Pavel Leischner
Heronův vzorec ještě jednou

Učitel matematiky, Vol. 6 (1998), No. 4, 230–233

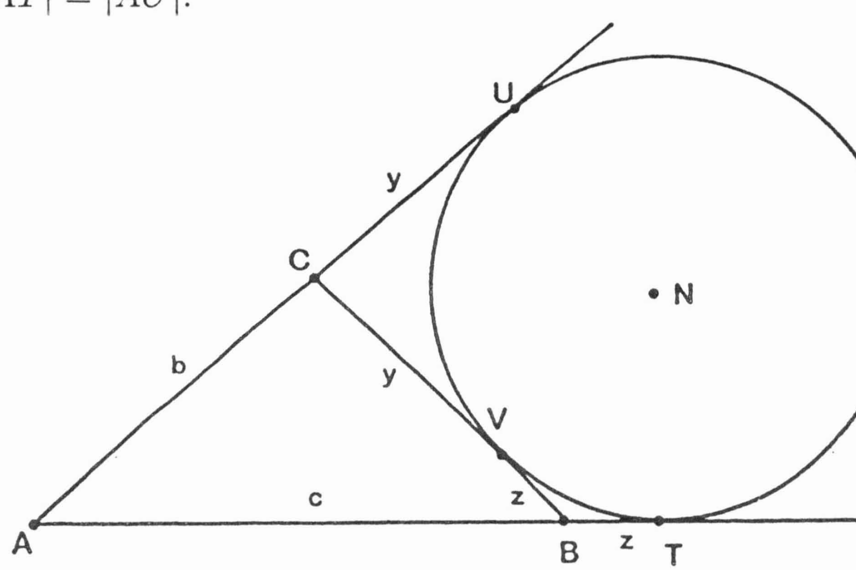
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/151313

HERONŮV VZOREC JEŠTĚ JEDNOU

PAVEL LEISCHNER

Tímto příspěvkem reaguji na Kuřinovu výzvu [2], která se týká různých postupů odvození Heronova vzorce pro obsah trojúhelníka. Caldou uváděný způsob [1] je pěknou ukázkou aplikací trigonometrie, Kuřina se naproti tomu ve [2] obešel bez znalosti vztahů mezi goniometrickými funkcemi. Uvedu elementární odvození, které na rozdíl od předchozích dvou nevychází z kosinové věty a nepoužívá goniometrické funkce.

Nejprve si připomeneme zajímavou vlastnost jisté množiny trojúhelníků: Nechť jsou na kružnici pevně zvoleny body T, U a v nich tečny tak, aby se protínaly v nějakém bodě A (obr. 1). Třetí tečnu k dané kružnici, jejíž bod dotyku označíme V, považujeme za proměnnou. Požadujeme však, aby protínala úsečky AT, AU v jejich vnitřních bodech B, C. Pak všechny takto sestrojené trojúhelníky ABC mají tentýž obvod, jehož polovina je $s = |AT| = |AU|$.

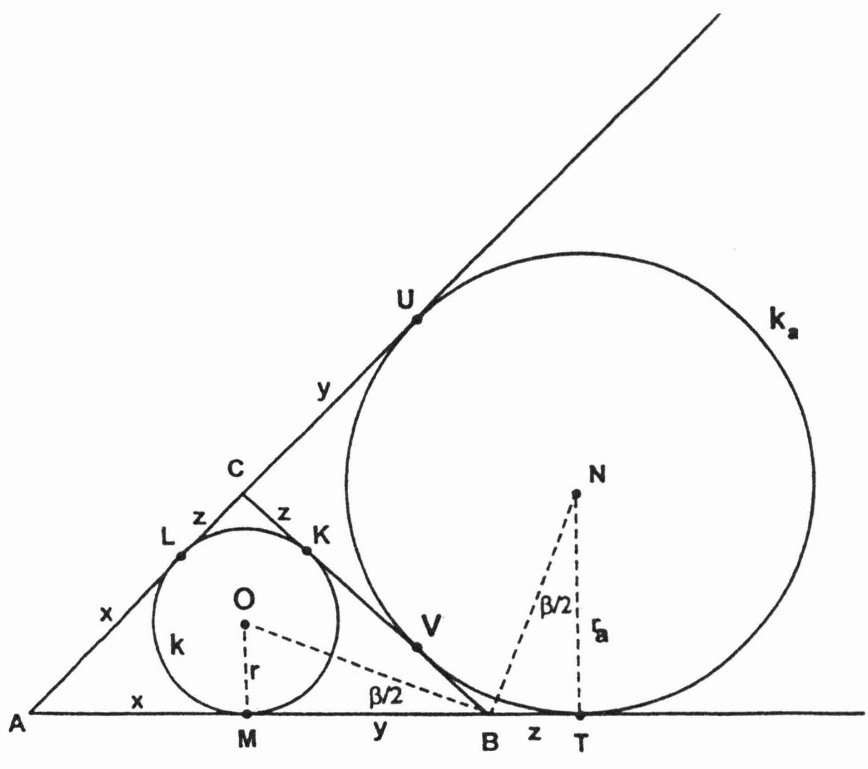


Obr. 1

Je totiž $|CV| = |CU| = y$, $|BV| = |BT| = z$ a

$$2s = b + c + (y + z) = (b + y) + (c + z) = |AT| + |AU| = 2|AT|.$$

Uvažujme dále trojúhelník ABC s kružnicí $k_a(N, r_a)$ připsanou při straně BC a kružnici $K(O, r)$ vepsanou tomuto trojúhelníku. Body dotyku kružnic se stranami trojúhelníka označme podle obrázku 2. Z vlastností délek tečen plyne: $|AM| = |AL| = x$, $|BM| = |BK| = y$ a $|CK| = |CL| = z$. Polovina obvodu trojúhelníka ABC je $s = x + y + z = |AB| + z$, ale vzhledem k předchozím úvahám také $s = |AT| = |AB| + |BT|$. Z porovnání pravých stran předchozích vztahů máme $|BT| = z$.



Obr. 2

Osy OB, BN úhlů různoběžek MB, BC jsou na sebe kolmé. Svírají-li tedy přímky BM a BO úhel velikosti $\frac{\beta}{2}$, pak i kolmice TN a BN k těmto přímkám svírají úhel $\frac{\beta}{2}$. Pravoúhlé trojúhelníky BOM a NBT jsou tedy podobné, neboť se shodují ve dvou úhlech. Odtud $\dfrac{|NT|}{|BM|} = \dfrac{|BT|}{|OM|}$ a po dosazení délek vyznačených na obr. 2 snadno určíme

$$r_a = \frac{z \cdot y}{r}. \tag{1}$$

Trojúhelníky ABN, ACN a BCN mají stejnou výšku r_a ze společného vrcholu N. Když od součtu obsahů prvních dvou odečteme obsah třetího, získáme obsah trojúhelníka ABC: $S = (|AC| + |BA| - |CB|) \cdot r_a = x \cdot r_a$. Po dosazení z (1) pak

$$S = \frac{x \cdot y \cdot z}{r}. \tag{2}$$

Uvažme ještě, že také platí

$$S = s \cdot r, \tag{3}$$

přičemž

$$s = \frac{(a + b + c)}{2} = x + y + z \tag{4}$$

a

$$x = s - a, \qquad y = s - b, \qquad z = s - c. \tag{5}$$

Součinem levých a pravých stran rovnic (2) a (3) dostáváme

$$S^2 = s \cdot x \cdot y \cdot z \tag{6}$$

a odtud po dosazení z (5) a odmocnění Heronův vzorec

$$S = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}. \tag{7}$$

Uvedené odvození vztahu (7) je nenáročné na algebraické či goniometrické úpravy, zato však rozvíjí geometrické myšlení. S minimálními znalostmi vyčteme maximum souvislostí obrázku. Základem je věta o délkách tečen ke kružnici: *Jestliže se tečny sestrojené v bodech T, U kružnice k protínají v bodě A, pak* $|AT| = |AU|$. Tato jednoduchá, téměř triviální věta má dobré uplatnění v elementární geometrii. Mimo jiné umožňuje snadno dokázat ekvivalenci rovinných řezů kuželové plochy s kuželosečkami definovanými na základě ohniskových vlastností (viz například [3] nebo [4]).

Poznamenejme ještě, že zde uvedené odvození Heronova vzorce není (stejně jako tomu bylo u předchozích dvou způsobů [1] a [2]) nic nového pod sluncem. Čtenář je může nalézt v publikaci [5], kde je však jeho geometrická podstata dosti zatemněna a zahalena do goniometrického hávu. Podle Juškeviče [6], Kolmana [7] i jiných odborníků na historii matematiky, znal a patrně i odvodil Heronův vzorec již Archimédes. Heron Alexandrijský prý tento vztah ve svých spisech pouze používal. Není mi známo, jak matematici ve starověkém Řecku vzorec odvozovali, ale je pravděpodobné, že (až na způsob zápisu) analogicky jako ve [2].

Kosinovou větu uvádí totiž již Eukleides ve svých *Základech*, třebaže tehdy ještě zdaleka nebyly známy goniometrické funkce. Místo dnešního vztahu $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,cos\alpha$ prostě (v přepisu do dnešní symboliky) uvádí (viz Servítův překlad [8], kniha II, věty XII a XIII): $a^2 = b^2 + c^2 - 2b_1c$ nebo $a^2 = b^2 + c^2 + 2b_1c$, podle toho zda je úhel α ostrý, nebo tupý. Přitom b_1 je podle něj délka kolmého průmětu strany AC na přímku AB, tedy z dnešního pohledu

$$b_1 = b \cdot \cos\alpha. \tag{8}$$

Uvedená tvrzení dokazuje Eukleides pomocí Pythagorovy věty prakticky stejně, jako se dnes na školách odvozuje kosinová věta (viz např. [9]). Odtud plyne, že Kuřinovo odvození [2] lze modifikovat na postup, který využívá jen Pythagorovu větu. Takové odvození nalezne čtenář v Kršňákově článku [10] i jinde.

LITERATURA:

[1] Calda E., *Heronův vzorec a kosinová věta*, Učitel matematiky **5** (1996/97), 157.

[2] Kuřina F., *Heronův vzorec a kosinová věta*, Učitel matematiky **6** (1997/98), 16.

[3] Kuřina F., *Umění vidět v matematice*, SPN, Praha, 1989.

[4] *Szkoła geometrii. Odczyty Kaliskie* (1993), Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa.

[5] Vyšín J. a kol., *Geometrie pro pedagogické fakulty I*, SPN, Praha, 1965.

[6] Juškevič A. P., *Dějiny matematiky ve středověku*, Academia, Praha, 1977.

[7] Kolman A., *Dějiny matematiky ve starověku*, Academia, Praha, 1968.

[8] Eukleides, *Základy*, Praha, 1907.

[9] Odvárko O. a kol., *Matematika pro druhý ročník gymnázií*, SPN, Praha, 1985.

[10] Kršňák P., *Herónov vzorec a niektoré aplikácie*, Rozhledy matematicko–fyzikální **41** (1962/63), 1.