Milada Kočandrlová

Biracionální kubická transformace

Učitel matematiky, Vol. 14 (2006), No. 4, 193–200

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150736

BIRACIONÁLNÍ KUBICKÁ TRANSFORMACE

Milada Kočandrlová

Pomocí jednoduchých konstrukcí v rovině můžeme definovat zajímavou transformaci, jejímž speciálním případem je kruhová inverze. Základní vlastnosti pravoúhlých trojúhelníků nám pomohou k jejímu analytickému vyjádření, a to jak v kartézských, tak v polárních souřadnicích. Využití této transformace k sestrojování obrázků bez počítače by bylo téměř nemožné.

Co je biracionální kubická transformace

Bodem $M[x;y]$ ve zvolené kartézské soustavě souřadnic vedeme rovnoběžné přímky s osami souřadnic. Jejich průsečíky A, B určují přímku p. Pro určení souřadnic paty $M_1[x_1;y_1]$ kolmice z počátku O na přímku p využijeme podobnosti a Eukleidovu větu o odvěsně v pravoúhlých trojúhelnících na obr. 1, tj.

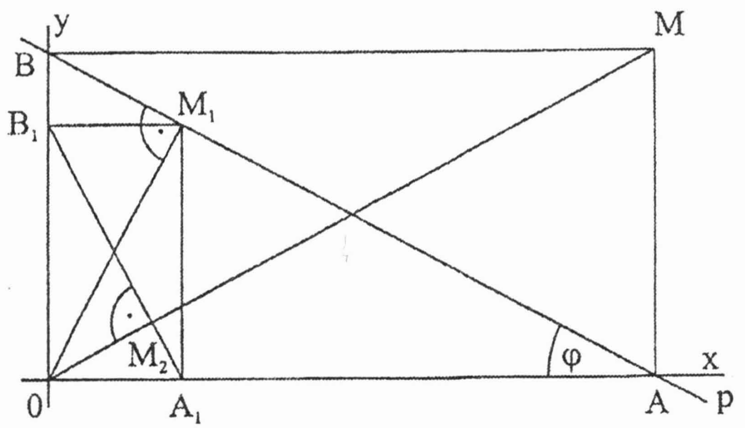
$$\frac{|OM_1|}{x} = \frac{y}{|AB|}, \quad xx_1 = yy_1 = |OM_1|^2. \tag{1}$$

Umocníme-li první rovnici na druhou a dosadíme z druhé rovnosti, dostaneme vyjádření souřadnic bodu M_1 pomocí souřadnic bodu M

$$x_1 = \frac{xy^2}{x^2+y^2}, \quad y_1 = \frac{x^2y}{x^2+y^2}. \tag{2}$$

Z Eukleidovy věty, viz (1), dostaneme přímo i souřadnice bodu M pomocí souřadnic bodu M_1

$$x = \frac{x_1^2+y_1^2}{x_1}, \quad y = \frac{x_1^2+y_1^2}{y_1}. \tag{3}$$



Obr. 1

Rovnicemi (2) a (3) je dáno vzájemně jednoznačné zobrazení bodů M a M_1 v rovině nazývané **biracionální kubická transformace.**

Zopakujeme-li výše uvedený postup pro bod M_1, tj. určíme patu M_2 kolmice z počátku O na úhlopříčku A_1B_1 v obdélníku $OA_1M_1B_1$, z pravoúhlých trojúhelníků na obr. 1 je zřejmé, že bod M_2 leží na polopřímce OM.

Dalším analogickým postupem bychom dostali k bodu M_2 bod M_3. Bod M_3 leží na polopřímce OM_1, atd.

Složením dvou transformací $M \to M_1$ a $M_1 \to M_2$ je **kruhová inverze** o středu v počátku O. Z obr. 1 je

$$\cos\varphi = \frac{|OM_2|}{x_1} = \frac{x}{|OM|}.$$

Odtud podle (1) dostáváme

$$|OM||OM_2| = xx_1 = |OM_1|^2 = x_1^2 + y_1^2 = \kappa,$$

kde κ je koeficient inverze, viz např. [1].

Proto bude výhodné pro vyjádření bodů M a M_1 v transformacích (2) a (3) využít polární souřadnice. Označíme

$$M[\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi], \; M_1[\varrho_1\cos\varphi_1, \varrho_1\sin\varphi_1].$$

Přitom (viz obr. 1) je zřejmé, že platí $\varphi_1 = \frac{\pi}{2} - \varphi$. Dosazením do rovnic (2) a (3) (s využitím vztahu mezi oběma úhly a součtových vzorců) dostaneme vyjádření obou transformací v polárních souřadnicích

$$\varrho = \frac{\varrho_1}{\sin\varphi_1 \cos\varphi_1}, \quad \varrho_1 = \varrho \sin\varphi \cos\varphi. \tag{4}$$

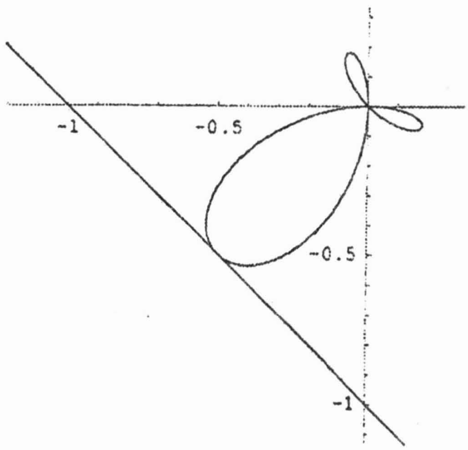
Obraz přímky

Nechť množina bodů $M[x;y]$ je dána rovnicí

$$ax + by + c = 0. \tag{5}$$

Po dosazení zobrazovacích rovnic (3) a úpravě dostáváme vyjádření množiny jejich obrazů $M_1[x_1;y_1]$

$$(ay_1 + bx_1)(x_1^2 + y_1^2) + cx_1y_1 = 0. \tag{6}$$



Obr. 2

Křivka daná rovnicí (6) se nazývá **zobecněná strofoida**, nebo také **strofoidála**.

Je-li a, resp. b rovno nule, je strofoidála (6) kružnice dotýkající se osy x, resp. osy y.

Je-li $c = 0$, potom strofoidála (6) je přímka souměrná s přímkou (5) podle osy toho kvadrantu, ve kterém leží přímka (5).

Pro grafické znázornění budou výhodnější polární souřadnice. Rovnice (6) strofoidály, obr. 2, bude mít tvar

$$\varrho_1 = \frac{-c \sin\varphi_1 \cos\varphi_1}{a \sin\varphi_1 + b \cos\varphi_1}\,.$$

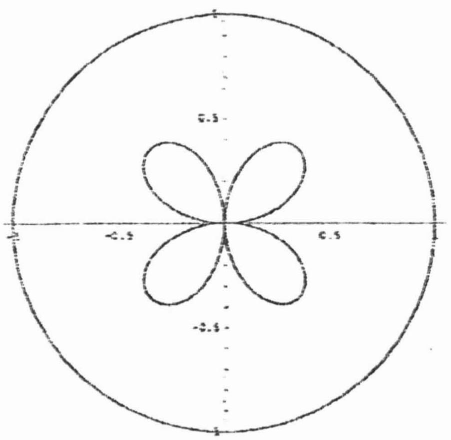
Obraz kružnice

Do rovnice kružnice

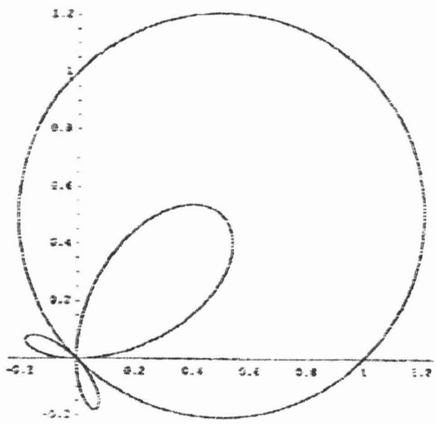
$$x^2 + y^2 - ax - by - c = 0 \tag{7}$$

dosadíme zobrazovací rovnice (3). Pak pro obraz kružnice (7) platí

$$(x_1^2 + y_1^2)^3 - (x_1^2 + y_1^2)(ay_1 + bx_1)x_1y_1 - cx_1^2y_1^2 = 0\,. \tag{8}$$



Obr. 3a



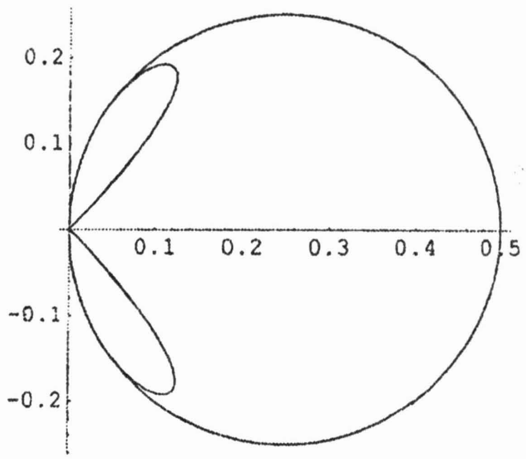
Obr. 3b

1. $a = b = 0$, $c > 0$
   Rovnicí (7) je určena kružnice o středu v počátku a poloměru $\sqrt{c}$. Rovnicí (8) je určena čtyřlistá růžice, obr. 3a. Její rovnice v polárních souřadnicích je

$$\varrho_1 = \frac{\sqrt{c}}{2} \sin 2\varphi_1\,.$$

2. $c = 0$, $a = b > 0$
Rovnicí (7) je určena kružnice se středem na ose prvního kvadrantu jdoucí počátkem O, rovnice v polárních souřadnicích je $\varrho = a(\sin\varphi + \cos\varphi)$.
Rovnicí (8) je určen trojlist (trifolium), obr. 3b, s polární rovnicí

$$\varrho_1 = \frac{a}{2}(\sin\varphi_1 + \cos\varphi_1)\sin 2\varphi_1 .$$



Obr. 4

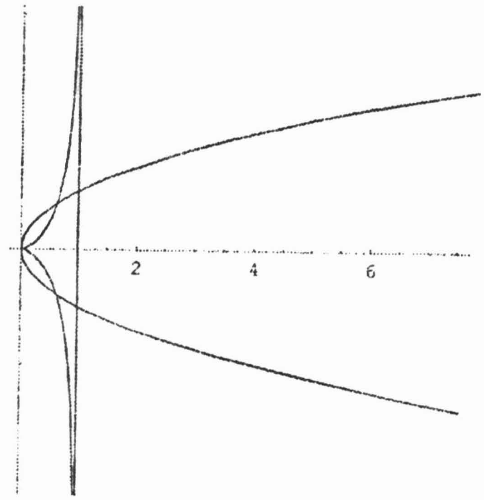
3. $c = b = 0$, $a > 0$
Kružnice (7) prochází počátkem a střed má na ose x, její polární rovnice je $\varrho = a\cos\varphi$.
Obraz je dvojlist, obr. 4, v polárních souřadnicích

$$\varrho_1 = a\sin^2\varphi_1\cos\varphi_1 .$$

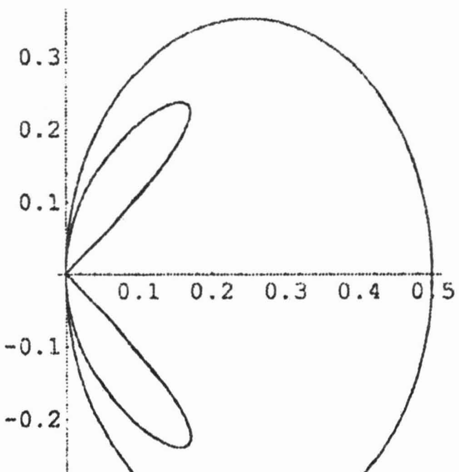
Obraz některých kuželoseček

Nechť je kuželosečka určena rovnicí

$$ax^2 + y^2 - bx = 0 . \tag{9}$$



Obr. 5



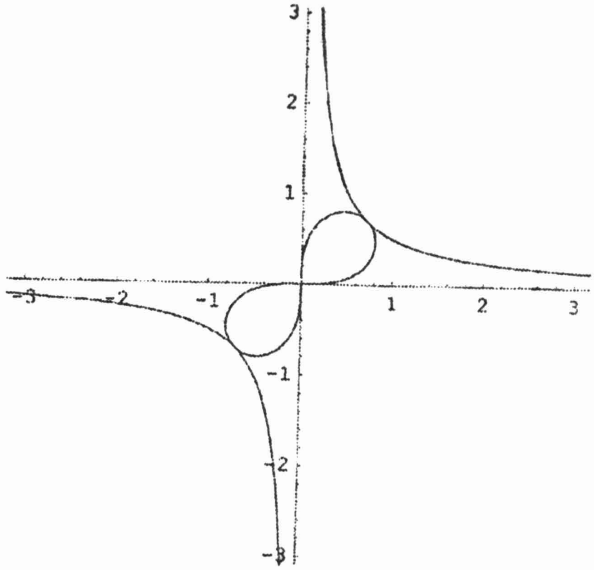
Obr. 6

Její obraz je dán rovnicí

$$(x_1^2 + y_1^2)(x_1^2 + a y_1^2) = b x_1 y_1^2 \,.$$

Pro $a = 0$ je rovnicí (9) dána parabola, v polárních souřadnicích $\varrho = \dfrac{b \sin^2 \varphi}{\cos \varphi}$, a její obraz je kissoida, obr. 5, v polárních souřadnicích

$$\varrho_1 = b\cos^3\varphi\,.$$



Obr. 7

Pro $a > 0$ je rovnicí (9) určena elipsa s polární rovnicí $\varrho = \dfrac{b\cos\varphi}{\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi}$. Její obraz, obr. 6, je dvojlist s polární rovnicí

$$\varrho_1 = \frac{b\sin^2\varphi_1\cos\varphi_1}{(\cos^2\varphi_1 + a^2\sin^2\varphi_1)}\,.$$

Obrazem hyperboly $xy = k$ ($\varrho = \dfrac{\sqrt{2k}}{\sqrt{\sin 2\varphi}}$) je Bernoulliova lemniskata, obr. 7,

$$(x_1^2 + y_1^2)^2 = kx_1y_1\,, \quad \varrho_1 = \frac{\sqrt{2k}}{2}\sqrt{\sin 2\varphi_1}\,.$$

Analogicky bychom mohli pomocí rovnic (2) pro inverzní zobrazení hledat vzory k přímkám, kružnicím i kuželosečkám, viz [2].

Literatura

[1] Kuřina F., *Deset geometrických transformací*, Prometheus, 2002.

[2] Zahradník K., *O jisté birationální kubické transformaci a jejím upotřebení v theorii křivek*, *ČPMF* **XXXIV**(1905) ss. 105-23, 329-41 a **XXXVIII**(1909), ss. 6-25.

Doc. RNDr. Milada Kočandrlová, CSc.
Katedra matematiky, Fakulta stavební ČVUT,
Thákurova 7
166 29 Praha 6
e-mail: Milada.Kocandrlova@fsv.cvut.cz