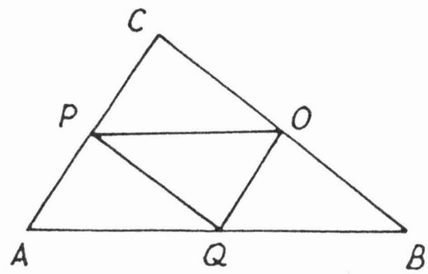
Prosíme čtenáře, aby si laskavě v článku *Matematika v obrazech (2)* opravili svislý popis na obrázku č. 6, str. 67. Místo $\sin\alpha\cos\beta$ patří správně $\sin\alpha\sin\beta$.

Podle V. Eukleidova postulátu totiž platí podle věty *usu* (obr. 3) $\triangle CPO \cong \triangle PAQ$.

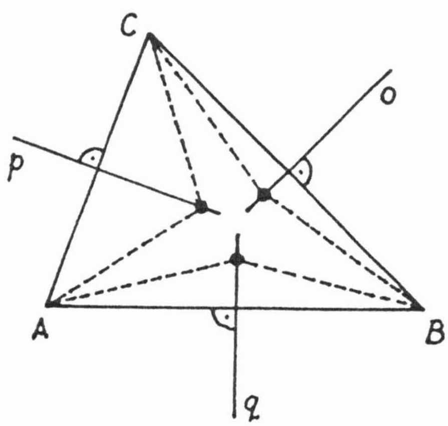
Střední příčky dělí libovolný trojúhelník na 4 trojúhelníky shodné (obr. 4).



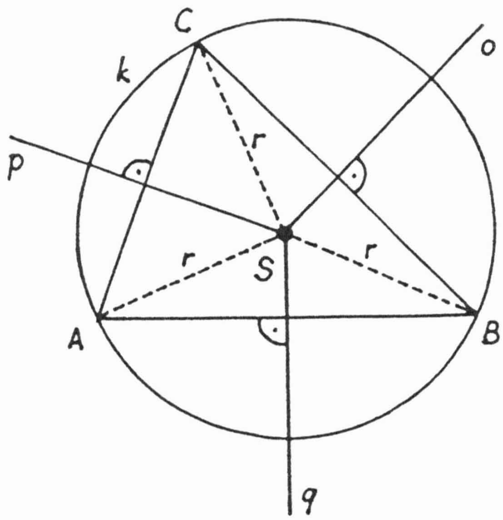
Obr. 3



Obr. 4



Obr. 5



Obr. 6

Osa strany trojúhelníku je množina všech bodů jeho roviny, které jsou stejně vzdáleny od jejích krajních bodů.

Osy stran libovolného trojúhelníku procházejí jedním bodem. Je to střed kružnice trojúhelníku opsané (obr. 5, 6).

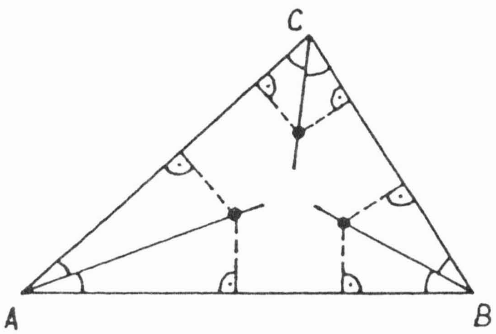
Osa úhlu trojúhelníku je množina všech jeho bodů, které jsou stejně vzdáleny od jeho ramen.

Osy úhlů trojúhelníku procházejí jedním bodem. Je to střed kružnice trojúhelníku vepsané (obr. 7, 8).

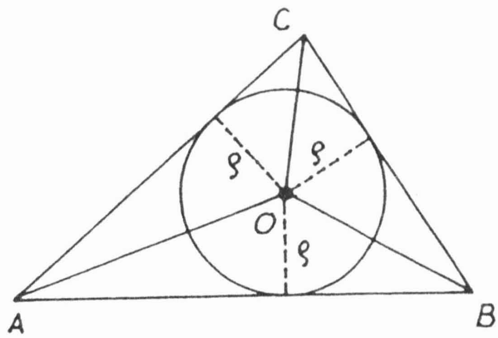
Dosud uvedené výsledky jsou všeobecně známé.

Uveďme nyní odvození věty o průsečíku těžnic trojúhelníku, které našel jeden anglický školák.

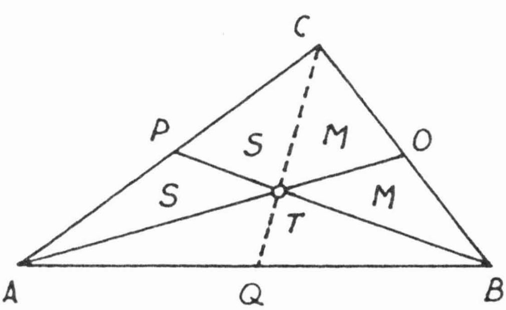
Průsečík dvou těžnic OA, BP označme T a veďme jím úsečku CQ (obr. 9).



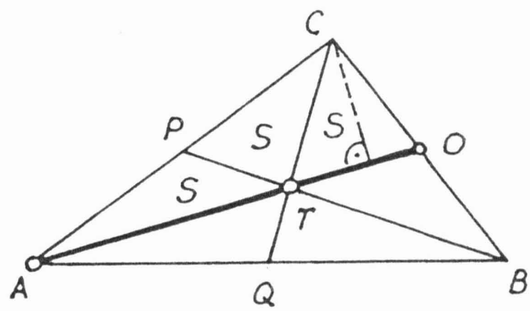
Obr. 7



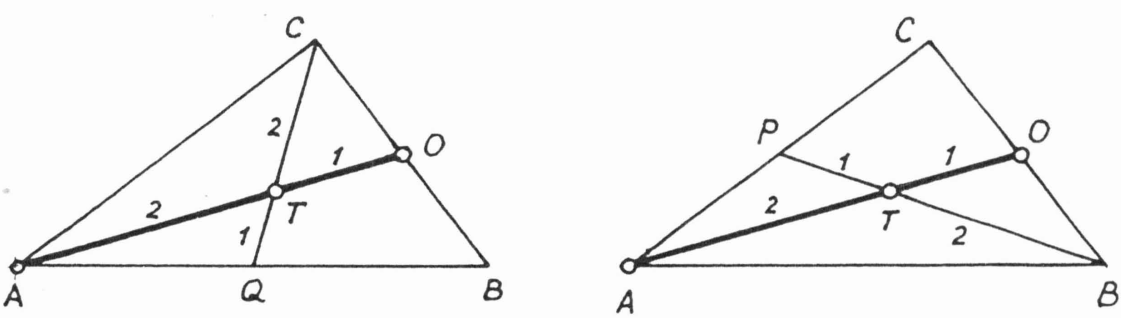
Obr. 8



Obr. 9



Obr. 10



Obr. 11

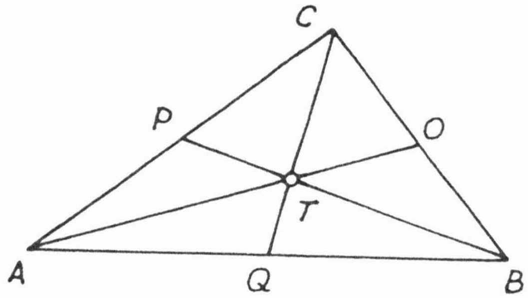
Trojúhelníky APT, PCT mají sobě rovné obsahy S, trojúhelníky OCT, OBT mají rovněž sobě rovné obsahy M. Přitom platí $S = M$, neboť

$$2S + M = 2M + S = \frac{1}{2} S_{ABC}.$$

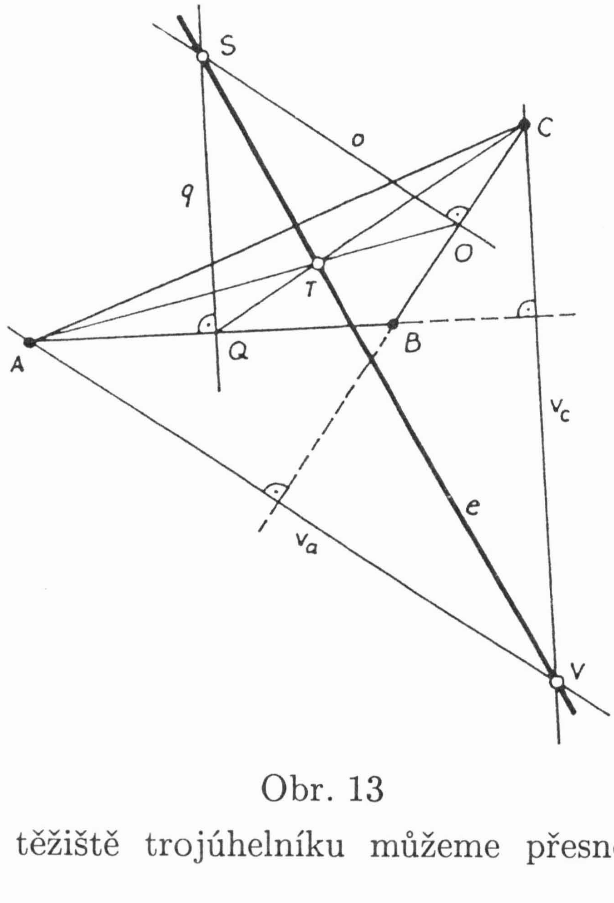
Protože trojúhelníky ATC, TOC mají stejnou výšku ke straně AT, respektive TO, platí $|AT| = 2|OT|$ (obr. 10). Podobně dokážeme $|BT| = 2|PT|$.

Průsečík libovolných dvou těžnic dělí tedy každou z nich v poměru 2 : 1. Z obr. 11 tak plyne:

Těžnice trojúhelníku procházejí jedním bodem (těžištěm trojúhelníku).



Obr. 12



Obr. 13

Vlastnost těžiště trojúhelníku můžeme přesněji formulovat takto:

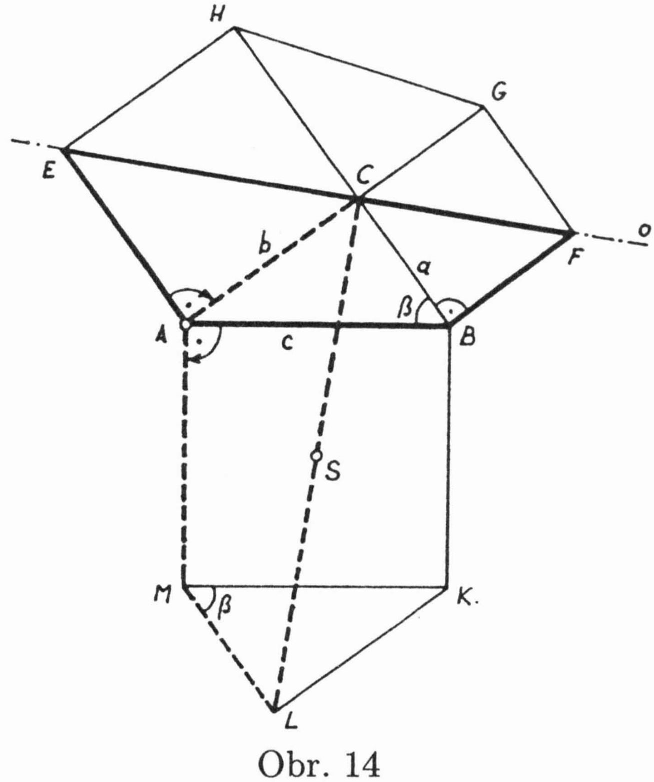
Ve stejnolehlosti $h(T, -2)$ je obrazem středu libovolné strany trojúhelníku k ní protilehlý vrchol (obr. 12)

$$h(T; -2): \begin{aligned} O &\to A \\ P &\to B \\ Q &\to C. \end{aligned}$$

Obrazem osy libovolné strany je tedy k ní příslušná výška:

$$h(T; -2): \begin{aligned} o &\to v_a \\ p &\to v_b \\ q &\to v_c. \end{aligned}$$

Protože osy stran procházejí bodem S, procházejí jedním bodem i průsečíky výšek libovolného trojúhelníku ABC (průsečík V výšek trojúhelníku, obr. 13). Tím jsme dokázali nejen, že se výšky trojúhelníka protínají v jednom bodě, ale i větu, že body S, T, V leží v přímce (Eulerova přímka trojúhelníka).



Obr. 14

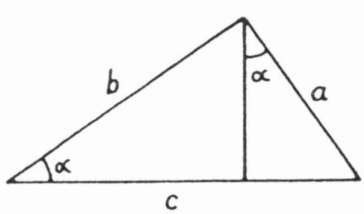
Připomeňme dále dva méně známé důkazy Pythagorovy věty. *Leonardo da Vinci* (1452 – 1519) viděl důkazy Pythagorovy věty v obr. 14. Označíme-li obsahy šestiúhelníků $ABFGHE$, $ACBKLM$ po řadě S_1, S_2, platí:

$$S_1 = a^2 + b^2 + ab$$
$$S_2 = c^2 + ab.$$

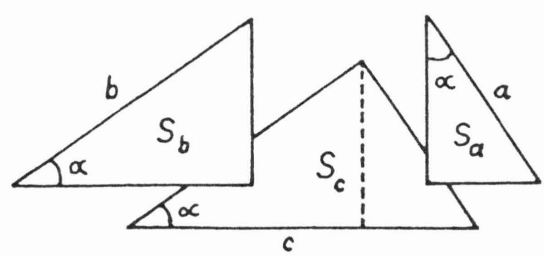
Uvažované šestiúhelníky nejsou sice shodné, mají však sobě rovné obsahy, neboť jejich poloviny, tj. čtyřúhelníky $EABF$, $CAML$ jsou shodné, jak vyplývá např. z otočení prvního z nich kolem středu A o 90° tak, že splyne s druhým.

George Polya (1887 – 1985) uvádí důkaz Pythagorovy věty obrázkem 15. Takto prezentovanou myšlenku asi málokdo vidí. Všimneme si jí proto podrobněji. Zřejmě platí v označení podle obr. 16

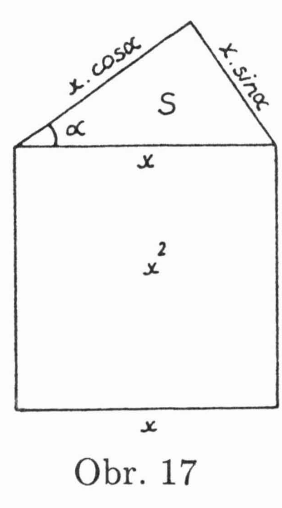
$$S_c = S_a + S_b. \qquad (*)$$



Obr. 15



Obr. 16



Obr. 17

Protože pro obsah S pravoúhlého trojúhelníka sestrojeného nad stranou čtverce podle obr. 17 platí

$$S = \frac{1}{2} \sin\alpha \cos\alpha \cdot x^2,$$

neboli

$$S = k \cdot x^2, \text{ kde } k = \frac{1}{2} \sin\alpha \cos\alpha,$$

můžeme rovnost $(*)$ přepsat na tvar

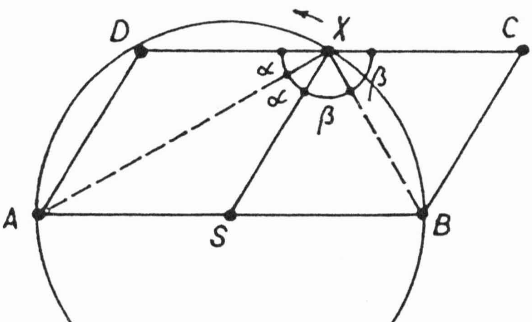
$$kc^2 = ka^2 + kb^2,$$

z něhož plyne

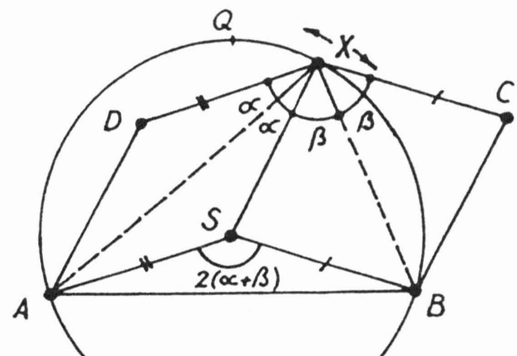
$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Nakonec uveďme tři důkazy věty o obvodovém úhlu. Nejdříve připomeňme její speciální případ, větu Thaletovu.

Pohyb bodu X po kružnici s průměrem AB můžeme modelovat dvěma kloubovými kosočtverci $ASXD$, $SBCX$. Protože úhlopříčky půlí vnitřní úhly kosočtverce, platí podle obr. 18, že $|\sphericalangle AXB| = 90°$. Pohyb bodu X po kružnicovém oblouku ABQ podle obr. 19 můžeme modelovat kloubovými kosočtverci $ASXD$, $SBCX$, z čehož je patrné, že obvodový úhel AXB je polovinou středového úhlu ASB.



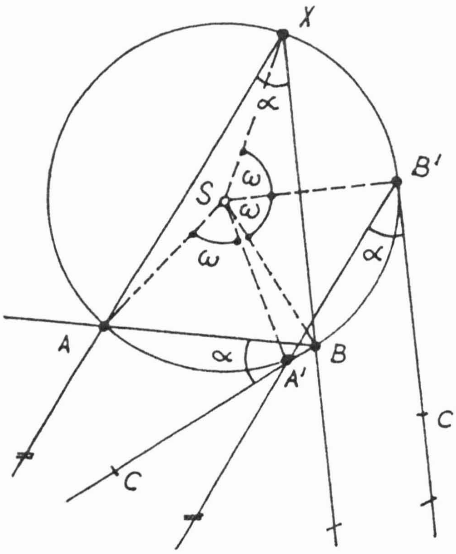
Obr. 18



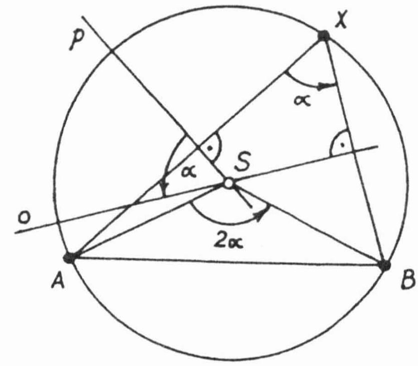
Obr. 19

Otočíme-li úsekový úhel ABC do polohy $A'B'C'$ v rotaci $r(S, \omega)$ tak, že B' je středem oblouku XB, jsou ramena úhlu

$A'B'C'$ rovnoběžná s rameny úhlu AXB. Obvodový úhel je tedy roven příslušnému úhlu úsekovému (obr. 20).



Obr. 20



Obr. 21

Každý důkaz se ovšem opírá o jistou teorii. Máme-li např. k dispozici větu o skládání dvou osových souměrností (viz např. Pomykalová – Planimetrie, str. 153), je věta o obvodovém úhlu patrna z obr. 21, neboť bod A přejde v zobrazení složeném z osových souměrností s osami p, o do bodu B, a toto zobrazení je rotace $(S, 2\alpha)$.

Rozsáhlé oblasti světa, který nás obklopuje, jsou neviditelné. Nepatří k nim pouze to, co se nachází mimo prostorový horizont – v dálce, na odvrácených stranách a ve skrytých vnitřcích – nebo mimo horizont časový – za hranicemi přítomného okamžiku. Sama pláň barev a tvarů, jimiž se k nám přivrací skutečnost, se rozpadá na ostrůvky smysluplného, a tedy viditelného, a na temný oceán chaotického, toho, čemu nebyl přiznán smysl, z něhož vystoupí ostrovy vnímaného a jejž pohled pomíjí. Tuto oblast určitým způsobem registrujeme, ale vlastně ji nevidíme.

M. Ajvaz