

## Matematická olympiáda

*Učitel matematiky*, Vol. 12 (2004), No. 4, 231–246

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/150842>

### Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2004

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

Ve dnech 28.–31. 3. 2004 se v Přerově uskutečnilo celostátní kolo 53. ročníku matematické olympiády kategorie A. Zveřejňujeme zadání a řešení úloh, seznam vítězů a úspěšných řešitelů. Současně zveřejňujeme úlohy prvního kola příštího ročníku Matematické olympiády, kategorií A, B, C, pro školní rok 2004–2005.

### Úlohy celostátního kola 53. ročníku matematické olympiády

Přerov 28. – 31. března 2004

1. Určete všechny trojice  $(x, y, z)$  reálných čísel, pro něž platí

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 6 + \min \left\{ x^2 - \frac{8}{x^4}, y^2 - \frac{8}{y^4}, z^2 - \frac{8}{z^4} \right\}.$$

(J. Švrček)

**Řešení.** Vyhovuje-li nějaká trojice  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  ( $xyz \neq 0$ ) podmínkám úlohy, je řešením následující soustavy nerovnic

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &\leq 6 + x^2 - \frac{8}{x^4}, & \frac{8}{x^4} + y^2 + z^2 &\leq 6, \\ x^2 + y^2 + z^2 &\leq 6 + y^2 - \frac{8}{y^4}, & \text{tj.} \quad x^2 + \frac{8}{y^4} + z^2 &\leq 6, \\ x^2 + y^2 + z^2 &\leq 6 + z^2 - \frac{8}{z^4}, & x^2 + y^2 + \frac{8}{z^4} &\leq 6. \end{aligned}$$

Sečtením všech tří nerovnic této soustavy dostaneme nerovnici

$$\left( \frac{8}{x^4} + x^2 + x^2 \right) + \left( \frac{8}{y^4} + y^2 + y^2 \right) + \left( \frac{8}{z^4} + z^2 + z^2 \right) \leq 18.$$

Výrazy v každé ze tří závorek na levé straně lze odhadnout užitím nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem trojice

kladných čísel. Obdržíme tak postupně

$$18 \geq \left( \frac{8}{x^4} + x^2 + x^2 \right) + \left( \frac{8}{y^4} + y^2 + y^2 \right) + \left( \frac{8}{z^4} + z^2 + z^2 \right) \geq \\ \geq 3 \sqrt[3]{\frac{8}{x^4} \cdot x^2 \cdot x^2} + 3 \sqrt[3]{\frac{8}{y^4} \cdot y^2 \cdot y^2} + 3 \sqrt[3]{\frac{8}{z^4} \cdot z^2 \cdot z^2} = 18.$$

Odtud plyne, že v každé ze tří použitých nerovností mezi aritmetickým a geometrickým průměrem nastane rovnost, takže příslušná trojice čísel má vždy tři stejné složky. Musí tedy současně platit

$$\frac{8}{x^4} = x^2, \quad \frac{8}{y^4} = y^2, \quad \frac{8}{z^4} = z^2,$$

tj.

$$x^6 = y^6 = z^6 = 8.$$

Z poslední podmínky bezprostředně plyne

$$(x, y, z) = (\varepsilon_1 \sqrt[6]{8}, \varepsilon_2 \sqrt[6]{8}, \varepsilon_3 \sqrt[6]{8}), \quad (1) \\ \text{kde } \varepsilon_i \in \{-1; 1\} \text{ pro } i = 1, 2, 3.$$

Vzhledem k užité důsledkové úpravě je nutno provést zkoušku, pomocí níž zjistíme, že všech 8 trojic reálných čísel určených vztahem (1) vyhovuje podmínkám úlohy.

**Jiné řešení.** Nechť trojice  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  ( $xyz \neq 0$ ) je řešením dané úlohy. Označme

$$A = \min \{x^2, y^2, z^2\} > 0.$$

Potom platí

$$\min \left\{ x^2 - \frac{8}{x^4}, y^2 - \frac{8}{y^4}, z^2 - \frac{8}{z^4} \right\} = A - \frac{8}{A^2}.$$

Proto též

$$A + A + A \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq \\ \leq 6 + \min \left\{ x^2 - \frac{8}{x^4}, y^2 - \frac{8}{y^4}, z^2 - \frac{8}{z^4} \right\} = 6 + A - \frac{8}{A^2}.$$

Po úpravě dostaneme nerovnost, jejíž pravou stranu odhadneme užitím nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem:

$$6 \geq A + A + \frac{8}{A^2} \geq 3 \sqrt[3]{A \cdot A \cdot \frac{8}{A^2}} = 6.$$

To znamená, že ve všech užitých nerovnostech musí nastat rovnost, proto

$$2 = A = x^2 = y^2 = z^2.$$

Zkouškou opět ověříme, že všechny trojice určené vztahem (1) jsou řešením zadané nerovnice.

2. Pro libovolné přirozené číslo  $n$  sestavme z písmen  $A$  a  $B$  všechna možná „slova“ délky  $n$  a označme  $p_n$  počet těch z nich, která neobsahují ani čtveřici  $AAAA$  po sobě jdoucích písmen  $A$ , ani trojici  $BBB$  po sobě jdoucích písmen  $B$ . Určete hodnotu výrazu

$$\frac{p_{2004} - p_{2002} - p_{1999}}{p_{2001} + p_{2000}}.$$

(R. Kučera)

**Řešení.** Počet vyhovujících slov délky  $n$ , která končí písmenem  $A$ , resp.  $B$ , označme  $a_n$ , resp.  $b_n$ . Platí

$$p_n = a_n + b_n. \quad (1)$$

Nechť  $n \geq 4$ . Vyhovující slovo končící písmenem  $A$  má jednu z koncovek  $BA$ ,  $BAA$ , nebo  $BAAA$ . Počet slov prvního typu je  $b_{n-1}$ , druhého typu  $b_{n-2}$ , třetího typu  $b_{n-3}$ . Proto

$$a_n = b_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-3}. \quad (2)$$

Podobně pro  $n \geq 3$  má vyhovující slovo končící písmenem  $B$  jednu z koncovek  $AB$ ,  $ABB$ , tudíž

$$b_n = a_{n-1} + a_{n-2}. \quad (3)$$

Nechť dále  $n \geq 6$ ; každé z čísel  $b_i$  ve vztahu (2) vyjádříme pomocí (3), dostaneme tak

$$\begin{aligned} a_n &= b_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-3} = \\ &= (a_{n-2} + a_{n-3}) + (a_{n-3} + a_{n-4}) + (a_{n-4} + a_{n-5}) = \quad (4) \\ &= a_{n-2} + 2a_{n-3} + 2a_{n-4} + a_{n-5}. \end{aligned}$$

Podobně dostaneme

$$\begin{aligned} b_n &= a_{n-1} + a_{n-2} = \\ &= (b_{n-2} + b_{n-3} + b_{n-4}) + (b_{n-3} + b_{n-4} + b_{n-5}) = \quad (5) \\ &= b_{n-2} + 2b_{n-3} + 2b_{n-4} + b_{n-5}. \end{aligned}$$

Sečtením vztahů (4) a (5) dostaneme dle (1)

$$p_n = p_{n-2} + 2p_{n-3} + 2p_{n-4} + p_{n-5}.$$

Proto pro libovolné přirozené číslo  $n \geq 6$  platí

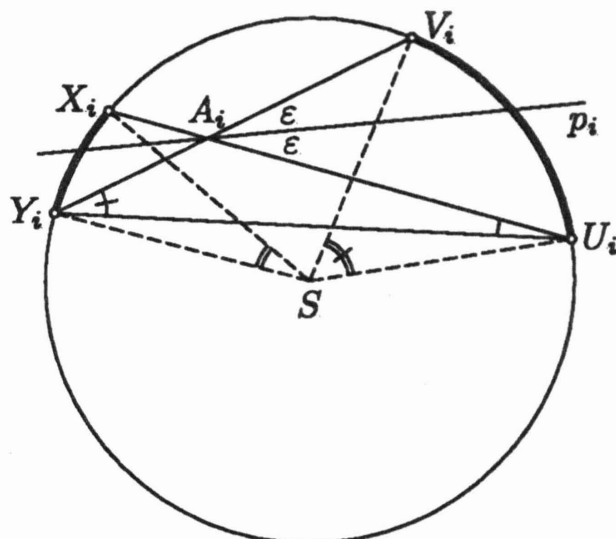
$$\frac{p_n - p_{n-2} - p_{n-5}}{p_{n-3} + p_{n-4}} = 2,$$

tudíž zadaný zlomek má hodnotu 2 i pro  $n = 2004$ .

**3.** V rovině je dána kružnice  $k$  a 121 jejích sečen  $p_1, p_2, \dots, p_{121}$ . Uvnitř této kružnice je na každé přímce  $p_i$  dán bod  $A_i$ . Dokažte, že na kružnici  $k$  existuje bod  $X$  takový, že úsečka  $A_i X$  svírá s přímkou  $p_i$  úhel menší než  $21^\circ$  pro nejméně 29 různých indexů  $i$ .

(J. Šimša)

**Řešení.** Pro libovolné  $i$ ,  $1 \leq i \leq 121$ , označme  $M_i$  množinu všech bodů  $X$  kružnice  $k$ , pro něž úsečka  $A_i X$  svírá s odpovídající přímkou  $p_i$  úhel velikosti menší než  $\varepsilon = 21^\circ$ . Množina  $M_i$  je zřejmě tvořena dvěma oblouky  $X_i Y_i$  a  $U_i V_i$  (obr. 1). Oběma uvažovaným obloukům kružnice  $k$  odpovídá dvojice středových úhlů  $X_i S Y_i$  a  $U_i S V_i$ , kde  $S$  je střed dané kružnice  $k$ . Ukážeme, že pro každé  $i \in \{1, 2, \dots, 121\}$  platí  $|\sphericalangle X_i S Y_i| + |\sphericalangle U_i S V_i| = 4\varepsilon = 84^\circ$ .



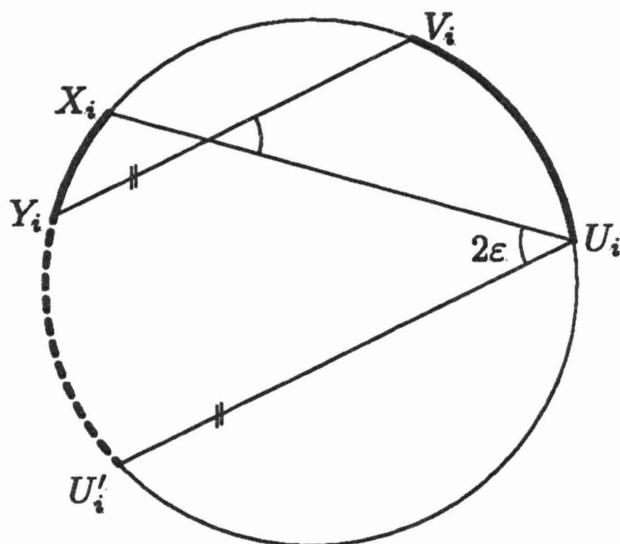
Obr. 1

V trojúhelníku  $A_iY_iU_i$  je součet velikostí vnitřních úhlů při vrcholech  $Y_i$  a  $U_i$  roven velikosti vedlejšího úhlu při vrcholu  $A_i$ , tj.  $2\varepsilon$ . Avšak součet obou uvažovaných vnitřních úhlů v trojúhelníku  $A_iY_iU_i$  je roven součtu obvodových úhlů odpovídajících obloukům  $X_iY_i$  a  $U_iV_i$ . Ze vztahu mezi obvodovým a středovým úhlem dostáváme

$$|\sphericalangle X_iSY_i| + |\sphericalangle U_iSV_i| = 2 \cdot 2\varepsilon = 4\varepsilon = 84^\circ.$$

Celkově tak 121 uvažovaným tětivám  $p_i$  a jejich bodům  $A_i$  odpovídá 121 dvojic oblouků  $X_iY_i$  a  $U_iV_i$  kružnice  $k$  s celkovou obloukovou délkou  $121 \cdot 84^\circ = 10\,164^\circ$ . Pokud každý bod  $X$  kružnice  $k$  náleží nejvýše 28 množinám  $M_i$ , musí být uvedený součet všech obloukových délek nejvýše roven  $28 \cdot 360^\circ = 10\,080^\circ$ , což neplatí. Proto existuje aspoň jeden bod kružnice  $k$ , který náleží současně aspoň 29 množinám  $M_i$ , což jsme měli dokázat.

*Poznámka.* Že oběma obloukům  $X_iY_i$  a  $U_iV_i$  odpovídá dohromady středový úhel  $4\varepsilon$ , nahlédneme snadno i z obr. 2, neboť oblouky  $U'_iY_i$  a  $U_iV_i$  jsou shodné.



Obr. 2

4. Zjistěte, pro která přirozená čísla  $n$  je součet

$$\frac{n}{1!} + \frac{n}{2!} + \cdots + \frac{n}{n!}$$

číslo celé.

(E. Kováč)

**Řešení.** Pro  $n = 1, 2, 3$  je daný součet roven celým číslům 1, 3, resp. 5. Předpokládejme proto dále, že  $n > 3$ . Jednoduchou úpravou dostaneme

$$\begin{aligned} & \frac{n}{1!} + \frac{n}{2!} + \cdots + \frac{n}{(n-2)!} + \frac{n}{(n-1)!} + \frac{n}{n!} = \\ & = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot 2 + n(n-1) \cdot \dots \cdot 3 + \cdots + n(n-1) + n + 1}{(n-1)!}. \end{aligned}$$

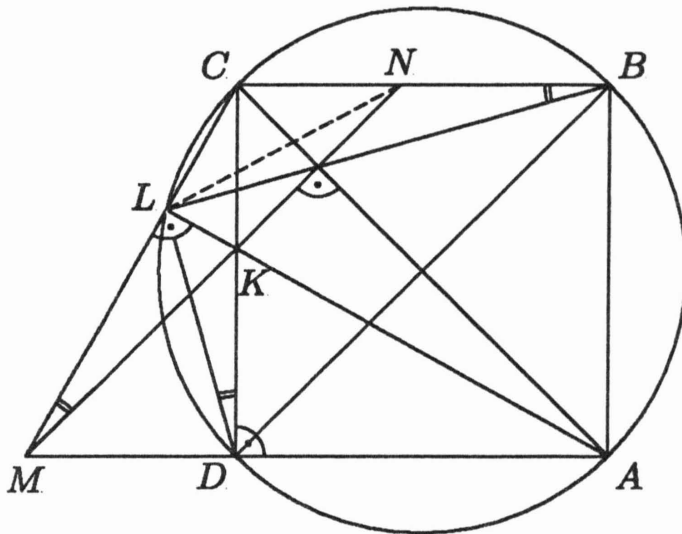
Je-li poslední zlomek celé číslo, je nutně číslo  $n-1$  dělitelem jeho čitatele. Proto je číslo  $n-1$  dělitelem čísla  $n+1$ . Protože největší společný dělitel dvou čísel je dělitelem i jejich rozdílu, je největší společný dělitel čísel  $n-1$  a  $n+1$  dělitelem čísla 2, takže  $n-1 \in \{1, 2\}$ , což je ve sporu s předpokladem  $n > 3$ .

Daný součet je celé číslo pro přirozená čísla  $n$  z množiny  $\{1, 2, 3\}$ .

5. Necht  $L$  je libovolný vnitřní bod kratšího oblouku  $CD$  kružnice opsané čtverci  $ABCD$ . Označme  $K$  průsečík přímek  $AL$  a  $CD$ ,  $M$  průsečík přímek  $AD$  a  $CL$  a  $N$  průsečík přímek  $MK$  a  $BC$ . Dokažte, že body  $B, L, M, N$  leží na téže kružnici.

(J. Švrček)

**Řešení.** Úhlopříčka  $AC$  je průměrem kružnice opsané čtverci  $ABCD$ , takže podle Thaletovy věty je úhel  $ALC$  pravý (obr. 3). Bod  $K$  je tak průsečíkem výšek  $CD$  a  $AL$  v trojúhelníku  $ACM$ , takže i přímka  $MK$  je kolmá na  $AC$  a protíná stranu  $BC$  daného čtverce v jejím vnitřním bodě  $N$ , neboť  $MK \parallel DB$ .



Obr. 3

Nyní lze tvrzení úlohy dokázat několika způsoby.

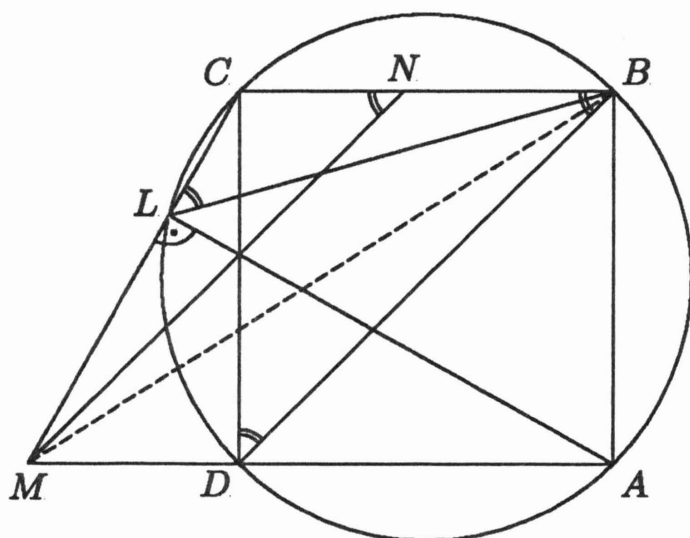
1. Čtýřúhelníky  $BCLD$  a  $KLMD$  jsou tětívové, proto podle věty o obvodových úhlech postupně platí

$$|\sphericalangle NBL| = |\sphericalangle CBL| = |\sphericalangle CDL| = |\sphericalangle KDL| = |\sphericalangle KML| = |\sphericalangle NML|.$$

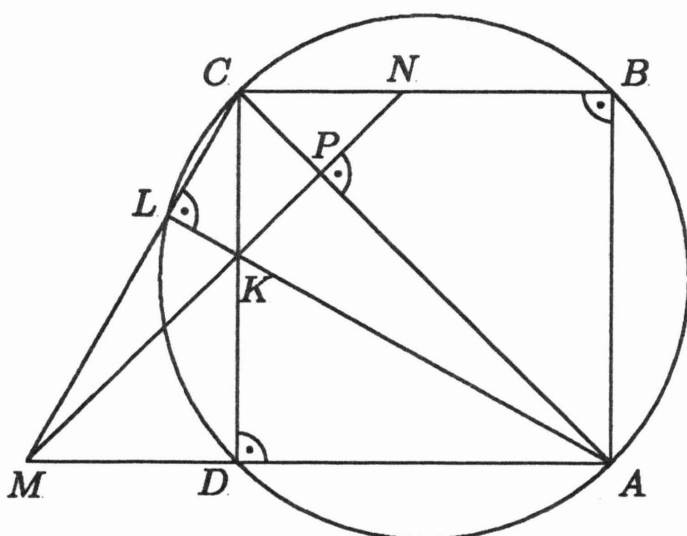
Protože body  $B$  a  $M$  leží v téže polorovině vyřaté přímkou  $NL$ , leží body  $B, L, M, N$  na téže kružnici.



2. Protože  $MN \parallel DB$ , je  $|\sphericalangle MNC| = 45^\circ$ , rovněž úhel  $BLC$  nad tětivou  $BC$  kružnice  $k$  má velikost  $45^\circ$  (obr. 4), je tedy  $|\sphericalangle BLM| = |\sphericalangle BNM| = 135^\circ$ . Body  $L$  a  $N$  zřejmě leží v téže polorovině vyřaté přímkou  $MB$ , proto leží body  $B, L, M, N$  na téže kružnici.



Obr. 4



Obr. 5

3. Označme  $P$  patu výšky z vrcholu  $M$  na stranu  $AC$  a uvažujme čtyřúhelníky  $ABNP$ ,  $APKD$  a  $DKLM$  (obr. 5). Podle Thale-

tovy věty jsou všechny tři čtyřúhelníky tětivové. Vrchol  $C$  daného čtverce  $ABCD$  leží vně každé ze tří kružnic opsaných uvažovaným tětivovým čtyřúhelníkem, takže užitím věty o mocnosti bodu  $C$  ke kružnicím opsaným po řadě čtyřúhelníkům  $ABNP$ ,  $APKD$ ,  $DKLM$  obdržíme následující tři rovnosti

$$\begin{aligned} |CN| \cdot |CB| &= |CP| \cdot |CA|, \\ |CP| \cdot |CA| &= |CK| \cdot |CD|, \\ |CK| \cdot |CD| &= |CL| \cdot |CM|, \end{aligned}$$

z nichž bezprostředně vyplývá rovnost

$$|CN| \cdot |CB| = |CL| \cdot |CM|.$$

Odtud již plyne, že body  $B$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$  leží na téže kružnici.

**6.** Nechť  $\mathbb{R}_+$  značí množinu všech kladných reálných čísel. Určete všechny funkce  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , které pro libovolná kladná čísla  $x$ ,  $y$  splňují rovnost

$$x^2(f(x) + f(y)) = (x + y)f(f(x)y).$$

(P. Kaňovský)

**Řešení.** Nechť  $f$  je libovolná z hledaných funkcí. Označme  $f(1) = p$ , vzhledem k podmínkám úlohy platí  $p > 0$ .

V daném vztahu položíme  $x = 1$ ,  $y = 1$ . Po úpravě dostaneme

$$p = f(p). \tag{1}$$

V daném vztahu dále položíme  $x = p$ ,  $y = 1$ . Potom

$$p^2(f(p) + p) = (p + 1)f(f(p))$$

a podle (1) vyjde

$$2p^3 = (p + 1)p.$$

Tato algebraická rovnice má tři reálné kořeny  $-\frac{1}{2}$ ,  $0$ ,  $1$ . Jediný kořen vyhovující podmínce  $p > 0$  je  $p = 1$ , tedy

$$f(1) = 1. \tag{2}$$

Nechť  $t$  je libovolné kladné reálné číslo. V daném vztahu položíme  $x = 1$ ,  $y = t$ , takže vzhledem k (2) dostaneme

$$1 + f(t) = (1 + t)f(t).$$

Odtud po úpravě

$$f(t) = \frac{1}{t}. \quad (3)$$

Dosazením snadno ověříme, že funkce  $f(t) = 1/t$  vyhovuje rovnici ze zadání.

Funkce určená vztahem (3) je jediné řešení dané úlohy.

**Výsledková listina celostátního kola 52. ročníku MO  
kategorie A**

*Vítězové:*

1.–2.	Alexandr Kazda	8/8	G Praha, Nad Alejí	<b>42</b>
	Pavel Kocourek	3/4	SPŠST Praha, Panská	<b>42</b>
3.–5.	František Konopecký	7/8	GLJ Holešov, Palackého	<b>41</b>
	Jaromír Kuben	2/4	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	<b>41</b>
	Jan Moláček	4/4	GJKT, Hradec Králové	<b>41</b>
6.	Vítězslav Kala	4/4	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	<b>39</b>
7.–9.	Sven Dražan	4/4	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	<b>38</b>
	Tomáš Gavenčiak	4/4	GMK Bílovec	<b>38</b>
	Marek Pechal	6/8	G Zlín, Lesní čtvrť	<b>38</b>

*Další úspěšní řešitelé:*

10.–11.	Jana Fabriková	4/4	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	<b>30</b>
	Jan Křetínský	8/8	GML Brno, Žižkova	<b>30</b>
12.–13.	Jakub Opršal	2/4	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	<b>28</b>
	Michal Rychnovský	3/4	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	<b>28</b>
14.–15.	Stanislav Basovník	7/8	G Kroměříž, Masarykovo nám.	<b>23</b>
	Jan Uhlík	2/4	GMK Bílovec	<b>23</b>
16.–17.	Tomáš Hebelka	8/8	G Brno, Vídeňská	<b>22</b>
	Alexandr Pícha	2/4	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	<b>22</b>
18.	Ondřej Křivánek	7/8	G Třebíč, Masarykovo nám.	<b>19</b>
19.–21.	Tereza Klimošová	8/8	G Lanškroun	<b>18</b>
	Ivo Machek	4/4	GJKT, Hradec Králové	<b>18</b>
	Radek Moravec	5/6	GBN, Hradec Králové	<b>18</b>

## ZADÁNÍ PRO ŠKOLNÍ ROK 2004–2005

## Kategorie A

**A-I-1.** Neprázdnou množinu přirozených přirozených čísel nazveme *malou*, když má méně prvků, než je její nejmenší prvek. Určete počet všech malých množin  $M$ , které jsou podmnožiny množiny  $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$  a mají tuto vlastnost: patří-li do  $M$  dvě různá čísla  $x$  a  $y$ , patří do  $M$  rovněž číslo  $|x - y|$ .

(J. Földes)

**A-I-2.** Nechť  $M$  je libovolný vnitřní bod kratšího oblouku  $CD$  kružnice opsané čtverci  $ABCD$ . Označme  $P, R$  průsečíky přímky  $AM$  po řadě s úsečkami  $BD, CD$  a podobně  $Q, S$  průsečíky přímky  $BM$  s úsečkami  $AC, DC$ . Dokažte, že přímky  $PS$  a  $QR$  jsou navzájem kolmé.

(J. Švrček)

**A-I-3.** Nechť  $k$  je libovolné přirozené číslo. Uvažujme dvojice  $(a, b)$  celých čísel, pro něž mají kvadratické rovnice

$$x^2 - 2ax + b = 0, \quad y^2 + 2ay + b = 0$$

reálné kořeny (ne nutně různé), které lze označit  $x_{1,2}$  resp.  $y_{1,2}$  v takovém pořadí, že platí rovnost  $x_1y_1 - x_2y_2 = 4k$ .

- Pro dané  $k$  určete největší možnou hodnotu  $b$  ze všech takových dvojic  $(a, b)$ .
- Pro  $k = 2004$  určete počet všech takových dvojic  $(a, b)$ .
- Pro dané  $k$  vypočtete součet čísel  $b$  ze všech takových dvojic  $(a, b)$ , přičemž každé číslo  $b$  se přičítá tolikrát, v kolika dvojicích  $(a, b)$  vystupuje.

(E. Kováč)

**A-I-4.** Dané aritmetické posloupnosti  $(x_i)_{i=1}^{\infty}$  a  $(y_i)_{i=1}^{\infty}$  mají stejný první člen a následující vlastnost: existuje index  $k$  ( $k > 1$ ), pro který platí rovnosti

$$x_k^2 - y_k^2 = 53, \quad x_{k-1}^2 - y_{k-1}^2 = 78, \quad x_{k+1}^2 - y_{k+1}^2 = 27.$$

Najděte všechny takové indexy  $k$ .

(V. Bálint)

**A-I-5.** V lichoběžníku  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) platí  $|AB| = 2|CD|$ . Označme  $E$  střed ramene  $BC$ . Dokažte, že rovnost  $|AB| = |BC|$  platí, právě když čtyřúhelník  $AECD$  je tečnový.

(R. Horenský)

**A-I-6.** Najděte všechny funkce  $f \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow \langle 0, +\infty \rangle$ , které vyhovují současně následujícím třem podmínkám:

- a) Pro libovolná nezáporná reálná čísla  $x, y$  taková, že  $x+y > 0$ , platí rovnost

$$f(x f(y)) f(y) = f\left(\frac{xy}{x+y}\right);$$

b)  $f(1) = 0$ ;

c)  $f(x) > 0$  pro libovolné  $x > 1$ .

(P. Calábek)

## Kategorie B

**B-I-1.** Určete všechny dvojice  $(a, b)$  reálných čísel, pro které má každá z rovnic

$$x^2 + ax + b = 0, \quad x^2 + (2a + 1)x + 2b + 1 = 0$$

dva různé reálné kořeny, přičemž kořeny druhé rovnice jsou převrácené hodnoty kořenů první rovnice.

(*E. Kováč*)

**B-I-2.** Je dán rovnoběžník  $ABCD$ . Přímka vedená bodem  $D$  protíná úsečku  $AC$  v bodě  $G$ , úsečku  $BC$  v bodě  $F$  a polopřímku  $AB$  v bodě  $E$  tak, že trojúhelník-y  $BEF$  a  $CGF$  mají stejný obsah. Určete poměr  $|AG| : |GC|$ .

(*T. Jurík*)

**B-I-3.** Na stole leží  $k$  hromádek o  $1, 2, 3, \dots, k$  kamenech, kde  $k \geq 3$ . V každém kroku vybereme tři libovolné hromádky na stole, sloučíme je do jedné a přidáme k ní jeden kámen, který na stole dosud neležel. Jestliže po několika krocích vznikne jediná hromádka, není výsledný počet kamenů dělitelný třemi. Dokažte.

(*J. Zhouf*)

**B-I-4.** Označme  $V$  průsečík výšek a  $S$  střed kružnice opsané trojúhelník-u  $ABC$ , který není rovnostranný. Pokud má úhel při vrcholu  $C$  velikost  $60^\circ$ , je osa úhlu  $ACB$  osou úsečky  $VS$ . Dokažte.

(*J. Zhouf*)

**B-I-5.** V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$\frac{x}{x+4} = \frac{5 \int x-7}{7 \int x-5}$$

kde  $\int x$  označuje největší celé číslo, jež nepřevyšuje číslo  $x$  (tzv. *dolní celou část* reálného čísla  $x$ ).

*J. Šimša*

**B-I-6.** Do kružnice  $k$  o poloměru  $r$  jsou vepsány dvě kružnice  $k_1$ ,  $k_2$  o poloměru  $\frac{1}{2}r$ , jež se vzájemně dotýkají. Kružnice  $l$  se vně dotýká kružnic  $k_1$ ,  $k_2$  a s kružnicí  $k$  má vnitřní dotyk. Kružnice  $m$  má vnější dotyk s kružnicemi  $k_2$  a  $l$  a vnitřní dotyk s kružnicí  $k$ . Vypočtěte poloměry kružnic  $l$  a  $m$ .

*(L. Boček)*

### Kategorie C

**C-I-1.** Nechť  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  jsou taková reálná čísla, že  $a + d = b + c$ . Dokažte nerovnost

$$(a - b)(c - d) + (a - c)(b - d) + (d - a)(b - c) \geq 0.$$

*(E. Kováč)*

**C-I-2.** Zjistěte, pro která přirozená čísla  $n$  ( $n \geq 2$ ) je možno z množiny  $\{1, 2, \dots, n - 1\}$  vybrat navzájem různá sudá čísla tak, aby jejich součet byl dělitelný číslem  $n$ .

*(J. Zhouf)*

**C-I-3.** V libovolném konvexním čtyřúhelníku  $ABCD$  označme  $E$  střed strany  $BC$  a  $F$  střed strany  $AD$ . Dokažte, že trojúhelníky  $AED$  a  $BFC$  mají stejný obsah, právě když jsou strany  $AB$  a  $CD$  rovnoběžné.

*(J. Šimša)*

**C-I-4.** Tři čtyřmístná čísla  $k$ ,  $l$ ,  $m$  jsou stejného tvaru  $ABAB$  (tj. číslice na místě jednotek je stejná jako číslice na místě stovek



a číslice na místě desítek je stejná jako číslice na místě tisíců). Číslo  $l$  má číslici na místě jednotek o 2 větší a číslici na místě desítek o 1 menší než číslo  $k$ . Číslo  $m$  je součtem čísel  $k$  a  $l$  a je dělitelné devíti. Určete všechna taková čísla  $k$ .

(*T. Joska*)

**C-I-5.** Určete počet všech trojic dvojmístných přirozených čísel  $a, b, c$ , jejichž součin  $abc$  má zápis, ve kterém jsou všechny číslice stejné. Trojice lišící se pouze pořadím čísel považujeme za stejné, tj. započítáváme je pouze jednou.

(*J. Šimša*)

**C-I-6.** V trojúhelník-u  $ABC$  se stranou  $BC$  délky 2 cm je bod  $K$  středem strany  $AB$ . Body  $L$  a  $M$  rozdělují stranu  $AC$  na tři shodné úsečky. Trojúhelník  $KLM$  je rovnoramenný a pravoúhlý. Určete délky stran  $AB, AC$  všech takových trojúhelník-ů  $ABC$ .

(*P. Leischner*)