MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

Ve dnech 12. – 14. 4. 1999 se v Novém Městě na Moravě uskutečnilo celostátní kolo 48. ročníku Matematické olympiády kategorie A. Zveřejňujeme zadání a řešení úloh, seznam vítězů a úspěšných řešitelů. Současně zveřejňujeme úlohy prvního kola příštího ročníku Matematické olympiády, kategorií A, B, C, pro školní rok 1999–2000.

Úlohy celostátního kola 48. ročníku matematické olympiády

Nové Město na Moravě 12.–14. dubna 1999

1. Do čitatele i jmenovatele zlomku

$$\frac{29:28:27:26:25:24:23:22:21:20:19:18:17:16}{15:14:13:12:11:10:\ 9:\ 8:\ 7:\ 6:\ 5:\ 4:\ 3:\ 2}$$

smíme opakovaně vpisovat závorky, a to vždy na stejná místa pod sebe.

a) Určete nejmenší možnou celočíselnou hodnotu výsledného výrazu.

b) Najděte všechny možné celočíselné hodnoty výsledného výrazu. (*J. Šimša*)

Řešení. a) Výsledný výraz lze vždy zapsat (aniž krátíme) jako podíl $A:B$ dvou součinů A a B přirozených čísel, pro něž platí

$$A\cdot B = 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 29 = 29! = 2^{25}\cdot 3^{13}\cdot 5^{6}\cdot 7^{4}\cdot 11^{2}\cdot 13^{2}\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 29.$$

(Exponenty prvočísel lze počítat bezprostředně po činitelích, nebo podle známého pravidla: prvočíslo p má v rozkladu čísla $n!$ exponent rovný součtu

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \cdots, \tag{1}$$

kde $[x]$ značí celou část čísla x.) Ta prvočísla, která mají v rozkladu čísla 29! lichý exponent, nemohou z podílu $A:B$ „zmizet“

ani po jeho krácení. Proto žádná *celočíselná* hodnota výsledku není menší než číslo

$$H = 2 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 = 1\,292\,646.$$

Na druhou stranu,

$$\frac{29 : (28 : 27 : 26 : 25 : 24 : 23 : 22 : 21 : 20 : 19 : 18 : 17 : 16)}{15 : (14 : 13 : 12 : 11 : 10 : \ 9 : \ 8 : \ 7 : \ 6 : \ 5 : \ 4 : \ 3 : \ 2)} =$$
$$= \frac{29 \cdot 14 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{15 \cdot 28 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \ 9 \cdot \ 8 \cdot \ 7 \cdot \ 6 \cdot \ 5 \cdot \ 4 \cdot \ 3 \cdot \ 2} =$$
$$= \frac{29 \cdot 14^2}{28} \cdot \frac{27!}{(15!)^2} = 29 \cdot 7 \cdot \frac{2^{23} \cdot 3^{13} \cdot 5^6 \cdot 7^3 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23}{\left(2^{11} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13\right)^2} = H.$$

(Opět se vyplatilo počítat exponenty podle (1).) Číslo H je tedy hledaná nejmenší hodnota.

b) Podívejme se nyní podrobněji na to, jak vypadají součiny A a B z první věty řešení, jsou-li čitatel a jmenovatel zlomku uzávorkováni stejným způsobem. Z každé ze čtrnácti dvojic pod sebou stojících čísel

$$\{29, 15\},\ \{28, 14\},\ \{27, 13\},\ \dots,\ \{16, 2\}$$

je jedno číslo činitelem v součinu A, druhé číslo je činitelem v součinu B (takže A, B mají po 14 činitelích). Výslednou hodnotu V pak můžeme zapsat také jako součin

$$\left(\frac{29}{15}\right)^{\varepsilon_1} \left(\frac{28}{14}\right)^{\varepsilon_2} \left(\frac{27}{13}\right)^{\varepsilon_3} \left(\frac{26}{12}\right)^{\varepsilon_4} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{17}{3}\right)^{\varepsilon_{13}} \left(\frac{16}{2}\right)^{\varepsilon_{14}},$$

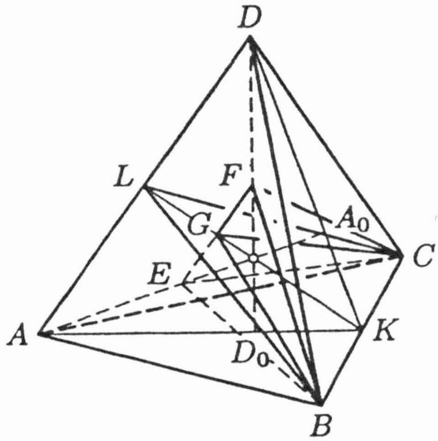
kde $\varepsilon_i = \pm 1$, přitom zřejmě $\varepsilon_1 = 1$ a $\varepsilon_2 = -1$ bez ohledu na uzávorkování. Protože zlomky $\frac{27}{13}, \frac{26}{12}, \frac{25}{11}, \dots, \frac{16}{2}$ jsou větší než 1, výsledná hodnota V (ať už je celé číslo či nikoliv) musí splňovat odhad

$$V \leq \frac{29}{15} \cdot \frac{14}{28} \cdot \frac{27}{13} \cdot \frac{26}{12} \cdot \ldots \cdot \frac{17}{3} \cdot \frac{16}{2} = H,$$

kde H je přirozené číslo, určené v části a) řešení jako nejmenší možná celočíselná hodnota V. Odtud plyne, že H je *jediná* možná celočíselná hodnota V. (Navíc jsme ukázali, že při stejném uzávorkování čitatele a jmenovatele daného zlomku *žádná* hodnota výsledného výrazu, ať už je celočíselná nebo ne, nepřevyšuje číslo H.)

2. V obecném čtyřstěnu $ABCD$ označme E a F středy těžnic z vrcholů A a D. Určete poměr objemů čtyřstěnů $BCEF$ a $ABCD$. (*P. Leischner*)

Řešení. Označme K a L středy hran BC a AD a A_0, D_0 příslušná těžiště stěn proti vrcholům A, D (viz obr.). Obě těžnice AA_0, DD_0 leží v rovině AKD, přičemž jejich průsečík T (těžiště čtyřstěnu) je dělí v poměru $3:1$ a zároveň je středem spojnice KL (to je zřejmé z vlastností těžiště: $T = \frac{1}{4}(A + B + C + D) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(A + D) + \frac{1}{2}(B + C)) = \frac{1}{2}(K + L))$. Odtud plyne, že je $|ET| : |AT| = |FT| : |DT| = 1 : 3$, takže $|EF| = \frac{1}{3}|AD|$. Rovina BCL půlí obě úsečky AD i EF, a proto také rozděluje oba uvažované čtyřstěny $ABCD$ i $BCEF$ na části stejného objemu. Označme G střed úsečky EF, pro příslušné objemy pak platí



$$\frac{V(BCEF)}{V(ABCD)} = \frac{V(BCGF)}{V(BCLD)} = \frac{|GF|}{|LD|} \cdot \frac{S(BCG)}{S(BCL)} = \frac{1}{3}\frac{|KG|}{|KL|} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

3. Ukažte, že existuje trojúhelník ABC, v němž při obvyklém označení stran a těžnic platí $a \neq b$ a zároveň $a + t_a = b + t_b$. Dále dokažte existenci takového čísla k, že pro každý zmíněný trojúhelník platí $a+t_a = b+t_b = k(a+b)$. Nakonec najděte všechny poměry $a : b$ stran a, b takových trojúhelníků. (*J. Šimša*)

Řešení. Víme, že

$$t_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2), \quad t_b^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2),$$

takže

$$t_a^2 - t_b^2 = \frac{3}{4}(b^2 - a^2).$$

Protože podle předpokladu úlohy $t_a - t_b = b - a \neq 0$, vychází odtud $t_a + t_b = \frac{3}{4}(b + a)$. Ze soustavy rovnic

$$t_a - t_b = b - a,$$
$$t_a + t_b = \frac{3}{4}(b + a)$$

určíme $t_a = \frac{1}{8}(7b - a)$, $t_b = \frac{1}{8}(7a - b)$, tedy

$$a + t_a = b + t_b = \frac{7}{8}(a + b).$$

Proto je $k = \frac{7}{8}$.

Nyní zjistíme, pro které délky $a \neq b$ existuje trojúhelník ABC o stranách a, b a těžnicích $t_a = \frac{1}{8}(7b-a)$, $t_b = \frac{1}{8}(7a-b)$. Především musí být $t_a > 0$, $t_b > 0$, což je ekvivalentní nerovnosti $\frac{1}{7} < \frac{a}{b} < 7$. Známe všechny tři strany trojúhelníku AB_1T, kde T je těžiště trojúhelníku ABC a B_1 je střed strany AC:

$$|AB_1| = \frac{b}{2}, \quad |AT| = \frac{2}{3}t_a = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8}(7b - a) = \frac{1}{12}(7b - a),$$
$$|B_1T| = \frac{1}{3}t_b = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8}(7a - b) = \frac{1}{24}(7a - b).$$

Zkoumáme-li trojúhelníkové nerovnosti pro tyto tři délky, dostaneme podmínku

$$\frac{1}{3} < \frac{a}{b} < 3,$$

z níž je třeba dle předpokladu vyloučit hodnotu $\dfrac{a}{b} = 1$. To je zároveň i postačující podmínka: Sestrojený trojúhelník AB_1T lze vždy doplnit na trojúhelník ABC se stranou $b = |AC|$ a těžnicemi $t_a = |AA_1|$, $t_b = |BB_1|$. Konečně z rovnosti $t_a^2 - t_b^2 = \frac{3}{4}(b^2 - a^2)$ vidíme, že je i $a = |BC|$.

4. V jistém jazyce jsou pouze dvě písmena A a B. Pro jeho slova platí:

1) Slova délky 1 neexistují, slova délky 2 jsou pouze AB a BB.
2) Posloupnost písmen délky $n > 2$ je slovo, právě když vznikne z nějakého slova délky menší než n, a to tak, že v tomto slově písmena A ponecháme na místě, současně však každé písmeno B nahradíme nějakým (ne nutně stejným) slovem.

Dokažte, že počet slov délky n je pro každé n roven číslu

$$\frac{2^n + 2 \cdot (-1)^n}{3}.$$

(*P. Hliněný, P. Kaňovský*)

Řešení. Každé konečné posloupnosti písmen A, B říkejme řetězec. Všude dále $\cdots$ značí vhodný (třeba i prázdný) řetězec, zatímco $***$ použijeme k zápisu řetězce ze stejných písmen (např. $\underbrace{B *** B}_{k}$ značí řetězec k písmen B).

Dokážeme, že libovolný řetězec je slovo (uvažovaného jazyka), právě když splňuje následující podmínku:

P: *Řetězec končí písmenem B a buď začíná písmenem A, nebo začíná (či je dokonce celý tvořen) sudým počtem písmen B.*

Nutnost podmínky P je celkem zřejmá: splňují ji obě slova AB a BB délky 2 a splňuje ji i každé nové slovo vzniklé konstrukcí z bodu 2), pokud podmínku P splňují slova, kterými při konstrukci nahrazujeme jednotlivá písmena B.

Nyní indukcí vzhledem k číslu n dokážeme, že každý řetězec délky n splňující podmínku P je slovo. To zřejmě platí pro $n = 1$ a $n = 2$; je-li $n > 2$, pak řetězec délky n, který splňuje P, má jeden z tvarů

$$AA \cdots B, \quad AB \cdots B, \quad \underbrace{B *** B}_{2k} A \cdots B, \quad \underbrace{B *** B}_{2k+2},$$

kde $2 \leq 2k \leq n - 2$. Naší úlohou je ukázat, že tyto čtyři typy řetězců vznikají pomocí konstrukce z bodu 2), při níž písmena B nahrazujeme řetězci (délky menší než n) splňujícími podmínku P (tedy *slovy* dle indukčního předpokladu).

Slovo $AA\cdots B$ vznikne jako $A(A\cdots B)$ ze slova AB. Slovo $AB\cdots B$ vznikne buď jako $A(B\cdots B)$ ze slova AB, nebo jako $(AB)(\cdots B)$ ze slova BB, podle toho, zda za jeho prvním písmenem A následuje sudý resp. lichý počet písmen B. Slovo $\underbrace{B***B}_{2k}A\cdots B$ vznikne jako $(\underbrace{B***B}_{2k})(A\cdots B)$ ze slova BB, slovo $\underbrace{B***B}_{2k+2}$ jako $(\underbrace{B***B}_{2k})(BB)$ ze slova BB. Tím je důkaz indukcí hotov.

Nyní pomocí podmínky P již snadno dokážeme, že pro počet p_n slov délky n skutečně platí vzorec

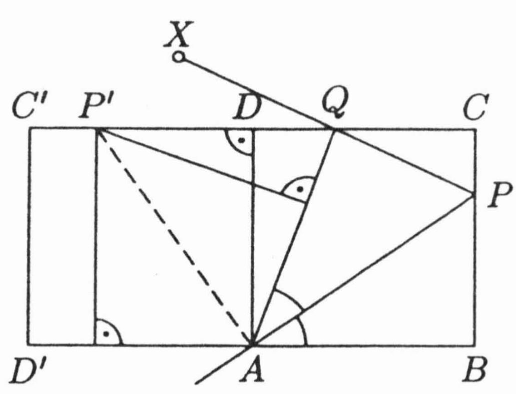
$$p_n = \frac{2^n + 2\cdot(-1)^n}{3},$$

jehož platnost je zřejmá pro $n = 1$ a $n = 2$, neboť $p_1 = 0$ a $p_2 = 2$. Proto vzorec bude dokázán matematickou indukcí, ukážeme-li, že pro každé n platí rovnost $p_{n+2} = 2^n + p_n$, kterou čísla $\frac{1}{3}(2^n + 2\cdot(-1)^n)$ zřejmě splňují. Rovnost $p_{n+2} = 2^n + p_n$ však plyne okamžitě z toho, že podle vlastnosti P je každé slovo délky $(n+2)$ buď tvaru $A\cdots B$, kde $\cdots$ je libovolný řetězec délky n (těch je 2^n), nebo je tvaru $BB\cdots$, kde $\cdots$ je libovolné z p_n slov délky n.

5. V rovině je dán ostrý úhel APX. Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby bod P ležel na straně BC a aby polopřímka PX protľala stranu CD v takovém bodě Q, že bod P leží na ose úhlu BAQ.

(*J. Šimša*)

Řešení. Uvažujme otočení kolem středu A o $90°$, které zobrazí vrchol B hledaného čtverce $ABCD$ na vrchol D, a označme P', C', D' obrazy bodů P, C, D v tomto otočení (viz obr.). Protože $|\sphericalangle PAP'| = 90°$, plyne z vlastnosti os vedlejších úhlů, že AP' je osa úhlu QAD'. Proto má



bod P' stejnou vzdálenost od AD' i od AQ (rovnou straně hledaného čtverce). Tyto vzdálenosti jsou výšky v trojúhelníku AQP', takže $|AQ| = |P'Q|$. Protože bod P' můžeme sestrojit, můžeme sestrojit i bod Q jako průsečík ramene PX s osou úsečky AP'. Zbytek konstrukce i její správnost jsou již zřejmé.

6. Najděte všechny dvojice reálných čísel a a b, pro které má soustava rovnic

$$\frac{x+y}{x^2+y^2} = a, \qquad \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = b$$

s neznámými x a y řešení v oboru reálných čísel. (*J. Šimša*)

Řešení. Má-li daná soustava řešení (x, y) pro čísla $a = A$, $b = B$, má zřejmě i řešení (kx, ky) pro libovolné $k \neq 0$ a pro čísla $a = \dfrac{1}{k}A$, $b = kB$. Odtud vidíme, že existence řešení dané soustavy závisí jen na hodnotě součinu ab.

Budeme tedy nejdříve zkoumat hodnoty výrazu

$$P(u, v) = \frac{(u+v)(u^3+v^3)}{(u^2+v^2)^2},$$

kde čísla u a v splňují normalizační podmínku $u^2 + v^2 = 1$. Podle ní platí

$$\begin{aligned} P(u, v) &= (u+v)(u^3+v^3) = (u+v)^2(u^2 - uv + v^2) = \\ &= (u^2 + 2uv + v^2)(1 - uv) = (1 + 2uv)(1 - uv). \end{aligned}$$

Za podmínky $u^2 + v^2 = 1$ nabývá součin uv všech hodnot z intervalu $\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$ (je-li $u = \cos\alpha$ a $v = \sin\alpha$, je $uv = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$). Proto stačí zjistit množinu hodnot funkce $f(t) = (1 + 2t)(1 - t)$ na intervalu $t \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$. Z vyjádření

$$f(t) = -2t^2 + t + 1 = -2\Big(t - \frac{1}{4}\Big)^2 + \frac{9}{8}$$

plyne, že hledanou množinou hodnot je uzavřený interval s krajními body $f(-\frac{1}{2}) = 0$ a $f(\frac{1}{4}) = \frac{9}{8}$.

To tedy znamená, že pokud má daná soustava řešení, musí pro její parametry a a b platit $0 \leq ab \leq \frac{9}{8}$, přitom rovnost $ab = 0$ je možná, jen když $x + y = 0$, tehdy však $a = b = 0$.

Splňují-li naopak některá čísla a a b nerovnosti $0 < ab \leq \frac{9}{8}$, existují dle dokázaného čísla u a v taková, že $u^2 + v^2 = 1$ a $(u+v)(u^3+v^3) = ab$. Označíme-li $a' = u+v$ a $b' = u^3+v^3$, pak z rovnosti $a'b' = ab \neq 0$ plyne, že oba poměry $a : a'$ a $b' : b$ mají tutéž hodnotu $k \neq 0$. Pak ale dvojice $x = ku$ a $y = kv$ je zřejmě řešením soustavy rovnic ze zadání úlohy pro uvažované hodnoty a a b.

ZADÁNÍ PRO ŠKOLNÍ ROK 1999–2000

Kategorie A

A-I-1. Nechť $P(x)$, $Q(x)$ jsou kvadratické trojčleny takové, že tři z kořenů rovnice $P\big(Q(x)\big) = 0$ jsou čísla -22, 7, 13. Určete čtvrtý kořen této rovnice. *(P. Černek)*

A-I-2. Nechť K, L, M jsou po řadě vnitřní body stran BC, CA, AB daného trojúhelníku ABC takové, že kružnice vepsané dvojicím trojúhelníků ABK a CAK, BCL a ABL, CAM a BCM mají vnější dotyk. Pak platí

$$|BK| \cdot |CL| \cdot |AM| = |CK| \cdot |AL| \cdot |BM|.$$

Dokažte.

Poznámka. Z uvedené rovnosti plyne na základě Cévovy věty, že přímky AK, BL, CM procházejí týmž bodem. *(J. Švrček)*

A-I-3. V oboru kladných čísel řešte soustavu

$$\sqrt{xy} + \sqrt{xz} - x = a,$$
$$\sqrt{yz} + \sqrt{yx} - y = b,$$
$$\sqrt{zx} + \sqrt{zy} - z = c,$$

kde a, b, c jsou daná kladná čísla. (*R. Horenský*)

A-I-4. V rovině je dáno 1 999 shodných trojúhelníků o obsahu 1, které jsou obrazy téhož trojúhelníku v různých posunutích. Je-li průnikem všech daných trojúhelníků množina M, která obsahuje těžiště každého z nich, je obsah množiny M alespoň $\frac{1}{9}$. Dokažte. (*M. Beneš*)

A-I-5. Je dána funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taková, že $f(n) = 1$, je-li n liché, a $f(n) = k$ pro každé sudé číslo $n = 2^k l$, kde k je přirozené číslo a l číslo liché. Určete největší přirozené číslo n, pro něž platí

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) \leq 123\,456.$$

(*S. Trávníček*)

A-I-6. Je dán čtyřboký jehlan $ABCDV$ s podstavou $ABCD$. Jeho hrany AB, CD jsou rovnoběžné a roviny ABV a CDV vzájemně kolmé. Označme P patu výšky z vrcholu V na stranu AB v trojúhelníku ABV a Q patu výšky z vrcholu V na stranu CD v trojúhelníku CDV. Dokažte nerovnost

$$|AV|^2+|BV|^2+|CV|^2+|DV|^2 \geq |PQ|^2+2(S_{ABV}+S_{CDV}+S_{PQV}),$$

kde S_{XYZ} značí obsah trojúhelníku XYZ. Zjistěte rovněž, kdy platí rovnost. (*J. Bábeľa*)

Kategorie B

B-I-1. Pro která reálná čísla t má funkce $f(x) = 5x + 44 + t|x - 2| - 3|x - t|$ maximum rovné 0? (*P. Černek*)

B-I-2. Označme S střed kružnice vepsané libovolnému trojúhelníku ABC. Dokažte, že rovnost $|AS| \cdot |BS| = |CS| \cdot |AB|$ platí, právě když je úhel ACB pravý. (*J. Švrček*)

B-I-3. Určete reálná čísla a, b, pro která má soustava

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2z^2 &= 16, \\ xyz^2 + xy + z^2 &= a, \\ x + y + 2z &= b \end{aligned}$$

v oboru reálných čísel právě jedno řešení. (*J. Bábeľa*)

B-I-4. Jsou dány kružnice k a l s různými poloměry, které se vně dotýkají v bodě T. Průsečíkem M jejich společných vnějších tečen veďme sečnu s obou kružnic. Označme X ten z obou průsečíků kružnice k se sečnou s, který je vzdálenější od bodu M. Podobně označme Y ten z obou průsečíků kružnice l se sečnou s, který je vzdálenější od bodu M. Nechť P je takový bod, že $XTYP$ je rovnoběžník. Určete množinu bodů P odpovídajících všem takovým sečnám s. (*J. Zhouf*)

B-I-5. Devítistěn $ABCDEFGHV$ vznikl slepením krychle $ABCDEFGH$ a pravidelného čtyřbokého jehlanu $EFGHV$. Na každou stěnu tohoto devítistěnu jsme napsali číslo. Čtyři z napsaných čísel jsou 25, 32, 50 a 57. Pro každý vrchol devítistěnu $ABCDEFGHV$ sečteme čísla na všech stěnách, které ho obsahují. Dostaneme tak devět stejných součtů. Určete zbývajících pět čísel napsaných na stěnách tohoto tělesa. (*K. Černeková*)

B-I-6. Je dán rovnostranný trojúhelník XYZ s těžištěm T a stranou délky 5 cm. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$ s obsahem

$8\,\mathrm{cm}^2$ a stranou AB délky $2\,\mathrm{cm}$ tak, aby body X, Y, Z, T ležely po řadě na přímkách AB, BC, CD, DA. (*M. Krállová*)

Kategorie C

C-I-1. Při dělení jistého přirozeného čísla čísly 19 a 99 vyjdou jako zbytky dvě prvočísla. Součet obou neúplných podílů se rovná 1 999. Určete dělené číslo. (*J. Šimša*)

C-I-2. Najděte všechny pravoúhlé trojúhelníky, ve kterých spojnice středů vepsané a opsané kružnice svírá s přeponou úhel 45 stupňů. (*M. Krállová*)

C-I-3. Zjistěte nejmenší přirozená čísla k, pro něž platí jednotlivá tvrzení a), b) a c): Obsadíme-li figurkami libovolných k polí šachovnice 8×8, pak budou obsazena některá

a) tři sousední pole některého řádku,
b) tři sousední pole některé šikmé řady,
c) čtyři sousední pole některého řádku nebo sloupce.

Šikmou řadou rozumíme takovou skupinu polí, jejichž úhlopříčky jednoho z obou směrů leží na jedné a téže přímce. (*J. Šimša*)

C-I-4. Jirka zhotovil papírový model pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ s podstavou $ABCD$. Když pak model rozřízl podél čtyř hran, bylo ho možno rozvinout (bez překrytí) do roviny. Kolik různých sítí daného jehlanu tak mohl Jirka dostat? Ukázalo se, že síť, kterou Jirka dostal, měla tvar (nekonvexního) sedmiúhelníku. Vypočtěte úhel AVB v boční stěně jehlanu.

(*P. Leischner*)

C-I-5. V číselném výrazu

$$+1+2+3-4-5-6+7+8+9-10-11-12+\cdots$$
$$\cdots+595+596+597-598-599-600),$$

ve kterém chybí levá závorka, jsou postupně vypsána všechna přirozená čísla od 1 do 600; před nimi se pravidelně opakují tři znaménka + a tři znaménka −. Doplňte levou závorku do výrazu tak, aby vyšel výsledek 378. (*P. Černek*)

C-I-6. Je dán pravidelný šestiúhelník $KLMNOP$. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB tak, aby jeho vrchol C ležel na úsečce NP, body M, O, K ležely po řadě na přímkách AB, BC, CA a aby přímka NP rozdělila trojúhelník ABC na dvě části se stejným obsahem. (*K. Černeková*)

Výsledková listina celostátního kola 48. ročníku MO kategorie A

Vítězové:

1.	Jan Houštěk	4	G Jirsíkova, Pelhřimov	7 7 7 6 7	41
2.	Zdeněk Dvořák	VII	G Nové Město n. Mor.	7 7 7 7 7 5	40
3.–5.	David Holec	4	G kpt. Jaroše, Brno	7 7 7 3 1 5	30
	Pavel Moravec	4	G kpt. Jaroše, Brno	7 7 5 4 7 0	30
	Lukáš Vokřínek	4	G kpt. Jaroše, Brno	7 5 6 6 0 6	30
6.–7.	Aleš Návrat	4	G kpt. Jaroše, Brno	3 7 6 4 7 2	29
	Martin Viščor	4	G kpt. Jaroše, Brno	7 7 2 0 7 6	29
8.	Lenka Zdeborová	4	G Mikulášské n., Plzeň	7 7 0 7 0 5	26
9.	Luboš Dostál	VIII	G a OA, Stříbro	7 6 7 3 1 1	25
10.	Karel Kyrián		G Jírovcova, Č. Budějov.	5 4 5 0 6 4	24

Úspěšní řešitelé:

11.	Robert Káldy	4	G Zborovská, Praha	5 7 1 2 5 0	20
12.–14.	Jaroslav Hlinka	4	G Zborovská, Praha	5 7 1 1 5 0	19
	Karel Honzl	4	G Podbořany	7 7 0 2 0 3	19
	František Němec	2	G Zborovská, Praha	5 7 0 6 1 0	19
15.–16.	Jaroslav Jánský	4	G kpt. Jaroše, Brno	7 0 3 0 4 3	17
	Ondřej Rucký	VI	G Mikulášské n., Plzeň	2 7 0 3 0 5	17
17.–19.	Jaromír Dobrý	VI	Mikulášské n., Plzeň	5 7 1 1 0 0	14
	Josef Křišťan	V	G Mikulášské n., Plzeň	0 7 2 0 5 0	14
	Jakub Šácha	VII	G Komenského, Kyjov	7 7 0 0 0 0	14
20.	Pavel Nejedlý	VII	G Vídeňská, Brno	7 6 0 0 0 0	13
21.–22.	Václav Kučera	4	G Nad Alejí, Praha	6 2 0 3 1 0	12
	David Pelikán	4	SPŠ Strojnická, Plzeň	7 5 0 0 0 0	12