Bohdan Zelinka

Kolik zelených lístků má jedle aneb Jak sčítat a násobit přes prázdnou množinu

Učitel matematiky, Vol. 9 (2001), No. 2, 106–110

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150893

KOLIK ZELENÝCH LÍSTKŮ MÁ JEDLE ANEB JAK SČÍTAT A NÁSOBIT PŘES PRÁZDNOU MNOŽINU

BOHDAN ZELINKA

Mějme množinu $\mathcal{M}$ a zobrazení f této množiny do nějaké množiny čísel. Pak samozřejmě dobře víme, co je

$$\sum_{x\in\mathcal{M}} f(x) \quad \text{a} \quad \prod_{x\in\mathcal{M}} f(x) \quad .$$

To první je součet hodnot $f(x)$ pro všechny prvky x množiny $\mathcal{M}$, to druhé je jejich součin.

Ale teď pozor! Množina $\mathcal{M}$ může být také prázdná množina $\emptyset$. Jak budeme sčítat a násobit potom? Chceme přece dostat nějaké přesné číselné hodnoty. A co dostaneme z ničeho?

Chceme-li něco dodefinovávat, měli bychom se snažit, aby to bylo v souladu s tím, co už tady máme. Nechť platí $\mathcal{M} = \mathcal{K} \bigcup \mathcal{L}$, $\mathcal{K} \bigcap \mathcal{L} = \emptyset$. Potom zřejmě

$$\sum_{x\in\mathcal{M}} f(x) = \sum_{x\in\mathcal{K}} f(x) + \sum_{x\in\mathcal{L}} f(x) \quad ,$$

$$\prod_{x\in\mathcal{M}} f(x) = \left(\prod_{x\in\mathcal{K}} f(x)\right)\left(\prod_{x\in\mathcal{L}} f(x)\right) \quad .$$

Speciálně pro každou množinu $\mathcal{M}$ platí $\mathcal{M} = \mathcal{M} \bigcup \emptyset$, $\mathcal{M} \bigcap \emptyset =$ $= \emptyset$. Tedy

$$\sum_{x\in\mathcal{M}} f(x) + \sum_{x\in\emptyset} f(x) = \sum_{x\in\mathcal{M}} f(x)$$

a z toho

$$\sum_{x\in\emptyset} f(x) = \emptyset \quad .$$

Je to zcela přirozené; nic jsme nesčítali a také nám nic nevzniklo. Pro součin bychom měli

$$\left(\prod_{x\in\mathcal{M}} f(x)\right)\left(\prod_{x\in\emptyset} f(x)\right) = \prod_{x\in\mathcal{M}} f(x)$$

a z toho

$$\prod_{x\in\emptyset} f(x) = 1 \quad .$$

To je trochu jiné, ale zřejmě je to také účelně definováno.

To máme tedy aritmetické operace. Podobně však můžeme mít zobrazení F množiny $\mathcal{M}$ do nějaké soustavy množin (tj. množiny množin). Potom bychom se zajímali, co je $\bigcup_{x\in\mathcal{M}} F(x)$ a $\bigcap_{x\in\mathcal{M}} F(x)$. Máme zase

$$\left(\bigcup_{x\in\mathcal{M}} F(x)\right) \cup \left(\bigcup_{x\in\emptyset} F(x)\right) = \bigcup_{x\in\mathcal{M}} F(x) \quad ,$$

$$\left(\bigcap_{x\in\mathcal{M}} F(x)\right) \cap \left(\bigcap_{x\in\emptyset} F(x)\right) = \bigcap_{x\in\mathcal{M}} F(x) \quad .$$

Z toho (zase vzhledem k tomu, že to má platit pro každou množinu $\mathcal{M}$) bychom tedy dostali

$$\bigcup_{x\in\emptyset} F(x) = \emptyset \quad , \quad \bigcap_{xq\emptyset} F(x) = \mathcal{U} \quad ,$$

kde $\mathcal{U}$ by bylo množinové univerzum, kterého právě užíváme. (Zdůrazněme, že množinové univerzum není nic absolutně daného; je to něco, co si volíme sami podle svých potřeb.) Je to tedy dost obdobné tomu předešlému.

Analogií sumačního znaménka jsou v predikátové logice kvantifikátory. Obecný kvantifikátor $\forall$ představuje provedení operace konjunkce & přes všechny prvky dané množiny. U existenčního kvantifikátoru jde zase o disjunkci $\vee$. Kdybychom měli jen konečné množiny předmětů, o nichž vyslovujeme predikáty, nepotřebovali bychom vlastně kvantifikátory zavádět. Je-li $\mathcal{M}$ konečná množina, $\mathcal{M} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, pak

$$(\forall x \in \mathcal{M})P(x) = P(x_1)\&P(x_2)\&\ldots\&P(x_n) \quad ,$$

$$(\exists x \in \mathcal{M})P(x) = P(x_1) \vee P(x_2) \vee \ldots \vee P(x_n) \quad .$$

Kvantifikátory tady slouží k tomu, abychom mohli provádět operace konjunkce a disjunkce přes libovolné množiny. Opět máme pro libovolnou podmnožinu $\mathcal{M}$ referenční množiny a libovolný predikát P

$$((\forall x \in \mathcal{M})P(x))\,\&\,((\forall x \in \emptyset)P(x)) = (\forall x \in \mathcal{M})P(x) \quad ,$$

$$((\exists x \in \mathcal{M})P(x)) \vee ((\exists x \in \emptyset)P(x)) = (\exists x \in \mathcal{M})P(x) \quad .$$

To by nám mělo dávat

$$(\forall x \in \emptyset)P(x) = 1 \quad , \quad (\exists x \in \emptyset)P(x) = 0 \quad .$$

Řečeno slovy, predikát P mají všechny prvky prázdné množiny (když si to *„zdemorganujeme"*, neexistuje prvek prázdné množiny, pro nějž by platila negace P, s čímž můžeme jedině vřele souhlasit). Na druhé straně není pravda, že by existoval prvek prázdné množiny, pro nějž by platilo P. A vychází to docela správně. My totiž o prvcích prázdné množiny můžeme tvrdit cokoliv, kromě toho, že existují.

V této souvislosti se zmíníme i o pojmu zobrazení. Jak to vůbec je? Existuje zobrazení prázdné množiny do jiné množiny nebo obráceně zobrazení nějaké množiny do prázdné množiny?

Vyjděme z definice. Zobrazení z množiny $\mathcal{A}$ do množiny $\mathcal{B}$ je jistá podmnožina φ kartézského součinu $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$. Ta má tu vlastnost, že každý prvek $a \in \mathcal{A}$ se vyskytuje nejvýše v jedné uspořádané dvojici $(a, b) \in \varphi$ na prvním místě. Pokud jde o zobrazení množiny $\mathcal{A}$ (bez předložky) do množiny $\mathcal{B}$, vyskytuje se každý prvek $a \in \mathcal{A}$ právě v jedné dvojici $(a, b,) \in \varphi$ na prvním místě. Nechť $\mathcal{A} = \emptyset$ a zkoumejme zobrazení prázdné množiny $\emptyset$ do množiny $\mathcal{B}$, která může být libovolná. Máme $\varphi \subseteq \emptyset \times \mathcal{B}$. Platí ovšem $\emptyset \times \mathcal{B} = \emptyset$, protože jde o množinu uspořádaných dvojic, jejichž první prvek je z prázdné množiny. Takové prvky neexistují, neexistují tedy ani dvojice (a,b) s $a \in \emptyset$, $b \in \mathcal{B}$. Zobrazení φ by mělo být podmnožinou množiny $\emptyset \times \mathcal{B}$, což je možné jedině tehdy, je-li $\varphi = \emptyset$, tedy φ je prázdné zobrazení. A takové zobrazení skutečně je zobrazení množiny $\emptyset$ do $\mathcal{B}$. Můžeme říci, že každý prvek z $\emptyset$ (žádný neexistuje) se vyskytuje právě v jedné dvojici z φ (tyto dvojice také neexistují). Mluvíme o neexistujících prvcích, aniž bychom o nich tvrdili, že existují; a to přece smíme. Existuje tedy právě jedno zobrazení prázdné množiny $\emptyset$ do libovolné množiny $\mathcal{B}$ (včetně případu $\mathcal{B} = \emptyset$); je to prázdné zobrazení.

Vezměme nyní opačný případ. Mějme $\mathcal{A} \neq \emptyset$, $\mathcal{B} = \emptyset$ a budiž ψ zobrazení množiny $\mathcal{A}$ do množiny $\emptyset$. Máme $\psi \subseteq \mathcal{A} \times \emptyset$ a ovšem $\mathcal{A} \times \emptyset = \emptyset$. Zobrazení ψ by tedy mělo být, stejně jako výše φ, prázdné zobrazení. Podle definice by se každý prvek množiny $\mathcal{A}$ měl vyskytnout právě v jedné dvojici $(a,b) \in \psi$ na prvním místě. Potíž je v tom, že ty prvky $a \in \mathcal{A}$ existují, zatímco $\psi = \emptyset$. V (prázdné) množině dvojic ψ se prostě nemohou vyskytovat dvojice s prvním prvkem z $\mathcal{A}$ a to je spor s předpokladem, že prázdné zobrazení je zobrazení množiny $\mathcal{A}$ do prázdné množiny $\emptyset$. Žádná jiná podmnožina kartézského součinu $\mathcal{A} \times \emptyset$ neexistuje, tedy neexistuje zobrazení množiny $\mathcal{A}$ do prázdné množiny. Může ovšem existovat zobrazení z $\mathcal{A}$ do $\emptyset$; je to zobrazení jisté podmnožiny množiny $\mathcal{A}$, konkrétně množiny $\emptyset$ do $\emptyset$. Platí tedy toto:

Existuje právě jedno zobrazení prázdné množiny $\emptyset$ do libovolné množiny $\mathcal{B}$ (včetně případu $\mathcal{B} = \emptyset$). Zobrazení množiny $\mathcal{A}$ do prázdné množiny $\emptyset$ existuje právě tehdy, je-li $\mathcal{A} = \emptyset$, a tehdy je právě jedno.

Víme, že počet zobrazení množiny $\mathcal{A}$ do množiny $\mathcal{B}$ (pokud jsou obě konečné), je $|\mathcal{B}|^{|\mathcal{A}|}$. A z výše uvedeného plyne to, co už víme o mocninách, tedy že $n^0 = 1$ pro každé celé $n \geq 0$ (tedy i $0^0 = 1$), zatímco $0^n = 0$ pro $n \geq 1$.

Prázdné zobrazení je rovněž jediným zobrazením množiny $\emptyset$ na $\emptyset$, tedy jedinou permutací množiny $\emptyset$; proto platí také $0! = 1$.

A po té dávce formální logiky si trochu odskočme. Jan Neruda si ve svých „Obrazech z ciziny“ všímá rumunské lidové poezie. Zvláště pak popisuje jednu její formu, lyrickoepickou báseň zvanou *doina*. Každá *doina* začíná oslovením zeleného lístku: ”*Foaie verde ...*”. Následuje ovšem označení rostliny, ze které ten lístek má být. A to je předznamenání tématu básně. Zelený lístek z růže předznamenává téma lásky, zelený lístek z dubu zase téma hrdinství. Nejsmutnější je oslovení: ”*Foaie verde bradului*”, oslovení zeleného lístku jedle. To proto, že se obrací k prvku prázdné množiny; jedle je totiž jehličnan a žádné lístky nemá. A tak toto oslovení předznamenává nejsmutnější téma, smrt.

Prof. RNDr. Bohdan Zelinka, DrSc.
Katedra aplikované matematiky
PdF Technické univerzity Liberec
Hálkova 6
416 17 Liberec
email: bohdan.zelinka@vslib.cz