

Milan Hejný; Marie Tichá

Matematické příběhy (4): Příběh čtvrtý. Moudrý osel

Učitel matematiky, Vol. 11 (2003), No. 1, 1–10

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/150787>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2003

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

MATEMATICKÉ PŘÍBĚHY (4)

Příběh čtvrtý MOUDRÝ OSEL

M. HEJNÝ, M. TICHÁ

Tentokrát se s vámi podělíme o příběh o Nasreddinovi, zamilovaném Džaafarovi a jeho moudrém oslu, který vyprávěl jeden námořník.

Nasreddin byl v mládí velký uličník. Navyvářel se tolik všelijakých šibalství, že je dodnes popisují spisovatelé celého světa. Když se však čas naplnil, stal se z nezbedníka zbedník, vážený hodža Nasreddin efendi. Bohaté životní zkušenosti a bystrý rozum udělaly z hodži vyhledávaného mudrce, jehož rad si lidé velmi vážili.

Jednou k Nasreddinovi přišel urostlý mládenec. Hodža si chlapce pečlivě prohlédl od hlavy k patě a potom mu ukázal, aby si přisedl. Nabídl hostovi občerstvení, ale ten netoužil ani po jídle, ani po pití. Bylo zjevné, že mládenec netrpělivě čeká, kdy bude moci předestříti svoji žádost. Jenže Nasreddin nespíchal. Dále klidně usrkával čaj a mlčel. Po dlouhé chvíli začal sám vyprávět: „Šaty máš špinavé a nohy rozdrásané, přicházíš z velké dálky. Tvoje tvář je přepadlá, trpíš hlubokým žalem. Z očí ti plane zoufalství i víra zároveň. To může být jediné. Láska. Zamiloval ses, chlapče, do nejčarovnějšího stvoření na světě. Do dívky, které bohyně závidějí její spanilost, něhu a krásu. Zamiloval ses, ale děvče tvoji lásku neopětuje. Neusměje se na tebe, vlídného slůvka nepronese, dokonce tebou snad i pohrdá. Takový je tvůj bol.“

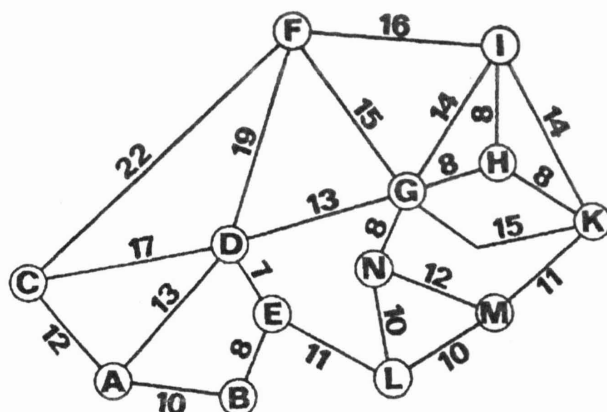
Mladý Džaafar zůstal jako omráčený. Moudrý hodža mu nejen vyčetl z tváře všechnu bolest, ale navíc vylíčil krásnou Tustar tak věrně, jako by ji měl přímo před sebou. To dalo mládenci novou naději. Uvěřil, že moudrý Nasreddin, který uměl tak přesně uhádnout příčinu jeho neštěstí, najde na ni i lék.

Džaaфар začal vyprávět, jak jednoho rána uslyšel zpěv, jak šel po hlase a uviděl Tustar, zázrak přírody, jak celé dny hledal možnost setkat se s ní a vyjavit jí svou lásku. Když se mu to konečně podařilo, krasavice ho odmítla jedinou větou. „Chtít lásku z mého srdce je totéž, jako chtít myšlenku z hlavy tvého osla“, řekla krutá Tustar a se smíchem utekla. Od té doby ji Džaaфар nespátril. Zpočátku sice ještě věřil, že ji uvidí, ale po čase ztratil naději a začal se trápit. Prosil Alláha, aby ho zbavil muk, třeba za cenu života. Nakonec se na radu dobrého přítele rozhodl vyhledat proslulého hodžů Nasreddina efendiho. Proto tu nyní sedí a s nadějí čeká na radu.

Chvíli bylo ticho. Nasreddin ještě jednou přiložil šálek čaje ke rtům a potom promluvil. Jeho řeč byla klidná a tichá, ale pevná a jistá. . . „Vezmeš svého osla a půjdeš do pouště. Budeš putovat od oázy k oáze a přitom budeš důsledně dodržovat toto pravidlo: jestliže půjdeš k nejbližší oáze, ponese náklad tvůj osel, v opačném případě poneseš náklad ty sám. Když se tě pocestní zeptají, proč náklad nenaložíš na osla, budeš jim vyprávět o své nešťastné lásce a řekneš, že Nasreddin splnil podmínku krásné Tustar – naučil tvého osla číst nápisy na tabulích, které ukazují směr a vzdálenost mezi oázami. A osel, s tvrdohlavostí pro toto zvíře příznačnou, si nyní umínil, že je ochotný nést náklad pouze tehdy, když směr vašeho putování vede k nejbližší oáze. V opačném případě řekneš, že osel umíněně odmítá nést náklad a tobě nezbývá nic jiného, než vláčet náklad na zádech sám. Nesmíš být však netrpělivý a vrátit se domů příliš brzy. Tebe a tvého zázračného osla musí předběhnout zpráva, kterou poutníci roznesou od Palmýry až po Aden. Každý bude chtít spatřit osla, kterého Nasreddin naučil rozumět ukazatelům na cestách. Doma v Ak Šehiru se tě nebudou moci dočkat a celá rodina krásné Tustar se bude už předem chlubit, že jejich děvče se stane manželkou proslulého Džaařara. Ale ty po návratu domů nespíchej do Tustara domu. Počkej, až její bratři přijdou na kus řeči. Ne ty, ale ona musí ve vaší svatbě vidět životní úspěch. Jdi ve jménu Alláhově.“

Mládenec hodžovi srdečně poděkoval a odešel do pouště, aby si podivným putováním vysloužil srdce vytoužené dívky. V pod-

večer došel do malé osady, kde přenocoval. Ráno poprosil tamního obchodníka, aby mu poradili jak se dostane do oázy N. Obchodník načrtnul mapku – zakreslil na ni i další oázy, které se Džaaфар chystal navštívit.



Obrázek 1

„Z oázy C, kde se právě nacházíš, se do oázy N dostaneš za 38 hodin: 17 hodin trvá cesta z oázy C do D, odtud se dostaneš za 13 hodin do oázy G a zbytek do N ujdeš za 8 hodin.“

Džaaфар poděkoval za radu a dodal: „Pro mně a mého moudrého osla není cesta přes D a G nejvhodnější. Hodža Nasreddin totiž moje zvíře naučil číst ukazatele na cestách a nyní je osel ochotný nést náklad pouze tehdy, když na rozcestí zvolím cestu do nejbližší oázy. Jinak se musím trápit s nákladem sám a tím se moje putování dvojnásobně zpomalí. Odtud z oázy C, je můj osel ochotný nést náklad pouze do nejbližší oázy A. Do oázy D bych musel nést náklad sám a netrvalo by mi to 17, ale 34 hodin. Pro mně vede nejkratší cesta do N přes oázy A, B, E a L. Pouze na jediném z těchto pěti úseků budu muset nést náklad sám – z E do L, protože z oázy E vede nejkratší cesta do D a ne do L. Z oázy L vedou tři cesty jedna nejdelší do oázy E – trvá 11 hodin – a dvě nejkratší do M a do N – každá trvá 10 hodin. V takovém případě je můj osel ochotný nést náklad po kterékoli ze dvou nejkratších cest. Jestliže to nyní všechno sečtu, tak cesta C-D-G-N by mi trvala $34 + 26 + 8 = 68$ hodin, zatímco cesta C-A-B-E-L-N mi bude trvat pouze $12 + 10 + 8 + 22 + 10 = 62$ hodin.“

Tak se obchodník z oázy C jako první dověděl o neobyčejných schopnostech Džaafarova osla. A potom přibývali další a další. Neuvěřitelná příhoda se šířila rychlostí blesku. Nejedem poutník neváhal změnit směr své cesty jen proto, aby na vlastní oči uviděl zázračné zvíře. Všichni poutníci obdivovali osla, moudře kroutili hlavou a říkal si: „Ba, ba – na první pohled docela obyčejný osel, a kolik rozumu mu hodža Nasreddin z vůle Alláhovy nadělil – ba, ba.“

V Ak Šehiru považovali první zprávy o moudrém Džaafarově oslu za žert. Když se však zvěsti množily a mnozí další poutníci byli ochotni na uši svého osla přísahat, že sami s Džaafarovým zvířetem mluvili, začali akšehiřané zprávám věřit. Netrpělivě očekávali svého, dnes již nejslavnějšího občana. Nejnetrpělivější byla krásná Tustar. Nemohla se dočkat dne, kdy se stane nevěstou nejlepšího mezi všemi mládenci nejen v Ak Šehiru, ale i v celém širokém okolí.

Džaafar se vrátil domů jako hrdina. Hned první večer se do jeho chalupy seběhlo tolik lidí, že si neměli ani kam stoupnout. Nechyběli ani bratři krásné Tustar, kteří naléhali, aby se svatba konala co nejdříve. Báli se, aby jejich sestru nepředběhla jiná dívka, protože o Džaafara byl nemalý zájem.

A tak příběh skončil tak, jak se patří – svatbou. Džaafar dostal vytouženou Tustar, neboť moudrý hodža, i když neuměl naučit osla rozumovat, věděl, jak má o tomto nesmyslu přesvědčit spoluobčany.

Úloha o moudrém Džaafarově oslu má hlubší význam, než by se na první pohled zdálo. Stačí, abyste si místo oáz představili železniční stanice a místo cest mezi oázami železniční trať. Ve stanici D je 10 vagónů brambor a ve stanici M 14 vagónů. Máme zorganizovat přepravu vagónů tak, aby do každé stanice (s výjimkou D a M) byl dodaný jeden vagón. Jak to udělat, aby doprava vyšla co nejlevněji?

Podobné úlohy musí řešit dispečink železniční nebo silniční dopravy denně. Dnes, kdy cena energie stále stoupá, je každá ušetřená troška, získaná zlepšenou organizací přepravy, velmi vítaná. Proto se při řešení dopravních problémů stále častěji používají

složité matematické úvahy.

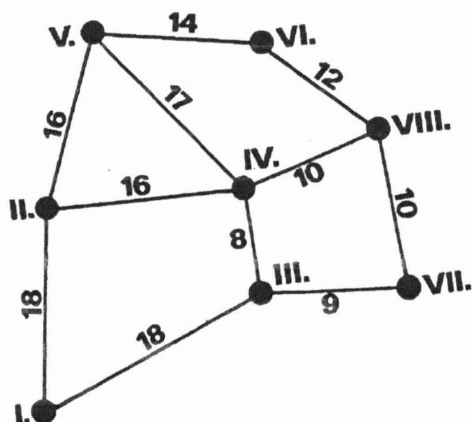
Když se na mapu oáz a cest podíváme pouze jako na schéma, můžeme ji označit obecným matematickým pojmem *graf*. Teorie grafů je mladá matematická disciplína. Přesto úspěšně pomáhá v nejrůznějších oblastech, například v dopravě, ekonomice, stavebnictví, ve fyzice, v chemii, biologii nebo dokonce v sociologii. Teorie grafů je úzce provázána s konstrukcí i používáním počítačů.

Pro vás má teorie grafů jednu velkou přednost. Existují v ní problémy, k jejichž pochopení nepotřebujete dlouho studovat a při jejichž řešení záleží víc na originálním nápadu než na rozsáhlých znalostech. A nyní vás čekají úlohy.

Úloha 1: Jaká je nejkratší vzdálenost z oázy A do oázy K na obrázku 1, jestliže uvažujeme jen skutečnou vzdálenost mezi oázami?

Úloha 2: Jaká je vzdálenost z oázy A do oázy K na obrázku 1, jestliže počítáme vzdálenost, kterou ušel Džaafar s nákladem na vlastních zádech, dvojnásobně?

Úloha 3: Na obrázku 2 je plánec krajiny s osmi oázami. Kudy bude Džaafar procházet, aby se dostal do všech oáz a přitom nikdy nenesl náklad?



Obrázek 2

Úloha 4: Je možné najít cestu pro Džaafara stejně „pohodlnou“ jako ve třetí úloze i v případě třinácti oáz na obrázku 1?

Úloha 5: Jaký nejdelší úsek může Džaaфар projít bez nákladu v případě třinácti oáz na obrázku 1?

Úloha 6: Kudy a jak dlouho bude Džaaфар s oslem cestovat, jestliže mají vyjít z oázy C a projít co nejdříve všech třináct oáz na obrázku 1? Při této cestě mohou po některém úseku projít vícekrát. Není podstatné, ve které oáze svoji pouť ukončí.

Úloha 7: Umíte v případě třinácti oáz na obrázku 1 najít pro Džaaфара a jeho osla nejkratší cestu procházející všemi oázami, která začíná i končí v oáze G?

Úloha 8: Pokuste se sestavit tabulku vzdáleností pro oázy ze třetí úlohy. Tabulka nebude symetrická, protože úsek, ve kterém náklad nese Džaaфар, se počítá dvojnásobně. Tabulka má rozměry 8 x 8 a záhlaví a v každém políčku má být zapsaná příslušná přepočítaná vzdálenost mezi oázami.

Úloha 9: Stejnou tabulku jako v osmé úloze sestavte pro případ třinácti oáz na obrázku 1.

VÝSLEDKY

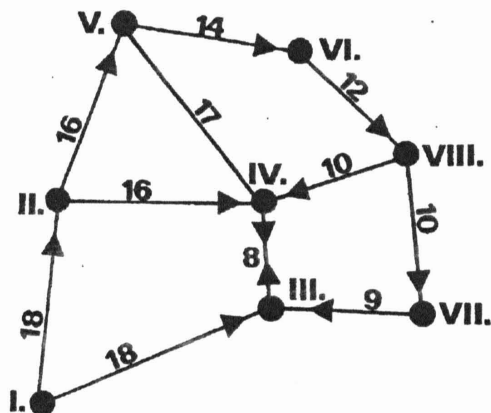
Úloha 1: Myšlenka postupu je jednoduchá. Nejkratší cestu z A do K hledáme postupně; vycházíme z A a hledáme nejkratší cestu do B, E, D, C, pak do L, N, G, F a až nakonec do M, K, H, I. Formalizace této myšlenky je trochu náročnější. Nejprve každou z oáz označíte – oázu A číslicí 0 a všechny ostatní oázy symbolem ∞ . Při výpočtu se budou označení měnit. Označení, která se rovnají vzdálenosti dané oázy od oázy A, zůstávají konstantní, dále se už tedy nemění. Nejprve změníte označení oáz B, C, D tak, že symbol ∞ nahradíte délkou cesty, která vede z oázy A do každé z nich dostanete: B-10, D-13, C-12. Nejmenší z těchto označení bude od této chvíle konstantní. Je to označení B-10. Dále postupujete takto: zkoumáte ty oázy, které sousedí s oázou B a jejichž označení není konstantní. Je to oáza E. Připíšete jí nové označení, které je součtem označení oázy B a její vzdálenosti od E v tom případě, že je tento součet menší než bylo původní označení oázy E. Nyní ze všech nekonstantních označení vyberete nejmenší

a prohlásíte je za konstantní. Okolí oázy s tímto novým konstantním označením zkoumáte stejně, jako jste zkoumali okolí oázy B. Takto postupujete tak dlouho, až dostanete konstantní označení oázy K. Jestliže jste správně počítali, vyšla vám označení: B-10, C-12, D-13, E-18, G-26, L-29, F-32, N-34, H-34, M-39, I-40, K-41. Vzdálenost oázy K od oázy A je tedy 41.

Tento postup je poměrně složitý a je těžké ho pochopit hned napoprvé. Úlohu je možné řešit také jinak – tužkou jednoduše jezdíte po papíru a zkoušíte jednotlivé cesty. Postup, který jsme vám ukázali (algoritmus), má však výhodu: může se jím místo člověka řídit počítač a úlohu vyřešit (přitom je nepodstatné, kolika oázami se prochází).

Úloha 2: V této úloze je hledání nejkratší cesty zkomplikované tím, že se některé vzdálenosti počítají dvojnásobně. Postupným zkoumáním (podobně jako v první úloze) dostanete tyto vzdálenosti oáz od oázy A: B-10, E-18, C-24, D-25, L-40, M-50, N-50, G-51, H-59, F-63, I-67, K-67.

Úloha 3: Obrázek oáz z příběhu si překreslete a doplňte takto: nejkratší úsek cesty označíte šipkou ve směru od oázy, ze které se vychází; je-li takových úseků více, označíte šipkou každý z nich (viz obr. 3).

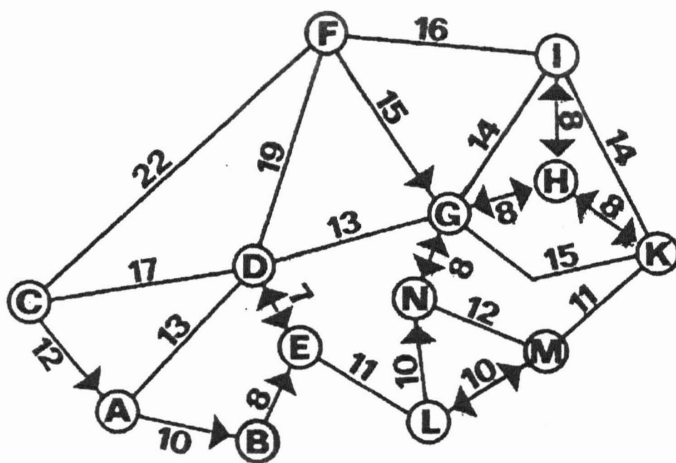


Obrázek 3

Všimněte si, že z každé oázy vychází aspoň jedna šipka. Jestliže by Džaaфар šel po cestě ve směru šipek, náklad by nesl osel. V opač-

ném případě by podle dohody nesl náklad Džaafar. Vaší úlohou je nalézt „ošipkovanou“ cestu, která prochází všemi oázami. Jestliže chcete vědět, zda jste našli správnou cestu, porovnejte si ji s touto: I - II - V - VI - VIII - VII - III - IV.

Úloha 4: Jestliže obrázek se třinácti oázami překreslíte na papír a doplníte šipky stejně jako v předcházející úloze, dostanete obrázek 4.



Obrázek 4

Snadno zjistíte, že v tomto případě neexistuje „ošipkovaná“ cesta, která prochází všemi oázami. Například z oázy E do oázy L nevede „ošipkovaná“ cesta, ačkoli tyto dvě oázy spolu sousedí.

Úloha 5: Jestliže „ošipkujete“ obrázek 1 se třinácti oázami, oázy se rozdělí do dvou skupin. V první jsou oázy A, B, C, D, E, ve druhé zbývající. Ani z jedné oázy první skupiny se nedostanete „ošipkovanou“ cestou do některé z oáz druhé skupiny a naopak. V první skupině oáz je nejdelší „ošipkovaná“ cesta: C-A-B-E-D. Je dlouhá 37. Ve druhé skupině oáz je nejdelší „ošipkovaná“ cesta například: M-L-N-G-H-K, která je dlouhá 44.

Úloha 6: Pro Džaafara hledáte nejkratší cestu, po které může projít všechny oázy. Přitom ty úseky cesty, kdy náklad nese Džaafar, počítáte dvakrát. Také tady využíváte „ošipkování“ a snažíte se

co nejčastěji postupovat ve směru šipek. Začátek hledané cesty je úsek, který jste našli při řešení páté úlohy pro první skupinu oáz. Mezi cestami, které přicházejí v úvahu, je nejvýhodnější následující: C-A-B-E-D-F-G-H-I-H-K-M-L-N (její délka je 164).

Úloha 7: Cestu, která začíná i končí v oáze G, hledáte podobně jako předcházející cesty. Jistě najdete několik cest, jejichž délky se od sebe jen o málo liší. Nejkratší cesta je: G-H-K-H-I-F-C-A-B-E-D-E-L-M-L-N-G (měří 212).

Úloha 8: Tabulku vyplňujete pomocí stejného postupu jako v první a druhé úloze. Rozdíl je jen v tom, že počáteční oázou budou střídavě všechny oázy z obrázku. Nejsnáze vyplníte políčka, která jsou na hlavní úhlopříčce, protože vzdálenost každé z oáz od sebe samé je vždy nulová. Máte i vy ve vyplněné tabulce tato čísla (viz tabulka 1)?

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
I	0	18	18	26	34	48	36	46
II	36	0	24	16	16	30	42	36
III	36	40	0	8	42	52	18	28
IV	44	32	8	0	34	44	26	20
V	68	32	42	34	0	14	36	26
VI	66	54	30	22	28	0	22	12
VII	45	49	9	17	51	44	0	20
VIII	54	42	18	10	44	24	10	0

Tabulka 1

Úloha 9: Po vyřešení osmé úlohy vám jistě tato úloha nebude dělat problémy. Samozřejmě, pokud máte trpělivost. Práci si můžete usnadnit, jestliže si všimnete některých zákonitostí. Například, že nejkratší cesta z oázy H do oáz A, B, C, D, E vede přes G. Proto vzdálenost H-A, H-B, ... dostanete, jestliže ke vzdálenostem G-A, G-B, ... přičtete vzdálenost H-G, t.j. 8. Vyplněná tabulka je uvedena v tabulce 2.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	L	M	N
A	0	10	24	25	18	63	51	59	67	67	40	50	50
B	20	0	44	15	8	53	41	49	57	57	30	40	40
C	12	22	0	34	30	44	59	67	75	75	52	62	62
D	26	23	34	0	7	38	26	34	42	42	29	39	34
E	33	16	41	7	0	45	33	41	49	49	22	32	32
F	56	61	44	38	45	0	15	23	31	31	43	47	23
G	52	49	30	26	33	30	0	8	16	16	28	38	8
H	60	57	68	34	41	38	8	0	8	8	36	30	16
I	68	65	76	42	49	32	16	8	0	16	44	38	24
K	68	65	76	42	49	46	16	8	16	0	32	22	24
L	55	38	63	29	22	48	18	26	34	32	0	10	10
M	65	48	73	39	32	58	28	30	38	22	10	0	20
N	60	57	68	34	41	38	8	16	24	24	20	24	0

Tabulka 2

Prof. RNDr. Milan Hejný, CSc.

Katedra matematiky a didaktiky matematiky UK Praha

M. D. Rettigové 5, 116 39 Praha 1

e-mail: Milan.Hejny@pedf.cuni.cz

Mgr. Marie Tichá, CSc.

Matematický ústav AV ČR

Žitná 25, 115 67 Praha 1

e-mail: ticha@math.cas.cz