Dag Hrubý
Zajímavé odmocniny

Učitel matematiky, Vol. 7 (1999), No. 2, 119–121

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150982

ZAJÍMAVÉ ODMOCNINY

DAG HRUBÝ

Ve žluté knížce [1] a ve sbírce [2] je uvedena následující úloha. Máme vypočítat rozdíl

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}. \tag{1}$$

Výsledkem takové úlohy bývá zpravidla přirozené číslo. Je tomu tak i v tomto případě.
Po substituci $\sqrt{5}+2=a, \sqrt{5}-2=b$ dostáváme $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}=x$; umocněním této rovnice získáme rovnici

$$a-3\sqrt[3]{a^2b}+3\sqrt[3]{ab^2}-b=x^3. \tag{2}$$

Dále zřejmě platí $a+b=2\sqrt{5}$, $a-b=4$, $ab=1$. Dosadíme-li za $ab=1$ a za $a-b=4$ do (2), pak dostaneme

$$4-3(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})=x^3.$$

Nyní můžeme opět dosadit $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}=x$; pak

$$x^3+3x-4=0. \tag{3}$$

Snadno nahlédneme, že tato rovnice má kořen $x=1$. Můžeme tedy psáti

$$x^3+3x-4=(x-1)(x^2+x+4).$$

Trojčlen x^2+x+4 ale už rozložitelný v $\mathbb{R}$ není, a proto má rovnice (3) právě jeden reálný kořen $x=1$. Můžeme tedy s určitostí tvrdit, že

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=1.$$

Nabízí se otázka, zda by bylo možné nalézti další dvojice čísel a, b s podobnými vlastnostmi, aniž by bylo nutné zabývat se v plné šíři řešením alegebraických rovnic třetího stupně. Ukážeme, že to je možné. Rozhodněme se hledat přirozená čísla a, b, x, pro která platí:

$$\sqrt[3]{\sqrt{a}+b}-\sqrt[3]{\sqrt{a}-b}=x. \tag{4}$$

Zvolíme-li substituci: $u=\sqrt{a}+b$, $v=\sqrt{a}-b$, potom je $uv=a-b^2$, $u+v=2\sqrt{a}$ a $u-v=2b$. Po dosazení do (4) dostáváme rovnici

$$\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v}=x.$$

Po umocnění postupně dostáváme

$$u-3\sqrt[3]{u^2v}+3\sqrt[3]{uv^2}-v=x^3,$$
$$u-3\sqrt[3]{uv}(\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v})-v=x^3,$$
$$x^3+3\sqrt[3]{uv}\,x-(u-v)=0,$$
$$x^3+3\sqrt[3]{a-b^2}\,x-2b=0.$$

Poslední rovnici lze zjednodušit za předpokladu, že výraz $a-b^2$ bude třetí mocninou přirozeného čísla. Po substituci $a-b^2=k^3$ dostáváme rovnici

$$x^3+3kx-2b=0.$$

Tato rovnice je již vhodná k diskuzi a k „výrobě“ výrazů typu (1).

Případ $k=1$.
Pro $k=1$ dostáváme rovnici $x^3+3x-2b=0$. Dále je $a-b^2=1$, tj. $a=b^2+1$. Pro b pak platí $b=\frac{x^3+3x}{2}$. Nyní již můžeme dosazovat za x a počítat b, a. Tak např. pro $x=1$ dostáváme $b=2$, $a=5$. Po dosazení do (4) dostaneme již dříve uvedenou rovnost

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=1.$$

Zvolíme-li $x=2$, pak $b=7$, $a=50$ a dostáváme

$$\sqrt[3]{\sqrt{50}+7}-\sqrt[3]{\sqrt{50}-7}=2.$$

Podobně pro $x = 3$ je $b = 18$, $a = 325$ a platí

$$\sqrt[3]{\sqrt{325}+18} - \sqrt[3]{\sqrt{325}-18} = 3.$$

Nyní se můžeme pokusit o jisté zobecnění a položíme $x = n$. Pro b, a dostáváme $b = \frac{n^3+3n}{2}$, $a = \frac{(n^3+3n)^2}{4} + 1$ a po dosazení do (4) máme

$$\sqrt[3]{\sqrt{\frac{(n^3+3n)^2+4}{4}} + \frac{n^3+3n}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{(n^3+3n)^2+4}{4}} - \frac{n^3+3n}{2}} = n.$$

Pro zajímavost si ukážeme i případ $k = 2$.

Případ $k = 2$.
Pro $k = 2$ dostáváme rovnici $x^3+6x-2b = 0$. Dále je $a-b^2 = 8$, tj. $a = b^2+8$. Pro b pak platí $b = \frac{x^3+6x}{2}$. Nyní již můžeme dosazovat za x a počítat b, a. Tak např. pro $x = 2$ dostáváme $b = 10$, $a = 108$. Po dosazení do (4) dostaneme rovnost

$$\sqrt[3]{\sqrt{108}+10} - \sqrt[3]{\sqrt{108}-10} = 2.$$

Podobně pro $x = 4$ je $b = 44$, $a = 1\,937$. Po dosazení dostáváme

$$\sqrt[3]{\sqrt{1\,944}+44} - \sqrt[3]{\sqrt{1\,944}-44} = 4.$$

Pro $x = n$, kde n je sudé číslo, dostáváme

$$\sqrt[3]{\sqrt{\frac{(n^3+6n)^2+32}{4}} + \frac{n^3+6n}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{(n^3+6n)^2+32}{4}} - \frac{n^3+6n}{2}} = n.$$

Pokud máte čas a náladu, můžete „vyrábět“ další a další podobné výrazy. Třeba čtenář Karel Pilný nebo čtenářka Anežka Pilná přistoupí k tomuto problému jinak nebo provede další zobecnění.

LITERATURA:

[1] Hejný, M. a kol., *Teória vyučovania matematiky 2.*, SPN, Bratislava, 1989.

[2] Leksinski, W. a kol., *Matematyka w zadaniach dla kandydatow na wzysze uczelnie*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1985.