MATEMATICKÉ PŘÍBĚHY (6)

Příběh šestý

JAK VYDLÁŽDIT NÁMĚSTÍ?

M. Hejný, M. Tichá

Matěj zazvonil. Otevřela mu Filipova desetiletá sestra Zuzka.

„Ahoj Matěji! Bráška ale není doma, šel nakoupit, přijde za chvíli. Heleď, a co kdybychom si zatím zahráli na pana starostu?"

„Na starostu? To neznám. A jak to budeme hrát?"

„Hned ti to vysvětlím. Tady ten bílý šachový král bude pan starosta. Bude chodit po městě a dívat se, jestli je všechno v pořádku. Šachovnice je město obehnané vysokými zdmi. Pan starosta a celá městská rada musí vymýšlet, jak město zkrášlit." Potom Zuzka ještě v rohu vyznačila náměstí.

„A jak chce pan starosta krášlit město?" vyzvídal Matěj.

„Navrhuje vydláždit náměstí a později i hlavní ulici," odpověděla Zuzka.

Matěj v duchu vymýšlel, jak vydláždit náměstí. Jeho pohled sklouzl na kostky domina. Zkusil jednu položit na šachovnici. Padla jako ulitá: přesně přikryla dvě sousední políčka. Matěj přerušil Zuzčino vykřikování a vážným hlasem řekl:

„Já, pan starosta, volám k sobě městského bubeníka!"

Zuzka chytla černého střelce a postavila ho před pana starostu.

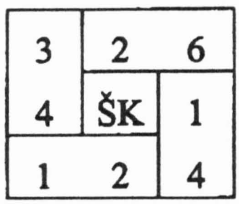
„Já městský bubeník, jsem už tady."

Pan starosta vysvětlil městskému bubeníkovi, že on a městská rada se rozhodli dát vydláždit náměstí. Toto rozhodnutí má být bezodkladně vybubnované. Je třeba poslat dva vozy, aby přivezly čtyři mramorové desky na vydláždění náměstí.

---

[1]Příspěvek byl připraven za podpory grantu GAČR 406/02/0829. Upraveno podle stejnojmenného příběhu knížky M. Hejný, Ľ. Niepel: *Šestnásť matematických príbehov*, SPN Bratislava, 1983

Stalo se. Zuzka vzala dva koně, každému z nich naložila dvě kostky domina, aby je přivezli do města. Potom se práce ujali řemeslníci a náměstí vydláždili. Uprostřed však zůstalo jedno políčko nevydlážděné. Pan starosta se rozhodl, že tam dá postavit sochu.



Obr. 1
Čtyři kostky domina: $(3,4)$, $(1,2)$, $(4,1)$, $(2,6)$ a uprostřed šachový kůň (zde i dále jej značíme ŠK)

Zuzce se dláždění zalíbilo. Jako první dáma si zavolala bubeníka a dala vyhlásit, že náměstí se bude rozšiřovat – ze 3×3 šachových políček na 4×4. Jenže – stala se nemilá věc. Ať ukládala kostky jak chtěla, nezůstalo jí žádné volné políčko pro sochu.

„Pane starosto, nechte položit mramorové desky tak, aby jedno políčko zůstalo prázdné," žádala první dáma starostu.

„To nejde, milá paní," vysvětloval pan starosta. „Na malém náměstí bylo 9 políček. Z nich jsme 8 pokryli a 1 zůstalo prázdné. Ale na velkém náměstí je 16 políček, a to je sudé číslo. Buď tedy vydláždíme celé náměstí, nebo zůstanou volná 2 políčka. Není možné nechat volné jedno políčko a ostatní pokrýt. Vidím však jinou možnost."

Zkusme náměstí ještě zvětšit – na 5×5. Bude na něm 25 políček a to je liché číslo.

První dvorní dáma s návrhem souhlasila a řemeslníci začali dláždit náměstí o rozměrech 5×5. Hotovo! Na nevydlážděné políčko v rohu náměstí Matěj postavil sochu – koně.

„Já, první dvorní dáma, nedovolím, aby socha stála v koutě. Musí stát uprostřed. A nebo ne, tam bude místo pro bubeníka, když bude dávat světu něco na vědomost. Sochu postavíme sem, hned vedle středu," pevně se rozhodla první dáma.

Řemeslníci začali dláždit náměstí, ale nedařilo se jim to. I když po postavení sochy zůstal na náměstí sudý počet políček, přání první dvorní dámy nebylo možné splnit. Proč, to tentokrát nevěděl ani Matěj.

Do místnosti vtrhnul Filip; „Ahoj Matěji!"

„Vítáme stavitele Filipa z Filipova," promluvil pan starosta.

„Ať vydláždí náměstí," dodala první dvorní dáma.

„Ve vzduchu cítím střelený nápad," znechuceně se zatvářil Filip.

Když mu však Matěj vysvětlil, o co jde, uznal, že je to celkem zajímavý problém. Chlapci si nakreslili náměstí 5×5 a každý sám se pokoušel najít řešení, nebo vymyslet, proč není možné náměstí vydláždit. Zuzka pokračovala ve hře na velké šachovnici.

„Tak co, už jsi něco vymyslel?" zeptal se Filip Matěje.

„Něco mě napadá," odpověděl Matěj a začal náměstí 5×5 vybarvovat jako šachovnici.

„Proč vyznačuješ černá a bílá pole?" vyzvídal Filip. „Vždyť ti to nijak nepomůže zjistit, zda je či není možné náměstí vydláždit."

„Pomůže, nepomůže ... Všiml jsem si, která políčka zůstávají při našem dláždění prázdná. Jsou to jen a jen černá. Ani jednou nezůstalo prázdné ani jedno bílé políčko."

„Ale proč je tomu tak? Vždyť ..."

„Černé! Ano, už to mám! Hurá, mám!"

Filip netrpělivě očekával zveřejnění objevu. Matěj začal:

„Podívejte. Na šachovnici 5×5 bylo 25 políček. Kolik z nich je černých a kolik bílých? Počítejme: $3 + 2 + 3 + 2 + 3 = 13$ černých a zbytek, to je 12 bílých. Každá kostka domina pokryje jedno bílé jedno černé políčko. 11 kostek tedy pokryje 11 bílých a 11 černých polí. Proto zůstala dvě černá políčka, která nebylo možné pokrýt."

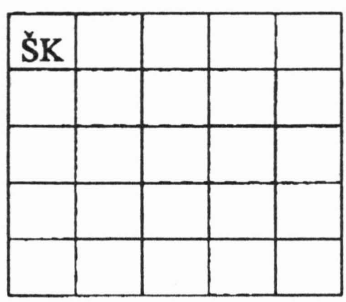
„Máš pravdu," uznal Filip. „Je to tak výborný nápad, že mě až zaráží, že je ze tvé hlavy."

„Přiznám se, že není. Jednou nám vedoucí v matickém kroužku takové triky předváděl. Má to i své jméno – tuším invarty? Nebo ne?"

Odpusť Matěji, že ti bereme slovo. To, o čem mluvíš, se jmenuje *invariant*, a o něm řekneme několik slov my, autoři. Slovo invariant je latinského původu, *varius* znamená proměnlivý, pestrý, nestálý, vrtkavý; předpona *in-* je zápor, tedy *ne-*. Invariant je tedy to, co je stálé, neproměnné. Například při pokrývání šachovnice 5×5 kostkami domina bylo mnoho možností, ale všechny měly něco společného, stálého, neměnného, invariantního: počet černých políček, počet bílých políček a skutečnost, že každá kostka pokryje právě jedno bílé a právě jedno černé políčko.

Matematickou disciplínu teorii invariantů objevili ve druhé polovině předminulého, tedy 19. století angličtí matematikové A. Cayley a J. J. Sylvester. Jejich myšlenky pronikly za krátký čas téměř do všech oblastí matematiky. Dnes je slovo invariant jedním ze základních matematických pojmů.

Úloha 1: Uměli byste čtvercové náměstí 5×5 se sochou v rohu vydláždit obdélníkovými dlaždicemi 1×2? (Obr. 2)



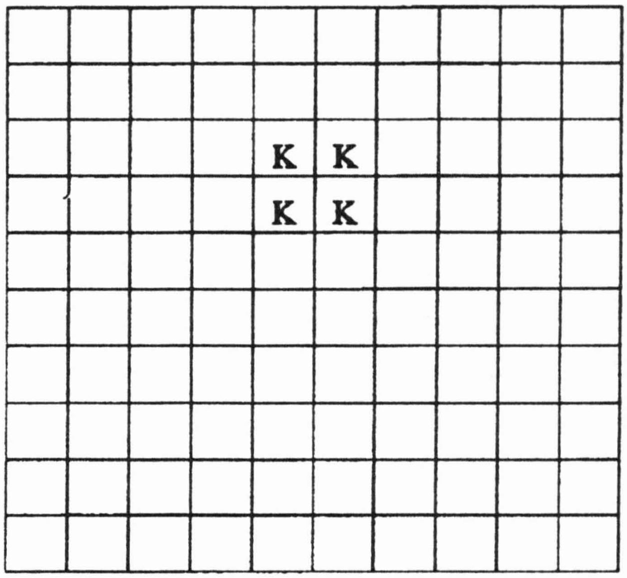
Obr. 2

Úloha 2: Kam je možné přemístit sochu na náměstí z první úlohy, aby se zbytek náměstí dal vydláždit obdélníky 1×2?

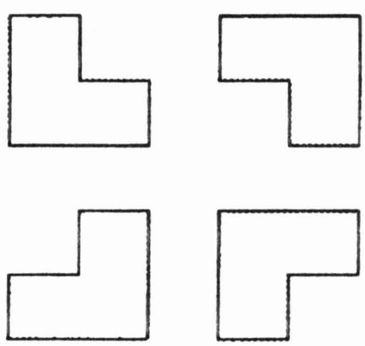
Úloha 3: Proč není možné náměstí s květinovým záhonem, které máte na obrázku, vydláždit dlaždicemi 4×2? (Obr. 3)

Úloha 4: Víte proč není možné náměstí 10×10 pokrýt dlaždicemi 4×1?

Úloha 5: Na které políčko na náměstí 8×8 je třeba postavit sochu, aby bylo možné vydláždit zbytek náměstí dlaždicemi 3×1?



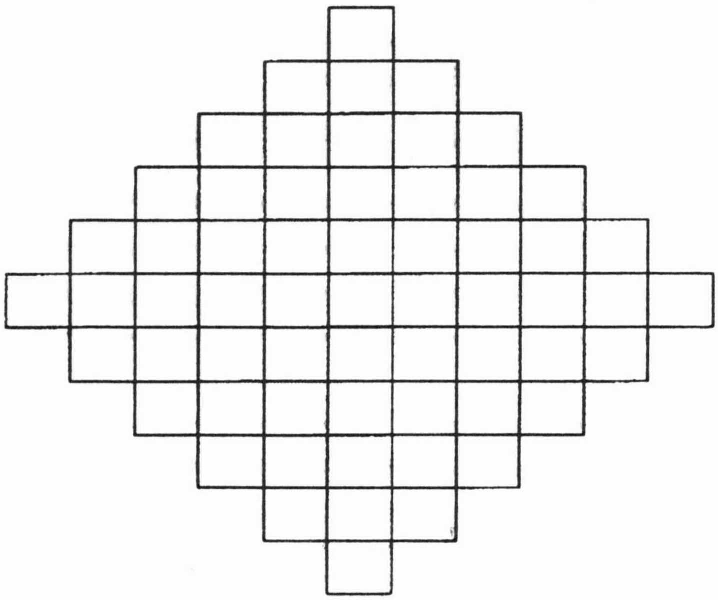
Obr. 3
Znakem K je značena nějaká kytička



Obr. 4

Úloha 6: Na které políčko na náměstí z předcházející úlohy je třeba postavit sochu, aby bylo možné zbytek náměstí vydláždit dlaždicemi, které vidíte na obrázku 4?

Úloha 7: Na které políčko je třeba na náměstí z obr. 5 umístit sochu, aby bylo možné zbytek náměstí vydláždit dlaždicemi 3×1?



Obr. 5

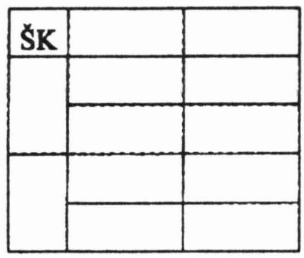
***Úloha 8**: Je možné náměstí 4×4 vydláždit dlaždicemi 2×1 tak, aby ani jedna rovná čára (spára mezi dlaždicemi), která vznikne uvnitř náměstí, nebyla delší než tři políčka?

****Úloha 9**: Uměli byste pokrýt obdélníkové náměstí 5×6 dlaždicemi 2×1 tak, aby ani jedna rovná čára uvnitř náměstí nebyla delší než čtyři políčka?

****Úloha 10**: Je možné vydláždit náměstí 6×6 dlaždicemi 2×1 tak, aby ani jedna čára uvnitř náměstí nebyla delší než 5 políček?

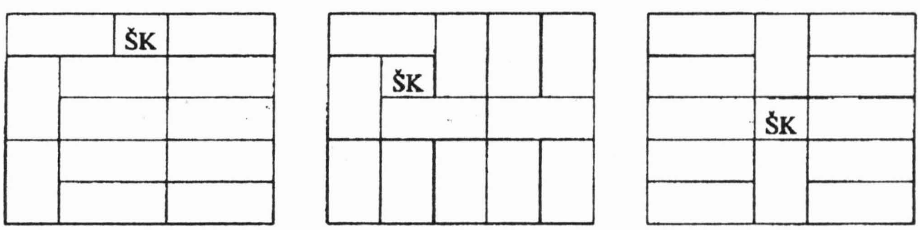
VÝSLEDKY

Úloha 1: Jeden způsob dláždění vidíte na obrázku 6.



Obr. 6

Úloha 2: Jestliže náměstí vybarvíme jako šachovnici, je vidět, že bílých políček je o 1 víc než černých políček. Každá dlaždice pokrývá právě dvě políčka – jedno bílé a jedno černé. Tedy nepokryté (místo pro sochu) zůstane bílé políčko. Takových políček je 13, ale vzhledem k souměrnostem stačí ukázat pokrytí ve třech případech – viz obr. 7.



Obr. 7

Úloha 3: Postupuje se podobně jako v předcházející úloze. Náměstí 10×10 se vybarví tak, jak to vidíte na obrázku 8. Každá dlaždice 4×2 položená na náměstí tak, aby se její strany splynuly se sítí, kryje svou jednou polovinou modrý čtverec (velikosti 2×2) a druhou polovinou stejně velký bílý čtverec. Vzhledem k tomu, že černých čtverců je na náměstí méně a kromě toho na jednom z nich je květinový záhon, náměstí nelze vydláždit danými dlaždicemi.

b	b	č	č	b	b	č	č	b	b
b	b	č	č	b	b	č	č	b	b
č	č	b	b	K	K	b	b	č	č
č	č	b	b	K	K	b	b	č	č
b	b	č	č	b	b	č	č	b	b
b	b	č	č	b	b	č	č	b	b
č	č	b	b	č	č	b	b	č	č
č	č	b	b	č	č	b	b	č	č
b	b	č	č	b	b	č	č	b	b
b	b	č	č	b	b	č	č	b	b

Obr. 8
č = černé pole, *b* = bílé pole

Úloha 4: Při řešení můžete použít obrázek z předcházející úlohy. Každá dlaždice 4×1 pokryje stejně velkou bílou plochu jako černou. Protože modrých čtverců je na náměstí méně než bílých, není možné je dlaždicemi 4×1 vydláždit.

Úloha 5: Políčka náměstí je třeba označit číslicemi 1, 2, 3, jak to vidíte na obrázku 9.

Dostaneme 21 políček označených číslicí 1, 22 políček označených číslicí 2 a 21 políček označených číslicí 3. Z toho je jasné, že náměstí není možné danými dlaždicemi vydláždit, pokud socha nestojí na některém z políček označených číslicí 2. A víte, že tato podmínka ještě nestačí? Pokud byste začali číslovat z jiného rohu, označení políček se změní. Jediná políčka, která své označení nezmění, jsou ta, v nichž je číslo 2 napsáno tučně. Na některé z těchto políček je možné postavit sochu a zbytek náměstí potom vydláždit dlaždicemi 3×1. To je již snadná úloha.

Úloha 6: Sochu lze postavit na kterékoli políčko. Úlohu vyřešíme nejprve pro menší náměstí. Začněme malým náměstím 2×2

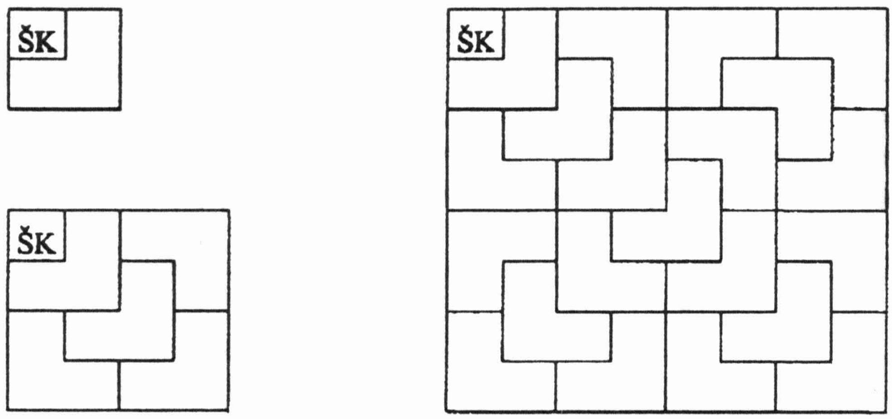
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	**2**	3	1	**2**	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	**2**	3	1	**2**	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3

Obr. 9

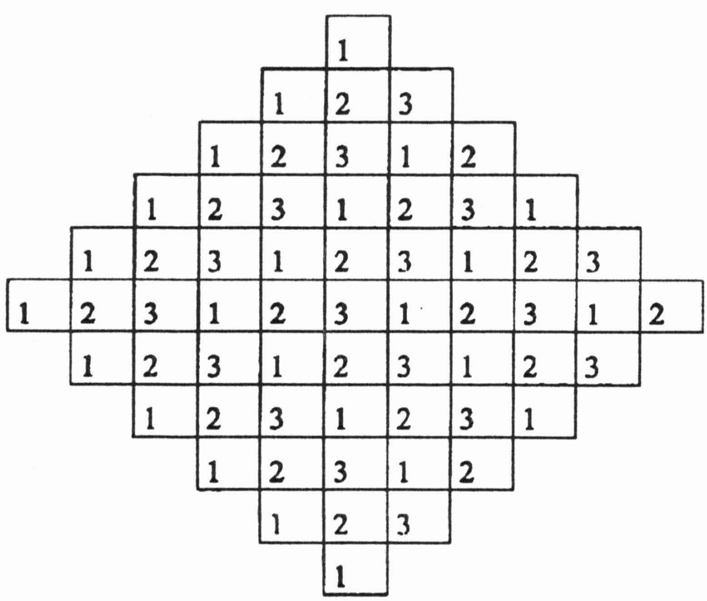
(obr. 10 vlevo nahoře). Jestliže na něm sochu postavíte na kterékoli políčko, zbude vám místo na právě jednu dlaždici. Vezměme teď náměstí 4×4. Jeden způsob jak jej lze pokrýt, vidíte na obrázku 10 vlevo dole. Když v tomto čtverci začneme otáčet čtverce 2×2, můžeme přemístit sochu na kterékoli pole. Konečně největší obrázek ukazuje jedno možné pokrytí čtverce 8×8. V něm přemísťujeme sochu pomocí otáčení čtverců 2×2 a 4×4.

Úloha 7: Jestliže si očíslujete políčka na náměstí tak, jak to vidíte na obrázku 11, snadno zjistíte, že políček označených jedničkou je 22, zatímco políček označených trojkou je jen 17. Náměstí tedy není možné pokrýt danými dlaždicemi; vzhledem k tomu, že každá dlaždice obsahuje jedno políčko označené jedničkou, jedno políčko označené dvojkou a jedno políčko označené trojkou, musel by být na náměstí stejný počet políček od každého z označení, aby bylo náměstí možné vydláždit. Ani pokud byste jedno políčko vynechali, nedosáhnete vyrovnání počtů. Úloha tedy nemá řešení.

Úloha 8: Jestliže náměstí 4×4 pokryjete dlaždicemi 2×1, pak libovolná spára, která je rovnoběžná s některým okrajem náměstí,


ŠK
ŠK
ŠK

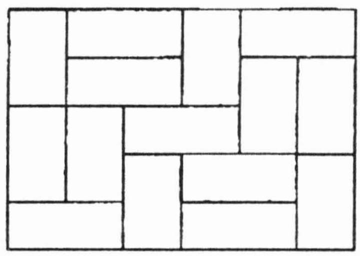
Obr. 10


1
1 2 3
1 2 3 1 2
1 2 3 1 2 3 1
1 2 3 1 2 3 1 2 3
1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2
1 2 3 1 2 3 1 2 3
1 2 3 1 2 3 1
1 2 3 1 2
1 2 3
1

Obr. 11

protne sudý počet dlaždic (číslo 0 je také sudé). Jestliže vezmeme v úvahu jen čáry čtvercové sítě náměstí, pak každou z dlaždic protíná právě jedna z čar. Jestliže by se náměstí pokrylo tak, aby na něm nebyla spára délky 4 políčka, pak by každá z čar sítě protínala aspoň dvě dlaždice. To by však bylo 12 dlaždic a na náměstí jich je jen 8.

Úloha 9: Jeden způsob, jak je možné náměstí pokrýt, je na obrázku 12.



Obr. 12

Úloha 10: Tuto úlohu je možné řešit stejně, jako jsme řešili osmou úlohu. Vnitřkem čtverce prochází 10 přímek, které mají protnout 20 dlaždic. Na náměstí však je jen 18 dlaždic.

Prof. RNDr. Milan Hejný, CSc.
Katedra matematiky a didaktiky matematiky UK Praha
M. D. Rettigové 5, 116 39 Praha 1
e-mail: Milan.Hejny@pedf.cuni.cz

Mgr. Marie Tichá, CSc.
Matematický ústav AV ČR
Žitná 25, 115 67 Praha 1
e-mail: ticha@math.cas.cz