CO JEŠTĚ NEVÍME O PŘIROZENÝCH ČÍSLECH (4)

aneb

Některé slavné hypotézy

EDUARD FUCHS

8. Prvočíselná dvojčata

Ve druhé polovině 20. století byly vyřešeny některé slavné problémy, s nimiž se matematikové potýkali mnohdy celá staletí. Již ve druhém pokračování jsme se zmínili, že v r. 1995 byla dokázána tzv. **Velká Fermatova věta** a již dříve byla rozřešena **hypotéza kontinua**[1] a **problém čtyř barev**[2]. Přesto dodnes zůstává — a to i v teorii čísel — mnoho nevyřešených problémů, které odolávají všem pokusům o jejich zdolání. Formulace mnohých z nich je přitom až překvapivě jednoduchá. Zmiňme se tedy na závěr našeho seriálu alespoň o některých.

Jak známo, *prvočíselnými dvojčaty* rozumíme taková prvočísla a, b, jejichž rozdíl je 2. Čtenář si jistě okamžitě vybaví například prvočísla 11, 13 nebo 29, 31. Dobře zapamatovatelná prvočíselná dvojčata jsou například

$$1\,000\,000\,000\,061 \quad \text{a} \quad 1\,000\,000\,000\,063.$$

---

[1]Tato hypotéza, která byla asi nejslavnějším matematickým problémem 20. století, se týkala toho, zda existuje množina, která má větší mohutnost než množina všech přirozených čísel, avšak menší než množina všech reálných čísel. V r. 1963 dokázal americký matematik Paul COHEN (nar. 1934), že tuto hypotézu nelze v Zermelo-Fraenkelově teorii množin ani dokázat ani vyvrátit.

[2]Problém z teorie grafů, který se — obrazně řečeno — týkal toho, jaký je nezbytný počet barev, s nimiž vystačíme při vybarvování „jakékoliv" politické mapy tak, že sousední území budou vybarvena rozdílně. (Přesná formulace ovšem vyžaduje precizaci uvedených pojmů.) V r. 1976 bylo dokázáno, že stačí čtyři barvy. K důkazu bylo zásadním způsobem využito počítačů.

I při hledání nových prvočíselných dvojčat v posledních letech sehrává zásadní roli výpočetní technika. Tak se například v r. 1995 podařilo najít prvočíselná dvojčata

$$570\,918\,348 \times 10^{5\,120} \pm 1\,,$$

která mají 5129 číslic. Největší dosud známá prvočíselná dvojčata objevil 17. 1. 1999 francouzský elektroinženýr Henri LIFSCHITZ (nar. 1948). Jsou to čísla

$$361\,700\,055 \times 2^{39\,020} \pm 1\,,$$

která mají 11 755 cifer.

Přestože se však prvočíselná dvojčata vyskytují prakticky v celém dosud probádaném úseku přirozených čísel, není dodnes známo, zda je jich **konečně nebo nekonečně mnoho**. Mezi známými předpověďmi přitom panují značné rozpory, neboť indicie naznačují zcela rozdílné výsledky.

Jistou nápovědou by například mohla být následující skutečnost. Víme, že tzv. *harmonická řada* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje, tj. ke každému kladnému číslu $A > 0$ existuje takové přirozené číslo n_0, že

$$\sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n_0} > A.$$

* * *

Dovolme si nyní krátkou odbočku. Skutečnost, že *harmonická řada diverguje*, je všeobecně známa a sdělení tohoto faktu nechává studenty při přednášce z matematické analýzy zcela chladnými. Při vhodné interpretaci však je tato okolnost přímo „děsivá".

Představme si úsečku o délce rovné například vzdálenosti naší Země od nejbližší hvězdy mimo naši sluneční soustavu, což — jak známo — je více než 4 světelné roky. Divergence harmonické řady znamená, že když začneme tuto úsečku pokrývat postupně úsečkami, z nichž první bude dlouhá 1 mm, druhá $\frac{1}{2}$ mm, třetí $\frac{1}{3}$ mm atd., pak **konečným** počtem těchto úseček uvedenou vzdálenost k Proximě Centauri pokryjeme.

Kolik by těch úseček ovšem mělo být — jak za okamžik uvedeme — nelze dost dobře vůbec vyčíslit. Popisovaný příklad nám však poslouží k dokumentaci dvou na první pohled nesouvisejících faktů. Především si můžeme opětovně uvědomit, jak odvážného kroku se dopouštíme, když ve vyučování běžně a bez rozpaků hovoříme o součtech **celých** nekonečných (například geometrických) řad. Vlastnosti harmonické řady současně dobře ilustrují zcestnost v poslední době častých názorů, že role matematiky klesá, neboť „počítat" za nás budou počítače a zatěžovat žáky nějakou „teorií" je tak v podstatě zbytečné. Divergentní řada totiž roste tak „pomalu", že ani sebelepší počítače dodnes „nepoznají", že tato řada nemá konečný součet. Žádný dnešní superpočítač nedovede sečíst ani tolik členů, aby dosáhl například mezisoučtu 20. Jinak řečeno, žádný počítač nepozná, že skládáním výše uvedených krátkých úseček může dosáhnou délku 20 mm. Jak by tedy mohl „dohlédnout" až k nejbližší hvězdě!

* * *

Zatím jsme však ani nenaznačili, jak harmonická řada souvisí s problémem prvočíselných dvojčat. Nyní to tedy napravíme.

Vybereme-li z harmonické řady některé členy, může tato vybraná řada divergovat i konvergovat. Například řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots$$

diverguje, zatím co řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

jak známo konverguje, neboť je to geometrická řada s kvocientem 1/2.

Nyní již můžeme zformulovat jeden významný rozdíl mezi posloupností $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ všech prvočísel a posloupností těch prvočísel, která tvoří prvočíselná dvojčata. Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{23} + \frac{1}{29} + \cdots$$

utvořená pomocí všech prvočísel diverguje. Kdyby divergovala i řada

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\frac{1}{29}+\frac{1}{31}+\cdots,$$

v níž se ve jmenovateli postupně objevují všechna prvočíselná dvojčata, existovalo by samozřejmě prvočíselných dvojčat nekonečně mnoho. Jak však ukázal BRUN, tato řada konverguje. Určit její součet, jemuž se říká **Brunova konstanta**, je velmi obtížné. V r. 1974 určili D. SHANKS a J. W. WRENCH její přibližnou hodnotu $1.902\,160\,5\cdots$, v únoru 1999 ji zpřesnil Thomas NICELY[3] na $1.902\,160\,582\,3\cdots$.

Co lze vydedukovat z konvergence druhé z uvedených řad? Samozřejmě by tato řada měla konečný součet (a tedy konvergovala), pokud by prvočíselných dvojčat bylo pouze konečně mnoho. I kdyby jich však bylo nekonečně mnoho, je zřejmě přechod od všech prvočísel k prvočíselným dvojčatům výraznějším kvalitativním zlomem než přechod od přirozených čísel k prvočíslům.

Jestliže právě uvedený fakt naznačuje, že prvočíselných dvojčat by **mohlo být** pouze konečně mnoho, jiné skutečnosti či hypotézy napovídají opak.

Z tzv. *základní věty o prvočíslech* plyne, že když n je „velké" přirozené číslo, pak pravděpodobnost toho, že přirozené číslo $1 \leqslant x \leqslant n$ je prvočíslem, je přibližně $\frac{1}{\ln n}$. Čím větší je číslo n, tím lepší aproximaci přitom uvedený vztah udává.

Na rozdíl od tohoto tvrzení, které je **dokázáno**[4], jsou následující úvahy o prvočíslech pouze **hypotézami**. Tyto hypotézy však

---

[3]Nicely k tomuto zpřesnění využil všech prvočíslených dvojčat až do řádu 1.5×10^{15}. Při těchto výpočtech objevil chybu procesoru Intel Pentium. Tím jen ilustrujeme fakt, který jsme uvedli již v minulém pokračování: zdánlivě samoúčelná hledání velkých prvočísel a jiné analogické činnosti dnes pomáhají, kromě jiného, i při testování hardwaru a softwaru.

[4]Popsaný vztah předpověděl již v r. 1798 francouzský matematik Adrien-Marie LEGENDRE (1752 – 1833). Důkaz však provedli až v r. 1896 nezávisle na sobě belgický matematik Charles Jean de la VALLÉE-POUSSIN (1866 – 1962) a francouzský matematik Jacques HADAMARD (1865 – 1963).

byly ověřovány náročnými počítačovými testy, v nichž prozatím dokonale obstály.

Zvolíme-li přirozené číslo x tak, že $1 \leqslant x \leqslant n$, je pravděpodobnost toho, že x i $x+2$ jsou prvočísla, přibližně $\frac{1}{(\ln n)^2}$. Jinak řečeno, v intervalu $< 1, n >$ leží přibližně $\frac{1}{(\ln n)^2}$ dvojic tvořících prvočíselná dvojčata. Jestliže však číslo x z intervalu $< 1, n >$je prvočíslo, stoupne pravděpodobnost toho, že i $x+2$ je prvočíslo, z hodnoty $\frac{n}{(\ln n)^2}$ na $\frac{(1.320\,32\ldots)\cdot n}{(\ln n)^2}$.

Přitom platí, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(\ln n)^2} = \infty\,,$$

což by zase naznačovalo, že prvočíselných dvojčat je asi nekonečně mnoho.

Jakkoliv jsou tyto úvahy nedokázané, panuje značná shoda mezi jejich předpověďmi a skutečností. V následující tabulce pro zajímavost uvádíme několik intervalů o délce 150 000. Ve sloupci P je počet předpovězených a ve sloupci N skutečně nalezených prvočíselných dvojčat.

Interval	P	N
$\langle 100\,000\,000, 100\,150\,000\rangle$	584	601
$\langle 1\,000\,000\,000, 1\,000\,150\,000\rangle$	461	466
$\langle 10\,000\,000\,000, 10\,000\,150\,000\rangle$	374	389
$\langle 100\,000\,000\,000, 100\,000\,150\,000\rangle$	309	276
$\langle 1\,000\,000\,000\,000, 1\,000\,000\,150\,000\rangle$	259	276
$\langle 10\,000\,000\,000\,000, 10\,000\,000\,150\,000\rangle$	221	208
$\langle 100\,000\,000\,000\,000, 100\,000\,000\,150\,000\rangle$	191	186
$\langle 1\,000\,000\,000\,000\,000, 1\,000\,000\,000\,150\,000\rangle$	166	161

9. Goldbachova hypotéza

Německý právník, pruský velvyslanec v Rusku a matematický samouk Christian GOLDBACH (1690 – 1764), který se v matematice zabýval především teorií čísel, zformuloval dne 7. 6. 1742 v dopise Eulerovi hypotézu, že *každé přirozené číslo* $n > 5$ *je součtem nejvýše tří prvočísel.* Euler mu obratem odpověděl, že toto tvrzení je ekvivalentní s tím, že *každé sudé* $n > 2$ *je součtem dvou prvočísel.* Této Eulerově formulaci se dnes říká **Goldbachova hypotéza**. (Jejím důsledkem je tzv. *ternární Goldbachův problém: každé liché číslo* $n > 7$ *je součtem tří prvočísel*).

Uvedená Goldbachova hypotéza nebyla dodnes, přes nesmírné úsilí mnoha generací matematiků, ani dokázána ani vyvrácena. Mimořádně obtížnými metodami bylo dokázáno jen několik dílčích výsledků.

V r. 1937 dokázal ruský matematik Ivan Matvějevič VINOGRADOV (1891 – 1983) první „definitivní" výsledek: *existuje číslo* n_0 *takové, že každé liché* $n > n_0$ *je součtem tří prvočísel.* Z mimořádně obtížného důkazu však neplynulo, jak velké je ono číslo n_0. Odhady ukazovaly, že může být nepředstavitelně velké. Přesto však Vinogradovův výsledek byl zásadním pokrokem: ternární Goldbachův problém byl vyřešen alespoň od jistého — byť ne známého — čísla.

Po téměř dvaceti letech, v r. 1956 dokázal BORODZKIN, že Vinogradovovo číslo n_0 nepřevyšuje hodnotu $3^{(3^{15})} < 10^{7\,000\,000}$ a v r. 1989 posléze dokázali CHEN a WANG tuto hodnotu ještě snížit na číslo $10^{43\,000}$.

Částečného pokroku v řešení Goldbachovy hypotézy dosáhl v r. 1930 ruský matematik Lev Genrichovič ŠNIRELMAN (1905 – 1938), když dokázal, že *každé „dostatečně velké" číslo je součtem nejvýše* k *prvočísel.* Jeho metodami však nebylo možno dokázat, jak velké je ono číslo k, odhady ukazovaly hodnotu cca 800 000. Přestože od tohoto Šnirelmanova výsledku bylo k důkazu Goldbachovy hypotézy nesmírně daleko, přesto to byl výrazný přínos, neboť bylo alespoň dokázáno, že sudá čísla jsou součtem takového počtu prvočísel, který nepřesáhne jistou hranici.

Hodnota Šnirelmanova čísla k byla postupně snižována. Prozatím nejlepšího výsledku dosáhl v r. 1995 O. RAMARÉ: *každé sudé číslo lze vyjádřit jako součet nejvýše šesti prvočísel.*

Současně s popsanými teoretickými výsledky probíhalo — a nadále probíhá — prověřování Goldbachovy hypotézy na počítačích. V r. 1993 potvrdil SINISALO Goldbachovu hypotézu pro všechna přirozená čísla menší než $4 \cdot 10^{11}$. Tuto hodnotu později za pomoci superpočítače Cray C90 a za podpory množství pracovních stanic zvýšili Jean-Marc DESHOUILLERS, Yanick SAOUTER a Herman te RIELE dokonce na 10^{14}. Zatím poslední verifikaci až do hodnoty $4 \cdot 10^{14}$ provedl v říjnu 1998 Joerg RICHSTEIN.

10. Waringův problém

V roce 1770 v práci *Meditationes Algebraicae* napsal anglický matematik a lékař Edward WARING (1734 – 1798) bez důkazu následující tvrzení: *každé přirozené číslo je součtem nejvýše devíti třetích mocnin, nejvýše devatenácti čtvrtých mocnin a tak dále.* Přitom nespecifikoval, co rozumí úslovím „a tak dále", ani nenaznačil, jak na svou úvahu přišel. Lze se jen domýšlet, že uvedený úsudek zformuloval na základě empiricky získaných výsledků pro relativně „malá" čísla.

Během doby se se z této úlohy vyvinul následující **Waringův problém**: *existuje ke každému přirozenému číslu k takové přirozené číslo $g(k)$, že každé přirozené číslo je součtem nejvýše $g(k)$ k-tých mocnin?*

Problém byl mnohem těžší, než se zpočátku zdálo. Existenci čísla $g(k)$ pro každé přirozené číslo k dokázal až v r. 1909 David HILBERT[5]. Problém určení čísel $g(k)$ však zůstal i poté otevřen.

Pro třetí mocniny je Waringovo tvrzení pravděpodobně správné, přičemž jsou známa pouze dvě přirozená čísla, k jejichž vyjádření je opravdu nutno využít 9 třetích mocnin:

$$23 = 2^3 + 2^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3\,,$$
$$239 = 4^3 + 4^3 + 3^3 + 3^3 + 3^3 + 3^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3.$$

[5]David HILBERT (1862 – 1943), německý matematik, jeden z největších matematiků konce 19. a první poloviny 20. století.

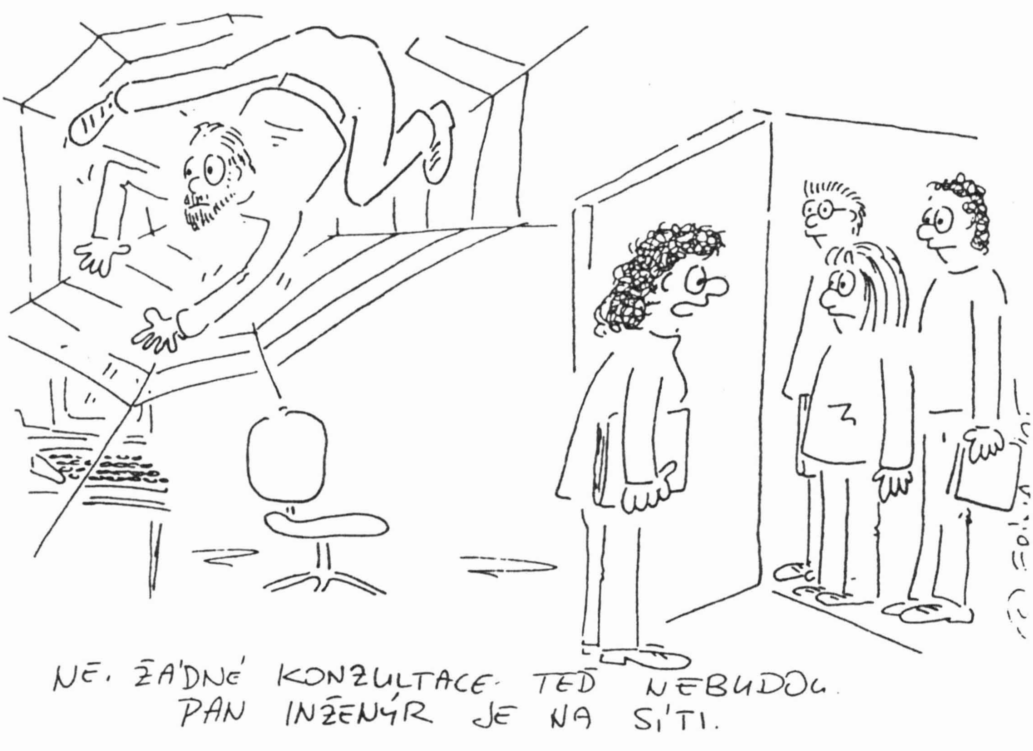
(Kdybychom ovšem připustili i třetí mocniny **záporných** čísel, platilo by například $23 = 3^3 + 4 \cdot (-1)^3$, takže bychom vystačili s pěti třetími mocninami.)

Až v roce 1986 dokázali správnost Waringova tvrzení pro $k = 4$ Ramachandran BALASUBRAMANIAN, Jean-Marc DESHOULLIERS a François DRESS. Nejmenším číslem, k jehož vyjádření skutečně potřebujeme 19 čtvrtých mocnin je 79, neboť

$$79 = 15 \times 1^4 + 4 \times 2^4 .$$

Další známá čísla s touto vlastností jsou 159, 239, 319, 399 a 559.

Pro další mocniny k není dodnes hodnota $g(k)$ známa. Předpokládá se pouze, že každé přirozené číslo je součtem nejvýše 37 pátých mocnin, nejvýše 73 šestých mocnin a nejvýše 137 sedmých mocnin.



NE. ŽÁDNÉ KONZULTACE TEĎ NEBUDOU.
PAN INŽENÝR JE NA SÍTI.