Učitel matematiky

Dag Hrubý

Užití mocninných funkcí

Učitel matematiky, Vol. 7 (1999), No. 3, 178–182

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150999

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1999

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

UŽITÍ MOCNINNÝCH FUNKCÍ

DAG HRUBÝ

Mocninné funkce představují v gymnaziální matematice standardní učivo, které nepřináší žádné větší problémy a studenti je celkem dobře zvládají. Cílem článku je ukázat, jak lze využít mocninných funkcí k rozšíření definice n-té odmocniny reálného čísla pro případ, že n je liché číslo. Stále se můžeme setkat s názory, že výrazy typu $\sqrt[3]{-8}$, $\sqrt[5]{-32}$ na střední školu nepatří a zbytečně komplikují výklad n-té odmocniny reálného čísla. Známým argumentem zastánců takového pojetí je následující rovnost převzatá ze „žluté knížky“ [1]:

$$-2 = \sqrt[3]{-8} = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2.$$

Aby se autoři učebnic vyhnuli podobným potížím, definují n–tou odmocninu pouze pro nezáporná čísla.

Definice:
Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je n-tá odmocnina z nezáporného čísla a takové nezáporné číslo b, pro něž platí $b^n = a$. Číslo b zapisujeme ve tvaru $b = \sqrt[n]{a}$, číslo n se nazývá odmocnitel a číslo a základ odmocniny.

Autor tohoto článku s tímto přístupem nesouhlasí a pokládá jej tak trochu za alibistický. I když plně respektuji zásadu, že učitel nemůže prozradit studentům vše, co zná, musí jim něco zatajit, domnívám se, že v tomto případě bychom tajnosti před studenty mít neměli. Budiž ke cti autora učebnice [2], že si tento problém uvědomil a příslušné rozšíření definice n–té odmocniny provedl. Dříve, než přistoupíme k řešení výše uvedeného problému, uveďme pro pobavení ještě jednu rovnost

$$-1 = i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1.$$

Nyní si připomeňme základní vlastnosti mocninných funkcí. V našem případě se budeme nejdříve zabývat pouze mocninnými funkcemi s přirozeným exponentem, tj. funkcemi tvaru

$$f\colon y = x^n,\ n \in \mathbb{N}.$$

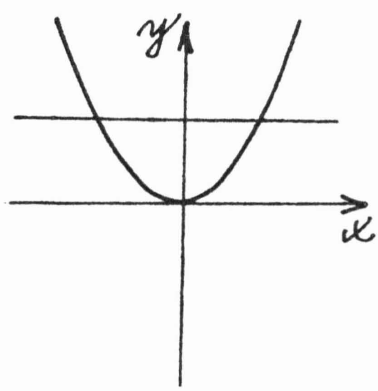
Definiční obor každé takové funkce je množina $\mathbb{R}$, obor hodnot však závisí na čísle n. Je-li n liché, pak $\mathsf{H}_f = \mathbb{R}$, funkce je lichá a rostoucí v $\mathbb{R}$. Je-li n sudé, pak $\mathsf{H}_f = \mathbb{R}_0^+$, funkce je sudá, rostoucí v $\langle 0, +\infty)$ a klesající v $(-\infty, 0\rangle$. S využitím těchto poznatků se nyní můžeme pustit do řešení rovnic typu

$$x^n = a, \ n \in \mathbb{N}, \ a \in \mathbb{R}.$$

Pro pořádek vyřešíme nejdříve rovnici $x^n = 0$. Snad je jasné, že tato rovnice má pro každé $n \in \mathbb{N}$ v množině $\mathbb{R}$ právě jedno řešení $x = 0$. Dále budeme předpokládat, že v rovnici $x^n = a$, $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ je $a \neq 0$. Při řešení přichází do úvahy celkem 4 případy.

1. n je sudé, a > 0 :

Na obr. 1 vidíme graf funkce $f\colon y = x^2$ a graf funkce $g\colon y = a, a > 0$. Z obrázku můžeme usuzovat, že naše rovnice má v $\mathbb{R}$

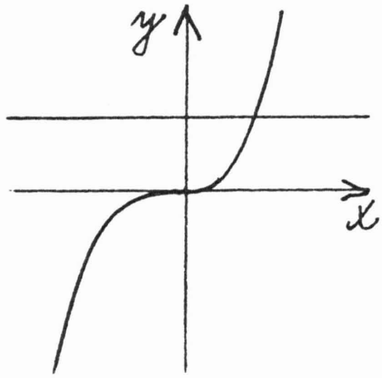


obr. 1

právě dvě řešení. Pro $n = 2k, k \in \mathbb{N}$ v případě funkce $f\colon y = x^n$ by byl postup obdobný. Pro sudé hodnoty n zřejmě platí: $x^n = a \Leftrightarrow |x| = \sqrt[n]{a}$. Odtud pro x dostáváme: $x = \sqrt[n]{a}$ nebo $x = -\sqrt[n]{a}$.

2. n je liché, a > 0 :

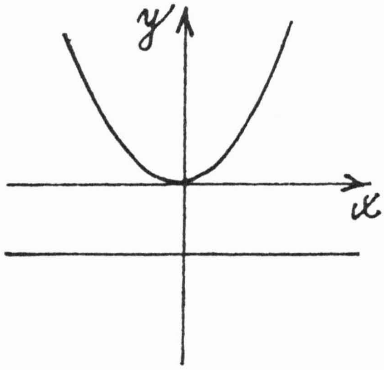
Na obr. 2 jsou grafy funkcí $f\colon y = x^3$ a $g\colon y = a, a > 0$. Rovnice $x^3 = a$ má v $\mathbb{R}$ právě jedno řešení. To platí i pro hodnoty $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$ v případě funkce $f\colon y = x^{2k+1}$. Pro liché hodnoty n zřejmě platí: $x^n = a \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{a}$.



obr. 2

3. n je sudé, a < 0 :

Na obr. 3 jsou grafy funkcí $f\colon y = x^2$ a $f\colon y = a, a < 0$. V tomto případě nemá rovnice $x^2 = a$ žádné řešení. Stejný závěr může učinit i pro $n = 2k, k \in \mathbb{N}$ v případě funkce $f\colon y = x^{2k}$. Pro sudá n zřejmě platí: $\forall x \in \mathbb{R} : x^n \geq 0$.



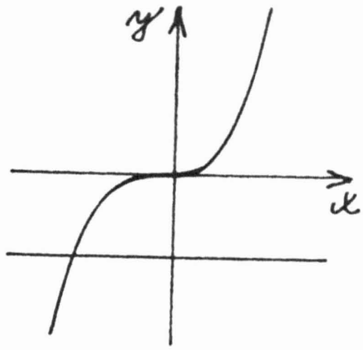
obr. 3

4. n je liché, a < 0 :

Tento případ je pro nás nejdůležitější. Na obr. 4 jsou grafy funkcí $f\colon y = x^3$ a $g\colon y = a, a < 0$. Rovnice $x^3 = a$ má v $\mathbb{R}$ zřejmě právě jedno řešení. To platí i pro $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$ v případě funkce $f\colon y = x^{2k+1}$. Pro lichá n platí

$$(-x)^n = -x^n$$

a tedy rovnice $x^n = a$ znamená totéž jako $(-x)^n = -a$, kde je $-a > 0$. Tato rovnice má ale podle případu 2) právě jedno řešení $-x = \sqrt[n]{-a}$. Tedy $x = -\sqrt[n]{-a}$.



obr. 4

Přehled všech řešení rovnice $x^n = a$ uvádí následující tabulka:

n	a	řešení
sudé	$a > 0$	$x = \sqrt[n]{a}, x = -\sqrt[n]{a}$
liché	$a > 0$	$x = \sqrt[n]{a}$
sudé	$a < 0$	nemá řešení
liché	$a < 0$	$x = -\sqrt[n]{-a}$

Na základě předcházejících úvah můžeme vyslovit tuto definici.

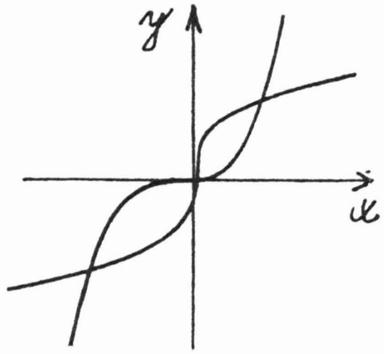
Definice:

Pro každé $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$ je n-tá odmocnina ze záporného čísla a takové záporné číslo b, pro které platí $b^n = a$. Číslo b zapisujeme ve tvaru $b = \sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{-a}$.

Podle této definice můžeme psáti: $\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{-(-27)} = -\sqrt[3]{27} = -3$ a podobně $\sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{32} = -2$.

Na celý výše uvedený problém se můžeme dívat také z jiného pohledu. Zkoumejne nyní funkci $f\colon y = x^3$. Zde je $\mathsf{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathsf{H}_f = \mathbb{R}$, f je lichá a rostoucí v D_f. Je to tedy funkce prostá a proto k ní existuje funkce inverzní $f^{-1}\colon y = \sqrt[3]{x}$. Pro funkci inverzní f^{-1} k funkci f zřejmě platí: $\mathsf{D}_f^{-1} = \mathsf{H}_f = \mathbb{R}$ a podobně $\mathsf{H}_f^{-1} = \mathsf{D}_f = \mathbb{R}$. Grafy obou funkcí jsou na obr. 5.

Je tedy zcela jasné, že výraz $\sqrt[3]{x}$ musí být definován vzhledem k definičnímu oboru také pro čísla záporná. Už jenom z tohoto důvodu je nezbytné, aby studenti gymnázia byli seznámeni s pojmem n-té odmocniny záporného čísla n. Stejnou úvahu jako v případě funkce $f\colon y = \sqrt[3]{x}$ lze samozřejmě provést pro funkci $f\colon y = \sqrt[n]{x}$, kde $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$.



obr. 5

LITERATURA:

[1] Hejný, M. a kol., *Teória vyučovania matematiky 2*, SPN, Bratislava, 1989.
[2] Odvárko, O., *Matematika pro gymnázia — Funkce*, Prometheus, Praha, 1993.

* * *

IV. SEMINÁŘ Z HISTORIE MATEMATIKY

Jevíčko, 23. 8. – 26. 8. 1999

Tradiční seminář z historie matematiky pro vyučující na středních školách se koná na Gymnáziu v Jevíčku ve výše uvedeném termínu.

Program semináře bude letos zaměřen na matematiku ve středověku. Účastníkům minulých seminářů, kteří jsou v databázi semináře, bude přihláška zaslána. Ostatní zájemci si mohou o přihlášku napsat na adresu:

RNDr. Dag Hrubý
Gymnázium
A. K. Vitáka 452
569 43 Jevíčko
e-mail: hruby@gymjev.cz

Uzávěrka přihlášek je 31. května 1999.