František Kuřina

Orbity shodných transformací

Učitel matematiky, Vol. 9 (2001), No. 2, 74–83

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150891

ORBITY SHODNÝCH TRANSFORMACÍ

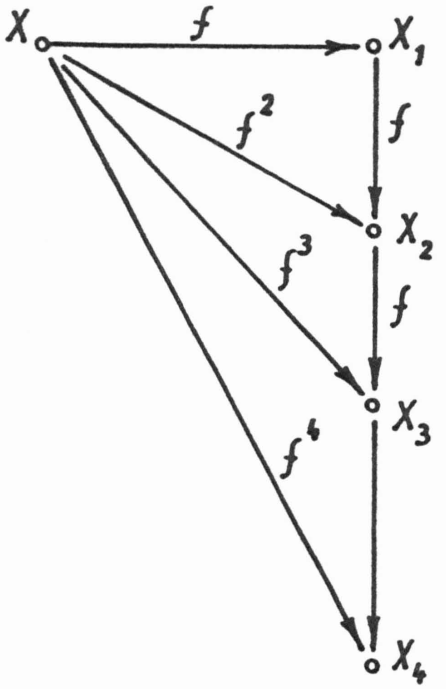
FRANTIŠEK KUŘINA

Tento článek je volným pokračováním příspěvku *Geometrická zobrazení a jejich invarianty* z minulého čísla *Učitele matematiky.*

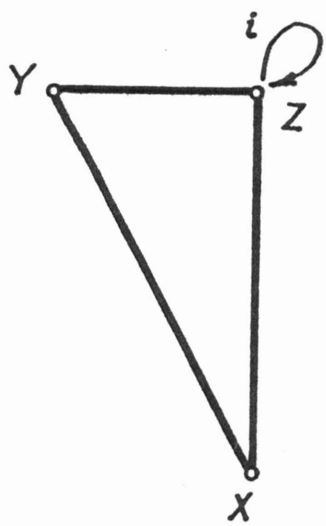
Označme X libovolný bod roviny ρ, f libovolnou shodnou transformaci této roviny. Skutečnost, že X_1 je obraz bodu X v zobrazení f, budeme zapisovat takto: $X_1 = f(X)$. Označme dále:

$$X_2 = f(X_1) = ff(X) = f^2(X),$$
$$X_3 = f(X_2) = fff(X) = f^3(X),$$
$$X_4 = f(X_3) = ffff(X) = f^4(X),$$
$$\dots$$

Názorně si můžeme popsané konstrukce představit podle obr. 1.



Obr. 1



Obr. 2

Vypracováno s částečnou podporou grantu GAČR 406/99/1696.

Posloupnost bodů

$$X \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_3 \longrightarrow X_4 \longrightarrow \cdots$$

nazveme *orbitou* (drahou) bodu X v zobrazení f.

Pomocí orbit bodů můžeme charakterizovat názorně jednotlivé druhy shodností roviny.

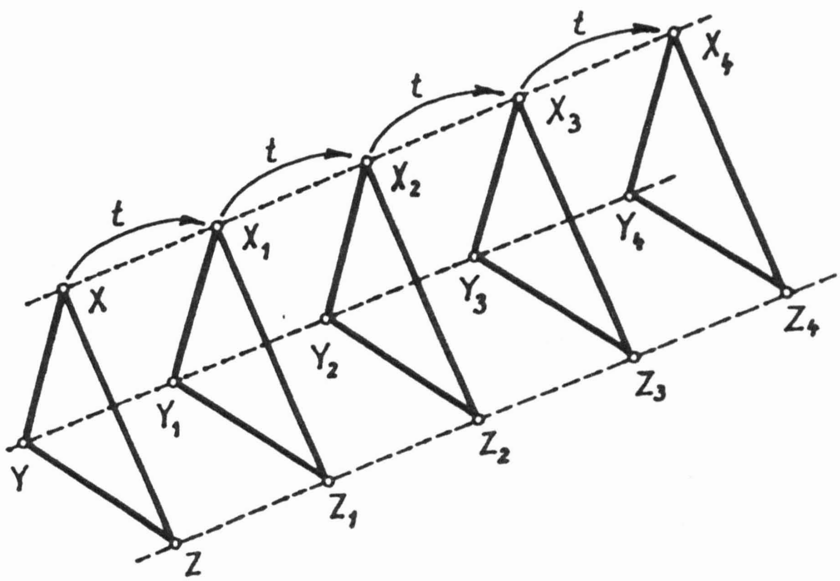
Proveďme to postupně pro identitu (i), posunutí neboli translaci (t), osovou souměrnost (o), otočení neboli rotaci (r) a posunutou souměrnost (z).

Pro názornost budeme kreslit orbity vrcholů trojúhelníku XYZ v jednotlivých shodnostech.

Pro identitu i zřejmě platí

$$X = X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = \cdots \qquad \text{(obr. 2)}$$

Orbita trojúhelníku XYZ v translaci t je nakreslena na obr. 3.

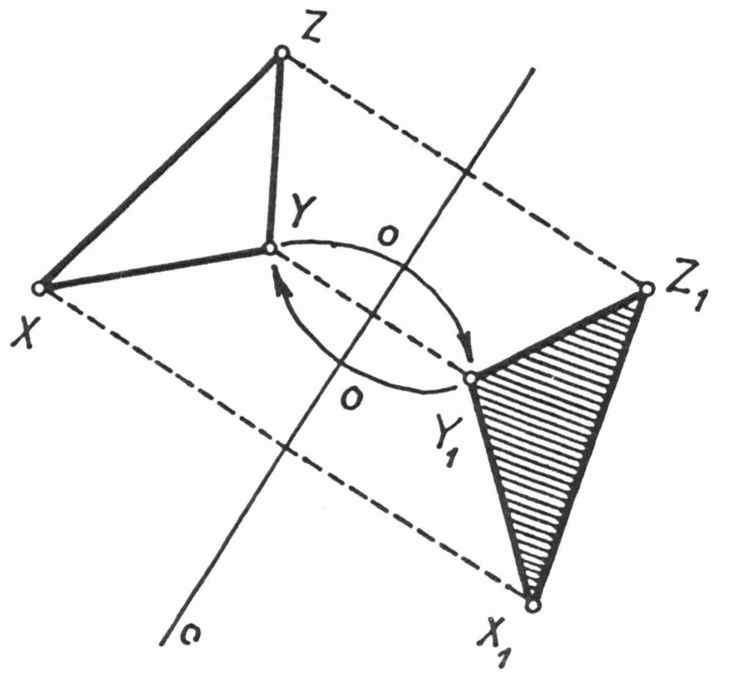


Obr. 3

Přitom platí:

$$|XX_1| = |X_1X_2| = |X_2X_3| = |X_3X_4| = \cdots$$

V osové souměrnosti o podle osy o (nebude-li nebezpečí omylu, budeme značit osovou souměrnost stejně jako její osu) je obrazem obrazu X_1 bodu X opět bod X atp. pro libovolný další bod. Orbita bodu v osové souměrnosti je „dvouprvková". Tento výsledek je charakteristický pro tzv. *involuce*, tj. pro zobrazení různá od identity, jejichž druhá mocnina je identita: $o \neq i, o \cdot o = o^2 = i$ (obr. 4).

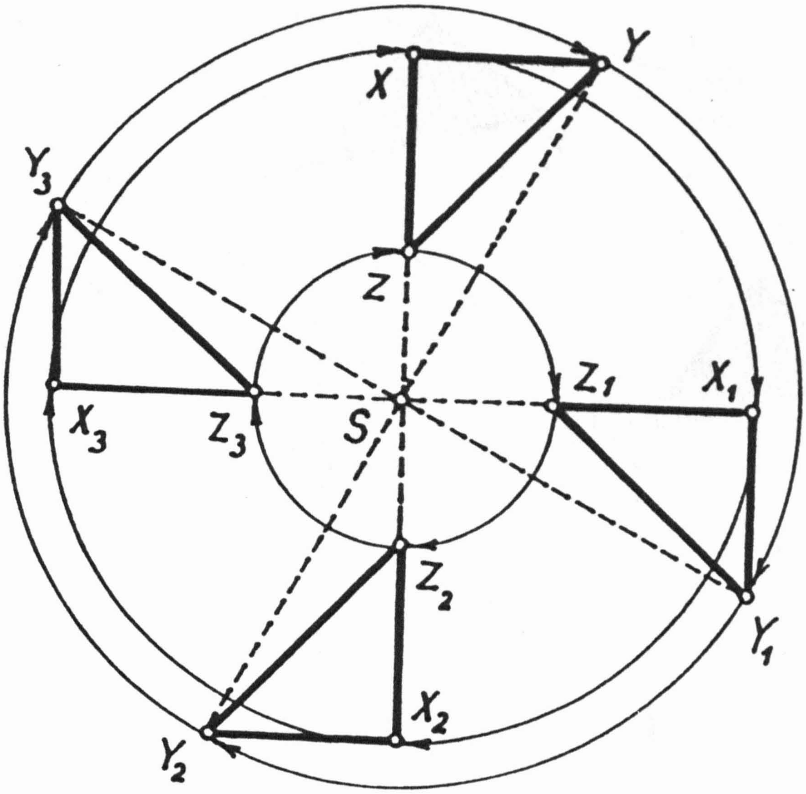


Obr. 4

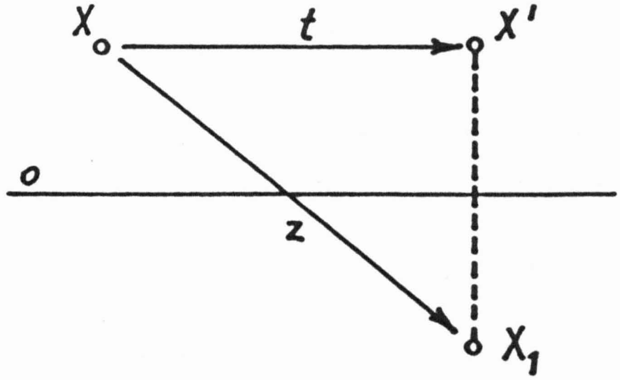
Orbita trojúhelníku v rotaci $r(S; -90^o)$ je nakreslená na obr. 5. Zde mají stejnou velikost orientované úhly $\widehat{XSX_1}$, $\widehat{X_1SX_2}$, $\widehat{X_2SX_3}$, $\widehat{X_3SX_4}$, $\cdots$. Obrázek nám patrně připomene otáčející se kolo. Např. ozubené kolo můžeme geometricky chápat jako útvar, který se reprodukuje v nekonečně mnoha otočeních. V tom spočívá koneckonců jeho funkce např. v hodinových strojích a podobných mechanismech.

Poslední shodné zobrazení, posunutá souměrnost (z), je zobrazení složené z osové souměrnosti a posunutí ve směru rovnoběžném s osou (obr. 6). Orbita trojúhelníku v posunuté souměrnosti je nakreslena na obr. 7.

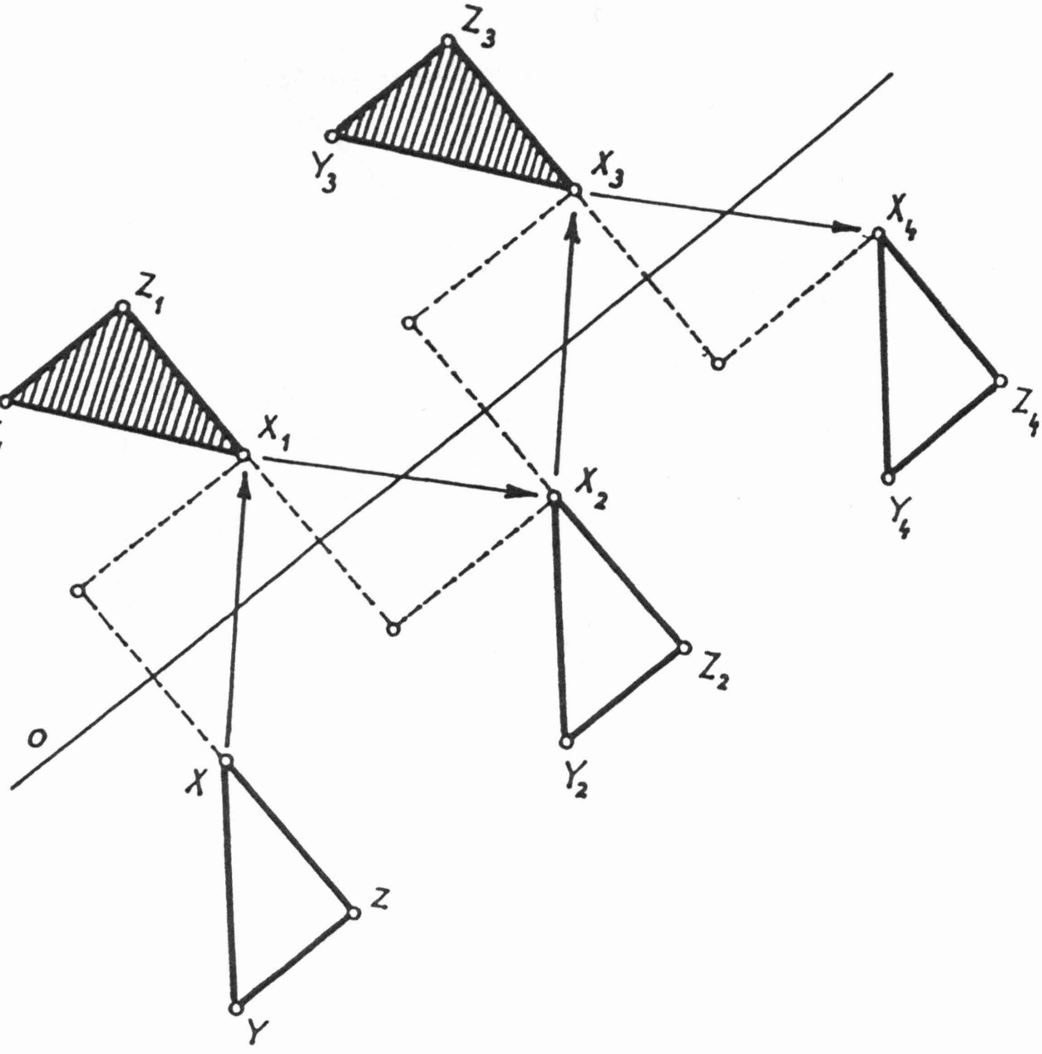
Všechny druhy shodností mají své aplikace v technice (příklad otočení jsme již připomněli) a jejich modifikace se vyskytují v přírodě (obr. 8).



Obr. 5



Obr. 6



Obr. 7

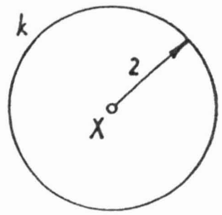
Ukažme, jak pomocí studia orbit můžeme prokázat, že neexistuje více než uvedených pět z přírody a techniky známých shodností roviny.

Nejdříve názorně odvodíme větu o určenosti shodného zobrazení roviny.

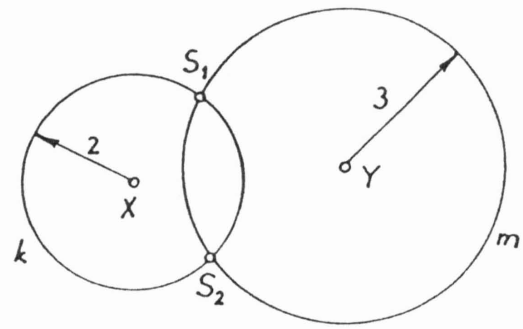
Představme si, že se pohybujeme v neznámé krajině, jejíž podrobnou mapu máme, a potřebujeme určit na mapě místo, kde se nacházíme. Narazíme-li na ukazatele vzdálenosti (např. 2 km od místa X), je zřejmé, že místo, kde se nalézáme, je na mapě někde na kružnici $k(X, 2)$ (obr. 9). (Předpokládejme, že

Obr. 8

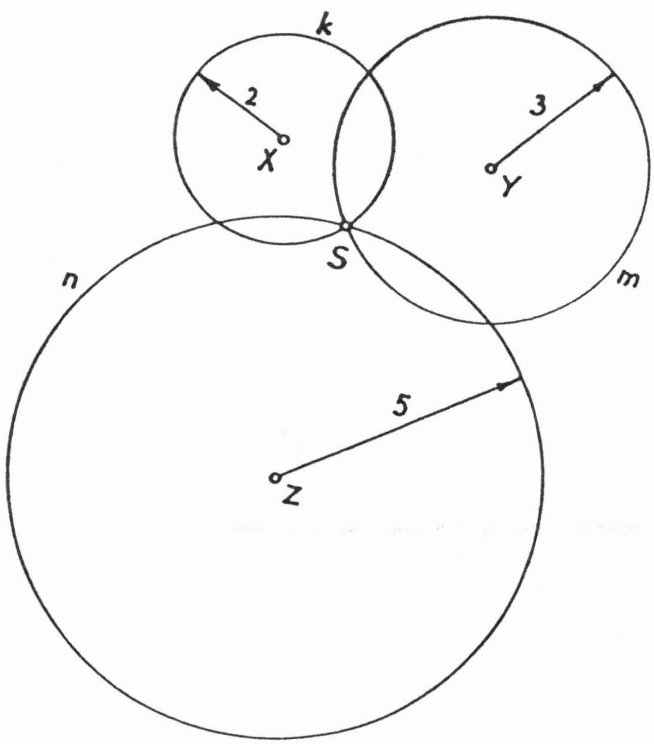
na ukazatelích jsou tzv. vzdušné vzdálenosti.) Kdybychom byli v místě vzdáleném od místa X 2 km a od místa Y např. 3 km, budou již jen dvě možnosti pro určení polohy místa, kde je obraz ukazatele na naší mapě (obr. 10). Jsou to průsečíky S_1, S_2 kružnic $k(X, 2)$, $m(Y, 3)$. Teprve ukazatelé tří vzdáleností (mimo dvou předcházejících je udána poloha bodu Z, např. 5 km od místa, kde se nalézáme) umožňují určit naši polohu jednoznačně, ovšem za předpokladu, že body X, Y, Z neleží v jedné přímce (obr. 11).



Obr. 9



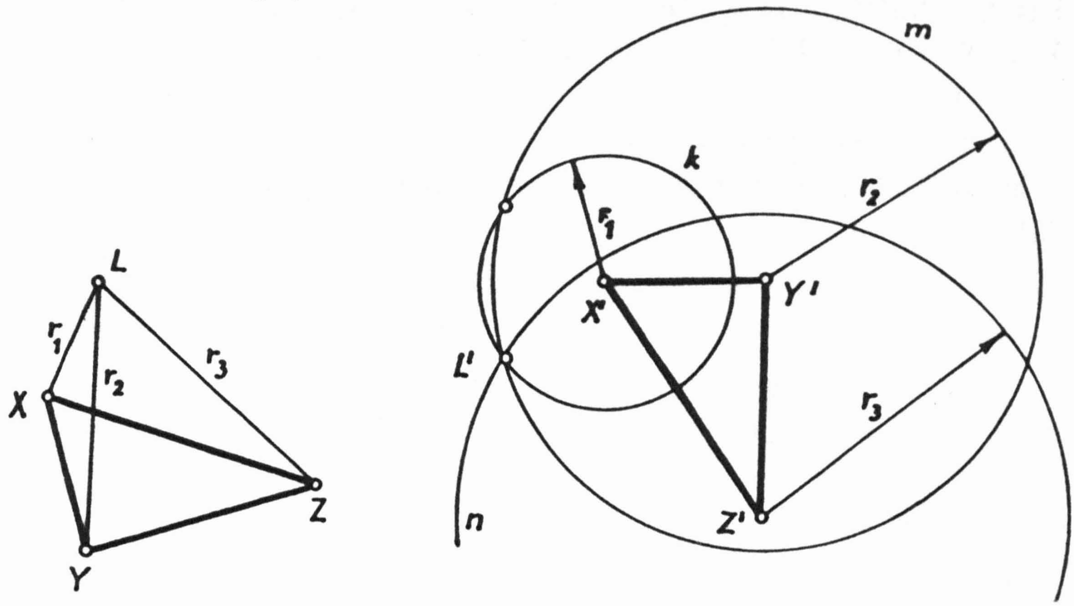
Obr. 10



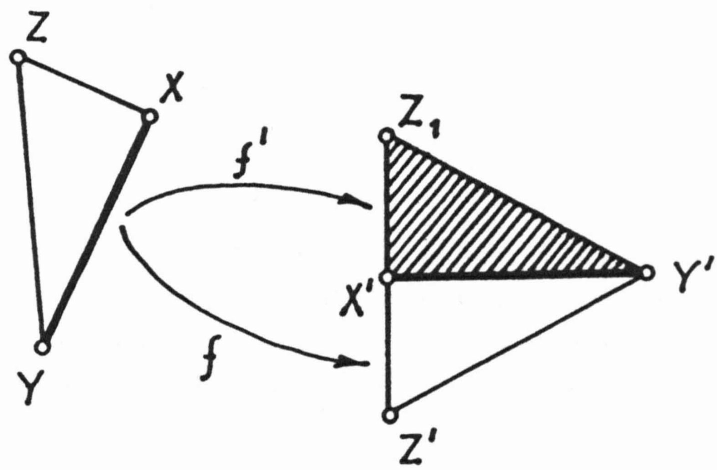
Obr. 11

Geometricky můžeme interpretovat výsledky naší úvahy takto. *Jsou-li dány dva shodné trojúhelníky XYZ, $X'Y'Z'$, pak existuje právě jedno shodné zobrazení f, které převádí trojúhelník XYZ do trojúhelníku $X'Y'Z'$.*

Poloha obrazu L' libovolného bodu L je totiž obrazy $X'Y'Z'$ jednoznačně určena (obr. 12).



Obr. 12



Obr. 13

Víme-li, zda se jedná o shodnost přímou nebo nepřímou, je shodnost určena úsečkou XY a s ní shodnou úsečkou $X'Y'$.

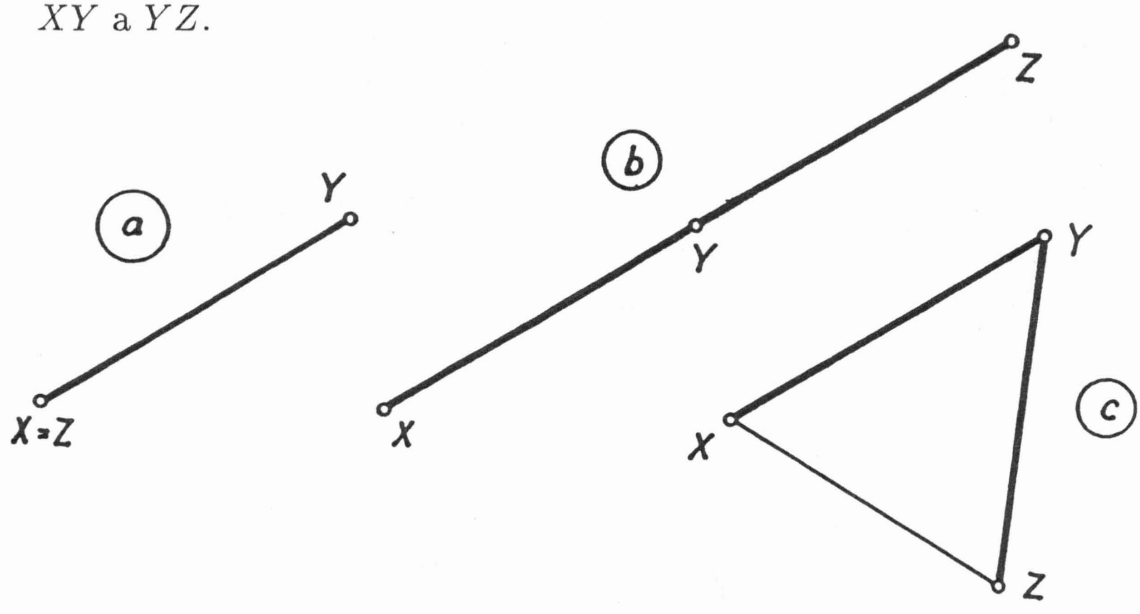
Zvolíme-li totiž libovolný trojúhelník XYZ (obr. 13), můžeme sestrojit v každé z polorovin s hranicí $X'Y'$ právě jeden bod Z' nebo Z_1 tak, že trojúhelník XYZ je shodný jak s trojúhelníkem $X'Y'Z'$, tak s trojúhelníkem $X'Y'Z_1$. V jednom případě jsou trojúhelníky přímo, v druhém nepřímo shodné.

Vraťme se nyní k otázce počtu druhů shodností roviny. Označme $Y = f(X)$, $Z = f(Y) = f^2(X)$. Existence identity je zřejmá. Předpokládejme tedy, že $f \neq i$. Pak existuje takový bod X, že $Y \neq X$. Pro bod Z máme tyto tři možnosti (obr. 14):

a) $X = Z$,

b) Y je střed úsečky XZ,

c) X, Y, Z jsou vrcholy rovnoramenného trojúhelníku s rameny XY a YZ.

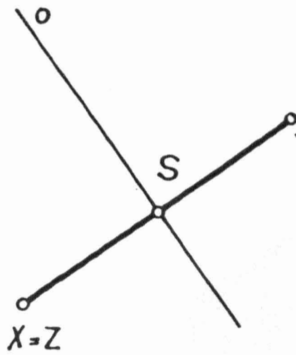


Obr. 14

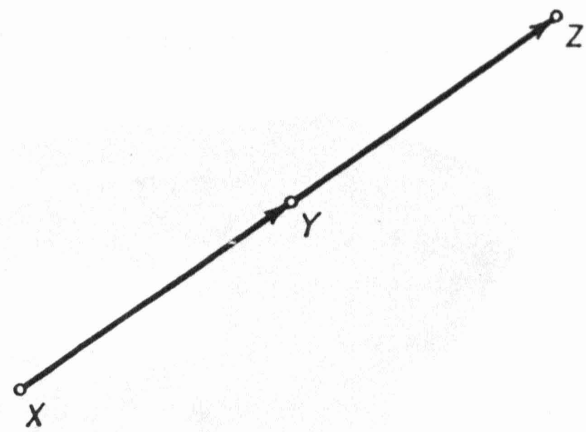
V zobrazení f přejde úsečka XY do úsečky YZ. V každém případě tím bude určena podle předcházející úvahy právě jedna přímá a právě jedna nepřímá shodnost. Ukažme, že je to vždy některá z pěti známých druhů. Žádné další shodnosti tedy nemohou existovat.

V prvním případu jde o středovou souměrnost se středem S úsečky XY a osovou souměrnost podle osy o úsečky XY (obr. 15).

V druhém případu jde o posunutí o vektor $\overrightarrow{XY}$ nebo posunutou souměrnost složenou z tohoto posunutí a osové souměrnosti s osou $o = XY$ (obr. 16).

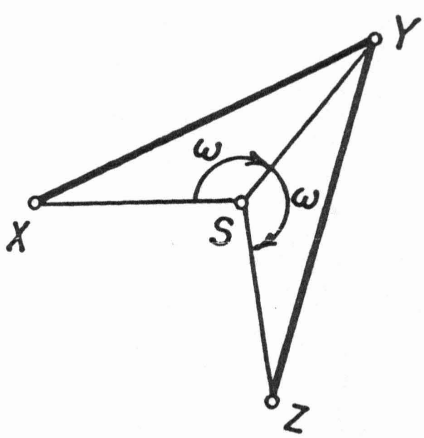


Obr. 15

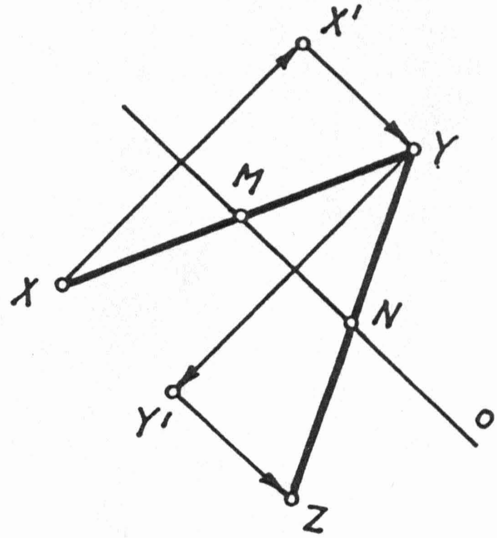


Obr. 16

Ve třetím případu jde o rotaci $r(S;\omega)$, S je střed kružnice opsané trojúhelníku XYZ, $\omega = \widehat{XSY} = \widehat{YSZ}$ (obr. 17). Nepřímá shodnost je posunutá souměrnost konstruovaná podle obr. 18. Je složena z osové souměrnosti podle osy o, která obsahuje střední příčku MN trojúhelníku XYZ, a posunutí o vektor $\overrightarrow{X'Y} = \overrightarrow{Y'Z}$.



Obr. 17



Obr. 18

Studium orbit bodů nám tak poskytlo alternativu k diskusi o druzích shodností roviny, která se obvykle uvádí ve středoškolských učebnicích jiným způsobem.

Prof. RNDr. František Kuřina, CSc.
Katedra matematiky Ped. fakulty Univerzity Hradec Králové
nám. Svobody 331, Hradec Králové
email: frantisek.kurina@uhk.cz