Jiří Veselý
O násobení řad (1)

Učitel matematiky, Vol. 7 (1999), No. 3, 137–145

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150995

O NÁSOBENÍ ŘAD (1)

JIŘÍ VESELÝ

ABSTRAKT: Při násobení řad se setkáváme s jevem, který zpochybňuje vhodnost definice tzv. Cauchyova součinu řad. Ukazuje se však, že lze poměrně jednoduše pomocí Cesàrovy sčítací metody „problémy“ s divergencí tohoto součinu odstranit.

1. Úvod. Vývoj jednoduchých matematických poznatků je často značně křivolaký. Tento známý fakt si přiblížíme na základních vlastnostech řad. Budeme předpokládat, že čtenář zná definici limity posloupnosti a definici součtu řady a jednoduché vlastnosti posloupností a řad. Některé v této úvodní části připomeneme. S vývojem samotného pojmu konvergence se může čtenář seznámit např. v [Kli] nebo v článcích [Tr] a [Ve1].

Dohodneme se, že u řad budeme vynechávat u sčítacího symbolu $\sum$ meze v případě, že jsou rovny 0 a ∞. Pro řadu

$$\sum a_k := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \tag{1}$$

s reálnými či komplexními členy a_k definujeme pro všechna nezáporná celá n

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n \,. \tag{2}$$

Čísla s_n jsou částečné součty řady $\sum a_k$. Pokud limita s posloupnosti $\{s_k\}$ je reálné (komplexní) číslo, říkáme, že řada (1) je konvergentní a číslo s nazýváme součet řady (1). Jestliže konverguje řada $\sum |a_k|$, pak říkáme, že (1) konverguje absolutně.

Absolutně konvergentní řady konvergují, ale konvergentní řada nemusí konvergovat absolutně. Je-li $\sum a_k$ konvergentní a má součet s, potom

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0\,.$$

Absolutně konvergentní řady a neabsolutně konvergentní řady se podstatně liší. Pro $a \in \mathbb{R}$ označme $a^+ := (|a| + a)/2$ a podobně $a^- := (|a| - a)/2$. Potom zřejmě platí $a = a^+ - a^-$ a $|a| = a^+ + a^-$. Snadno uvážíme, že pro absolutně konvergentní řadu $\sum a_k$ konvergují rovněž řady $\sum a_k^+$ a $\sum a_k^-$, přičemž platí

$$\sum |a_k| = \sum a_k^+ + \sum a_k^- , \quad \sum a_k = \sum a_k^+ - \sum a_k^- .$$

Pro konvergentní řadu $\sum a_k$, která *nekonverguje absolutně*, platí sice $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$, avšak zároveň platí $\sum a_k^+ = \sum a_k^- = +\infty$. Dá se jednoduše ukázat, že jestliže určujeme součet takové řady při jiném pořadí členů, může mít *jiný* součet, případně může divergovat. Skutečně, např. řada

$$\sum \frac{(-1)^k}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \tag{3}$$

konverguje podle tzv. Leibnizova kritéria; její součet leží mezi každými dvěma po sobě následujícími částečnými součty, tj. speciálně mezi $s_0 = 1$ a $s_1 = 1/2$ a je tedy kladný. Dále platí (použijeme schematický zápis)

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots ,$$
$$s/2 = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \cdots ;$$

uvědomte si, že vložení nulových členů neovlivní konvergenci ani součet řady. Z předchozího vyplývá sečtením obou konvergentních řad člen po členu

$$3s/2 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots .$$

Vzhledem k tomu, že je $s \neq 0$, změnil se „přeskupením členů“ (neabsolutně konvergentní) řady její součet[1].

[1] Platí $s = \log 2$. Často se v učebnicích uvádí součet pro takové přerovnání, kdy se postupně sčítá vždy p kladných a q záporných členů této řady. Výsledný součet $\log\sqrt{4p/q}$ nalezl jako první patrně MARTIN OHM (1792 – 1872) již r. 1839.

Intuitivně zřejmý pojem „přeskupení členů řady" zpřesníme: položíme-li $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $\varphi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ je bijekce, tj. prosté zobrazení $\mathbb{N}_0$ na $\mathbb{N}_0$, potom φ nazýváme *přerovnání* $\mathbb{N}_0$. Nechť je dána řada $\sum a_k$. Platí-li pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$ rovnost $b_k = a_{\varphi(k)}$, potom říkáme, že řada $\sum b_k$ je *přerovnáním řady* $\sum a_k$ pomocí přerovnání φ. Stručněji řekneme, že řada $\sum b_k$ je přerovnáním řady $\sum a_k$, existuje-li taková bijekce φ na $\mathbb{N}_0$, pro kterou je $b_k = a_{\varphi(k)}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Přerovnání si představíme snadno jako „nekonečnou permutaci"

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \varphi(3) & \dots \end{pmatrix}.$$

Je snadné dokázat (viz např. [Ve2], str. 291), že jestliže řada $\sum a_k$ konverguje absolutně, potom pro každé její přerovnání $\sum b_k$ platí $\sum b_k = \sum a_k$. R. 1867 byly již posmrtně poprvé publikovány některé rukopisy a poznámky GEORGA FRIEDRICHA BERNHARDA RIEMANNA (1826 – 1866). Riemann mj. dokázal, že pokud řada $\sum a_k$ konverguje neabsolutně, pak pro každé $s \in \mathbb{R}^*$ (tedy i pro $s = \pm\infty$) existuje přerovnání $\sum b_k$ řady $\sum a_k$ tak, že je $\sum b_k = s$; viz [Ri]. Poznamenejme, že se s ohledem na tuto vlastnost ve starší české literatuře pro absolutně konvergentní řady užíval termín řady bezpodmínečně konvergentní, zatímco neabsolutně konvergentní řady byly nazývány podmínečně konvergentní.

Uvedené ukázky mají čtenáři připomenout, že základní vlastnosti konečných součtů nelze přenést na řady. Zatímco analogie „asociativního zákona" pro konvergentní řady platí, „komutativní zákon" či jistou jeho analogii lze dokázat pouze pro *absolutně konvergentní* řady.

2. Malé ohlédnutí. Každý čtenář jistě ví, že sčítání řad patří mezi nejstarší partie matematiky a že tvořilo např. u ISAACA NEWTONA (1643 – 1727) nebo u JOSEPHA LOUISE LAGRANGE (1736 – 1813) páteř jejich matematických výzkumů. Nejstarší příklady vyšetřování speciálních řad pocházejí z poloviny 14. stol., přesto se však matematici s řadami dlouho značně potýkali. Úvaha z předchozího odstavce nemá pro divergentní řady smysl, nemáme-li definován jejich součet, lze si však klást otázku, co se dělo v době, „kdy konvergence nebyla", tj. nežli k tomuto pojmu matematici dospěli.

Pojmenování *konvergentní* řada pochází patrně od JAMESE GREGORYHO (1638 – 1675) z r. 1668, který byl také patrně první, kdo rozlišoval mezi konvergentními a divergentními řadami. Dostatečně přesné definice konvergence řady se objevily teprve až u BERNARDA BOLZANA (1781 – 1848) v r. 1817 a LOUISE AUGUSTINA CAUCHYHO (1789 – 1857) v r. 1821. Ten zavedl v r. 1821 i absolutní konvergenci, avšak teprve r. 1833 *korektně* dokázal, že z absolutní konvergence řady plyne její konvergence. NIELS HENRIK ABEL (1802 – 1829) přesto napsal r. 1826 (kromě základní práce o konvergenci binomické řady) v dopise z Francie těchto několik často citovaných řádek: *Divergentní řady jsou ďábelským výmyslem a je ostudné zakládat na nich jakýkoli důkaz. Pomocí nich lze odvodit jakýkoli potřebný závěr, proto vedly k tolika klamným výsledkům a paradoxům. Stal jsem se k tomu všemu abnormálně pozorným, protože s výjimkou geometrické řady neexistuje v celé matematice snad jiná řada, jejíž součet by byl určen korektně. Jinak řečeno, v matematice mají nejdůležitější věci ty nejhorší základy. Je pravda, že výsledky jsou většinou správné, to je na tom nejdivnější.* Je tedy patrné, že s divergentními řadami „se počítalo". O tom svědčí i další citát, který pochází od Cauchyho. Ten napsal (...) *Musel jsem vyjít z předpokladů* zdánlivě trochu tvrdých, *např. že divergentní řady nemají součet*; viz [Ca1]. Ukažme si, jak se s divergentními řadami nakládalo. Tak např. lze nalézt následující ukázku:

$$\begin{aligned} 0 &= (1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots \\ &= 1-1+1-1+1-1+1-1+\cdots \\ &= 1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\cdots = 1\,. \end{aligned}$$

Citujme ještě jednou, a to z překladu práce [Bo][2]:

„Ještě v roce 1830 se pokusil dokázat autor, podepsaný M. R. S., v Gergonnových Annales de Mathématique (Sv. 20, č. 12), že

[2] V textu ukázky je užito původní číslování z citovaného vydání Bolzanovy práce.

známá nekonečná řada

$$a - a + a - a + a - a + \cdots \text{ in inf.}$$

má hodnotu $a/2$; položiv hodnotu oné řady $= x$, byl přesvědčen, že smí činit závěr $x = a - a + a - a + \cdots$ in inf. $= a - (a - a + a - a + \cdots$ in inf.), kde řada, uzavřená v závorkách, je identická s řadou, která se má vypočíst, a tedy že se může znovu položit $= x$, což dává $x = a - x$, a tedy $x = a/2$.

Klamný závěr tu není skryt příliš hluboko. Řada v závorce nemá zřejmě týž počet členů jako ta, která byla ponejprv položena $= x$; ale chybí jí první a. Její hodnota, kdyby ji vůbec bylo možno udat, by musila být označena $x - a$, což by však dávalo identickou rovnici $x - a = x - a$. „Avšak právě v tom" mohlo by se třeba říci, „je něco paradoxního, že tato řada, která není jistě nekonečně velká, by neměla mít přesně určitelnou, měřitelnou hodnotu, zvláště když vzniká do nekonečna pokračujícím dělením čísla a číslem $2 = 1 + 1$, což je způsob vzniku, který mluví zcela pro to, aby její skutečná hodnota byla $a/2$."

Připomínám, že existence *výrazů pro veličiny*, které neoznačují *žádnou skutečnou veličinu*, není sama o sobě ničím nepochopitelným, jak obecně uznáváme a musíme uznat u nuly. Zvláště pak *řada*, prohlásíme-li, že o ní chceme uvažovat jako o veličině, totiž o *součtu* jejích členů, musí být právě vzhledem k *pojmu* součtu (který patří k množinám, tj. k takovým souhrnům, u nichž není třeba dbát na *pořadí* jeho částí) taková, že nedozná žádné změny své hodnoty — ať provedeme jakoukoli změnu v pořadí jejích členů. U veličin musí totiž platit:

$$(A + B) + C = A + (B + C) = (A + C) + B\ .$$

Tato vlastnost nám dává jasný důkaz, že znak, o kterém hovoříme:

$$a - a + a - a + a - a + \cdots \text{in inf.}\ ,$$

není výrazem pro skutečnou veličinu. Neboť na veličině, která je tu znázorněna, bychom jistě nic nezměnili, kdyby vůbec nějaká veličina tím znázorněna byla, jestliže bychom obměnili onen znak takto:

$$(1) \qquad (a - a) + (a - a) + (a - a) + \cdots \text{in inf.}\ ,$$

neboť se tu nic jiného nestalo, než že se dva přímo po sobě následující členy spojily v částečný součet: což zřejmě musí být možné, neboť daná řada nemá vskutku mít poslední člen. Tím však dostaneme

$$0 + 0 + 0 + \cdots \text{in inf.}\ ,$$

což je zřejmě pouze $= 0$.

Právě tak se však nezmění nic na veličině, kterou onen výraz představuje, kdyby vskutku nějakou představoval, když ji přetvoříme takto:

$$(2) \qquad a + (-a + a) + (-a + a) + (-a + a) + \cdots \text{in inf.}\,,$$

kde s výjimkou prvního členu spojíme vždy dva z následujících členů řady v částečný součet, nebo také takto:

$$(3) \qquad -a + (a - a) + (a - a) + (a - a) + \cdots \text{in inf.}\,,$$

kterou obdržíme z (1), vyměníme-li členy každého páru a na výrazu, který tak obdržíme, provedeme tutéž změnu, kterou (2) vznikla z (1). Kdyby tedy nebyl uvedený výraz pro veličinu b e z p ř e d m ě t n ý, musily by všechny výrazy (1), (2) a (3) označovat tutéž veličinu; neboť je jasné, že představa veličiny součtu jedné a téže množiny nemůže reprezentovat více v e l i č i n n a v z á j e m r ů z n ý ch, jak je tomu například u představ $\sqrt{+1}$, arcsin . = 1/2, a jiných. Sama představa veličiny, kterou máme před sebou:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \text{in inf.}$$

by musila být položena jak $= +a$, tak také $= -a$, není-li zcela bezpředmětná, a to tímtéž právem, jakým bychom ji chtěli položit rovnou nule (kterou ovšem také nazýváme obvykle veličinou v nevlastním smyslu); což je úplně nesmyslné a opravňuje nás k závěru, že máme před sebou zcela bezpředmětnou představu. Je pravda, že řada, o které jsme mluvili, se jeví být podílem, který vznikne nekonečně pokračujícím dělením čísla a číslem $2 = 1 + 1$; ale všechny řady, které takto vzniknou, mohou pochopitelně právě proto, že ono dělení ponechává stále zbytek (v našem případě střídavě jednou $-a$ a jednou $+a$), udávat pravou hodnotu podílu (zde $a/2$) nejvýše tenkrát, stávají-li se zbytky, vznikající dalším dělením, menšími než jakkoli malá veličina (...)“

Mnoho matematiků se snažilo Bolzanem uváděnou řadu, často ve speciálním případě pro $a = 1$, „sečíst“. V případě, který uvádí Bolzano, lze popsat postup takto: je-li $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = s$, pak $s = 1 - (1 - 1 + 1 - \ldots) = 1 - s$, a odtud dostáváme $2s = 1$, resp. $s = 1/2$. Není to však jediná možnost. Dosadíme-li hodnotu -1 do vzorce

$$(4) \qquad (1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \ldots\,,$$

dostaneme opět $1 - 1 + 1 - \cdots = 1/2$. Tento postup uplatnil jako první patrně LUIGI GUIDO GRANDI (1671 – 1742). Na základě úvah pravděpodobnostního charakteru se také GOTTFRIED

WILHELM LEIBNIZ (1646 – 1716) přikláněl k 1/2 jakožto hodnotě součtu této řady. Ukážeme si dále, že to není až tak absurdní výsledek.

3. Násobení řad. Problém násobení řad spočívá zejména v tom, že dvojice čísel (k,l), $k,l \in \mathbb{N}_0$, nemají žádné „přirozené" pořadí. A tak je třeba členy „formálního" součinu $\sum_{(k,l)} a_k b_l$ seřadit, případně uzávorkovat. Jestliže při nějakém „pořadí všech dvojic" vzniklá řada konverguje absolutně, víme z prvé části, že hodnota součtu (a tedy součinu řad) nezávisí na tomto zvoleném pořadí. Také není obtížné si rozmyslit, že při $\sum |a_k| = A < \infty$, $\sum |b_l| = B < \infty$, platí

$$\sum_{(k,l)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0} |a_k b_l| \le \Big(\sum |a_k|\Big)\cdot\Big(\sum |b_l|\Big) = AB < \infty\,,$$

takže při násobení absolutně konvergentních řad žádné potíže nevzniknou. To bylo známo již Cauchymu. Označíme-li dále pro dvojici konvergentních řad $\sum a_k = s$, $\sum b_l = t$, pak pro

$$(5) \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k = s_n\,, \quad \sum_{k=0}^{n} b_l = t_n\,,$$

zřejmě platí, pokud bychom užili k definici součinu řad vztahu

$$\Big(\sum a_k\Big)\cdot\Big(\sum b_l\Big) = \lim_{n\to\infty} s_n t_n = st\,,$$

rovnost $(\sum a_k)\cdot(\sum b_l) = st$. Toto je uspokojivé až na jednu maličkost: je tu patrně přirozenější kandidát na „správně definovaný součin". Násobíme-li dva polynomy $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $\sum_{l=0}^{m} b_l x^l$, dostaneme jako součin polynom stupně nejvýše mn

$$a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)\,x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)\,x^2 + \dots\,.$$

Porovnání koeficientů s formulí z následující definice ukazuje jistou její přirozenost.

Definice 1. Pod označením *Cauchyův součin* řad $\sum a_n$ a $\sum b_n$ rozumíme řadu $\sum c_n$ o členech

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\,, \quad n \in \mathbb{N}_0\,. \tag{6}$$

Až potud nedochází k nepříjemnostem, ztrácíme pouze jistotu, zda pro řady neabsolutně konvergentní k součtům s, t, bude tento součin o členech definovaných pomocí (6) mít za součet číslo st. A v tom je, bohužel, ona tušená zrada (jinak by to bylo vše tak jednoduché, že by nestálo za to o tom psát). Konvergují-li obě řady absolutně, je to pravda; víme, že to je známo již z [Ca1], str. 147. R. 1826 Abel ukázal, že *konverguje-li Cauchyho součin* řad konvergujících k součtům s, t, konverguje opět k „očekávané hodnotě" st. Následující příklad sestrojil Cauchy; pochází též z jeho knihy [Ca1]. Vyšetříme součin jedné *neabsolutně* konvergentní řady s toutéž řadou. Položíme $a_0 = b_0 = 0$,

$$a_n = b_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Pro členy c_n Cauchyova součinu $\sum c_n$ dostáváme (užijeme opět schematický zápis)

$$0+0+1-\left(\frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}+\dots\right)-\dots\,,$$

a tedy obecně platí pro $n > 1$

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n-k}\sqrt{k}}\,.$$

Odtud vyplývá odhad

$$|c_n| = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{(n-1)(n-1)}} = 1\,.$$

To však znamená, že *není splněna* nutná podmínka konvergence $c_n \to 0$ a Cauchyův součin těchto dvou stejných (konvergentních!) řad diverguje (důkaz divergence je v této formě převzat z [Str]).

V souvislosti s takovými jevy je vhodné zavést obecnější metody určení součtu řady, které každé *konvergentní řadě* přiřadí její součet a kromě toho dokáží do jisté míry smysluplně přiřadit „součet" (dokonce konečný) i některým řadám divergentním. Obecně je nazýváme *sčítací metody* a pokud opravdu takto rozšiřují pojem konvergence, říkáme jim *regulární* sčítací metody.

Dokončení příště

BROOK TAYLOR A COLIN MACLAURIN SČÍTAJÍ ŘADU OVEČEK.