Učitel matematiky

Vlastimil Dlab

# Důkladné porozumění elementární matematice

*Učitel matematiky*, Vol. 17 (2009), No. 3, 169–182

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150588`

# DŮKLADNÉ POROZUMĚNÍ ELEMENTÁRNÍ MATEMATICE

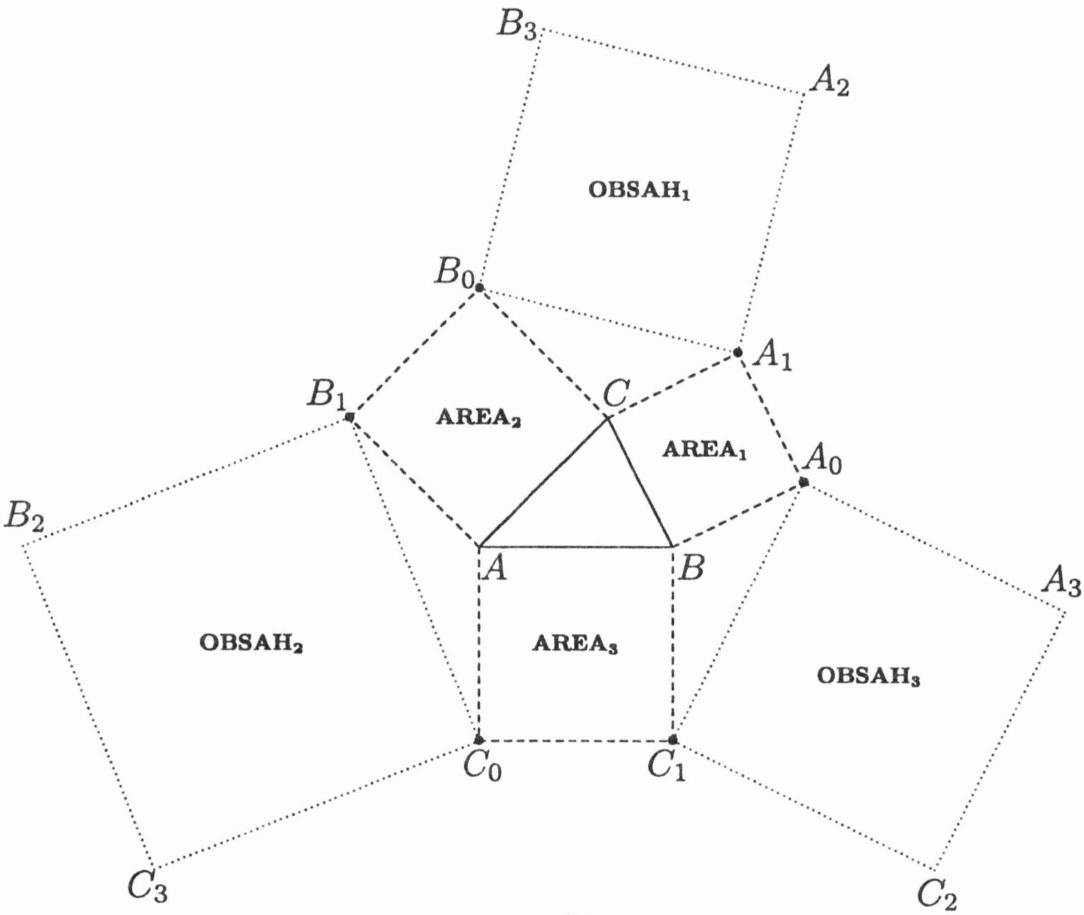
VLASTIMIL DLAB

Tento článek volně navazuje na můj příspěvek [4] přednesený na *Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol* v Srní v listopadu 2008. Reaguji v něm na zájem, který můj příspěvek vyvolal, a na některé dotazy, které byly v Srní položeny. Předpokládám, že bude zajímavý i pro čtenáře časopisu *Učitel matematiky*.

Rád bych na konkrétních příkladech objasnil pojem *důkladného porozumění elementární matematice*, který zavedla Liping Ma ve své knize [7]. Ve sbornících předchozích setkání matematiků všech typů a stupňů škol nalezneme hojně příležitostí ukázat, že autor či autorka svůj příspěvek plně nevyužili k tomu, aby příslušnou látku hlouběji objasnili. Myslím, že když na tento nedostatek upozorním a naznačím na konkrétních příkladech nápravu, bude pojem *důkladného porozumění* nejlépe vysvětlen. Znovu zdůrazňuji – tak, jak jsem se snažil tento přístup podtrhnout ve svém abstraktu [4, str. 101] – že důkladné porozumění pojmům je zcela nezbytné, chceme-li matematiku učinit pro studenty přitažlivou. Jenom tak lze s plným sebevědomím vyvolávat se studenty dialog, diskusi, v níž jsme schopni zodpovědět všechny jejich dotazy a ukojit jejich zvídavost. Pravým opakem je potlačování diskuse a ztělesňování matematiky s nepřekonatelnými překážkami, což je oprávněně kritizováno.

Vybral jsem tři úlohy ze sborníku **Ani jeden matematický talent nazmar** (Hradec Králové, 2005), abych ukázal, v čem spočívá důkladné porozumění danému příkladu, a jak i poměrně jednoduchá úloha může vést k zajímavým důsledkům.

**První úloha** se týká vztahu mezi obsahy čtverců sestrojenými nad stranami libovolného trojúhelníku a obsahy čtverců sestrojenými nad stranami přidružených trojúhelníků. Jedná se o situaci, která je znázorněna na následujícím obrázku 1:



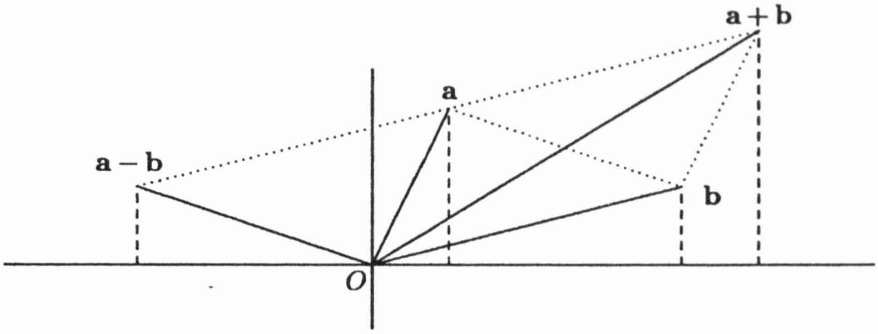

Obr. 1

Dokažte, že

$$OBSAH_1 + OBSAH_2 + OBSAH_3 = \\ = 3 \times (AREA_1 + AREA_2 + AREA_3).$$

Ano, použití kosinové věty vede k cíli. Je to však trochu jako vzetí kanónu na zajíčka. Navíc to bohužel ponechává výsledek jako izolovanou záhadu a nevysvětluje podstatu problému. Je to řešení, které rádi kritizujeme. Opět použití nějakého vzorce! **Biflování!** A věřím, že těm z nás, kdo jsme byli vychováváni a **zkoušeni** z předvádění vzorečků, je těžké si odvykat a nenechat se svést ...

Podstatou celé úlohy je známý vztah $u^2 + v^2 = 2(a^2 + b^2)$ mezi stranami $a$, $b$ daného rovnoběžníku a jeho úlopříčkami $u$, $v$ [viz Addendum na konci článku]. Ten si jistě pamatujeme (nebo bezprostředně odvodíme) pomocí sčítání vektorů či komplexních čísel (viz obr. 2):




Obr. 2

Nechť

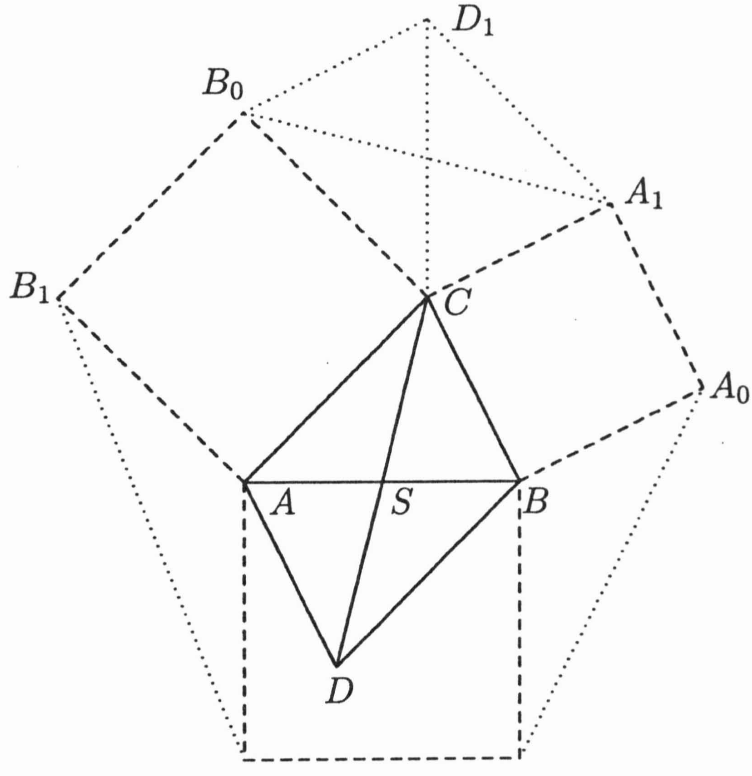
$$\mathbf{a} = a_1 + a_2 i, \ \mathbf{b} = b_1 + b_2 i,$$

$$a = |\mathbf{a}|, \ b = |\mathbf{b}|, \ u = |\mathbf{a} + \mathbf{b}|, \ v = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|.$$

Potom

$$u^2 + v^2 = \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}} + \mathbf{b}\bar{\mathbf{b}} + \mathbf{a}\bar{\mathbf{b}} + \mathbf{b}\bar{\mathbf{a}} + \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}} + \mathbf{b}\bar{\mathbf{b}} - \mathbf{a}\bar{\mathbf{b}} - \mathbf{b}\bar{\mathbf{a}} = 2(a^2 + b^2).$$

Nyní se podívejme na centrální část výše uvedeného obrázku 1:




Obr. 3

Strany trojúhelníku $ABC$ označíme $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Uvažujme čtverec $CBA_0A_1$ nad stranou $a$ a čtverec $ACB_0B_1$ nad stranou $b$. Okamžitě vidíme, že rovnoběžníky $ADBC$ a $CA_1D_1B_0$ jsou shodné. Hledáme vztah mezi délkou strany $c$ a délkou úsečky $c_1 = A_1B_0$. Jelikož $c$ a $c_1$ jsou úhlopříčkami v našem rovnoběžníku (který má strany $a$ a $b$), dostáváme

$$c_1^2 = 2(a^2 + b^2) - c^2. \qquad (*)$$

Užitím symetrie dostáváme též

$$b_1^2 = 2(c^2 + a^2) - b^2 \qquad \text{a} \qquad a_1^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2.$$

Sečtením těchto tří rovností získáme rovnost

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

Připojme ještě následující poznámku. Z obrazce můžeme vyčíst celou řadu vztahů. Např. délka těžnice $t_C = CS$ v trojúhelníku $ABC$ splňuje vztah

$$t_C^2 = \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2) - \tfrac{1}{4}c^2.$$

Proto pro těžnice trojúhelníku platí vztah

$$t_A^2 + t_B^2 + t_C^2 = \tfrac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Využijme tohoto příkladu k ilustraci rekurzivního procesu, a tím k plnému porozumění dané konstrukci a zároveň k ukázce, jak spolu souvisejí navenek zcela odlišné pojmy (zde vidíme vztah k posloupnosti Fibonacciho).

Úvodní konstrukce (první dvě trojice čtverců) je prvním krokem v rekurzivním vytváření dalších trojic čtverců, jak naznačuje obrázek.

Jestliže označíme strany čtverců v $n$-tém kroku $(a_n, b_n, c_n)$, tj. položíme

$$\begin{aligned} a_1 &= B_1C_0, & b_1 &= C_1A_0, & c_1 &= A_1B_0, \\ a_2 &= A_3A_2, & b_2 &= B_3B_2, & c_2 &= C_3C_2, \end{aligned}$$

atd., snadno uvidíme, že čtverce s „lichými" stranami $a_{2k+1}$, $b_{2k+1}$, $c_{2k+1}$ jsou „rovnoběžné" se čtverci se stranami $a_1$, $b_1$, $c_1$ a že čtverce se „sudými" stranami $a_{2k}$, $b_{2k}$, $c_{2k}$ jsou „rovnoběžné" se čtverci nad daným trojúhelníkem (tedy se stranami $a$, $b$, $c$). Poznamenejme ještě, že strany $(a_n, b_n, c_n)$ tvoří (po identifikaci příslušných vrcholů čtverců) trojúhelník, který má strany rovnoběžné se zadaným trojúhelníkem $ABC$ (pro sudé $n$), nebo má strany kolmé na těžnice $t_A$, $t_B$, $t_C$ trojúhelníku $ABC$. Výpočet těchto stran je tedy rekurzivně velmi snadný užitím vztahu $(*)$ pro příslušný trojúhelník. Tak např. $a_2 = a + a_*$, kde $a_*$ splňuje vztah $(*)$ pro trojúhelník o stranách $a_1$, $b_1$, $c_1$. Tedy

$$\begin{aligned} a_*^2 &= 2(b_1^2 + c_1^2) - a_1^2 = \\ &= 2[2(a^2 + c^2) - b^2 + 2(a^2 + b^2) - c^2] - 2(b^2 + c^2) + a^2 = 9a^2, \end{aligned}$$

a proto $a_2 = a + 3a = 4a$, tj.

$$(a_2, b_2, c_2) = (a, b, c) + 3 \cdot (a, b, c) = 4 \cdot (a, b, c).$$

Podobně $a_3 = a_1 + a_{**}$, kde $a_{**}$ splňuje vztah $(*)$ pro trojúhelník o stranách $a_2$, $b_2$, $c_2$. Tedy

$$a_{**}^2 = 2(16b^2 + 16c^2) - 16a^2 = 16[2(b^2 + c^2) - a^2] = 16a_1^2,$$

a proto $a_3 = a_1 + 4a_1 = 5a_1$, tj.

$$(a_3, b_3, c_3) = (a_1, b_1, c_1) + 4 \cdot (a_1, b_1, c_1) = 5 \cdot (a_1, b_1, c_1).$$

Stejným postupem nalezneme

$$\begin{aligned} (a_4, b_4, c_4) &= (a_2, b_2, c_2) + 5 \cdot 3 \cdot (a, b, c) &=& \ 19 \cdot (a, b, c), \\ (a_5, b_5, c_5) &= (a_3, b_3, c_3) + 19 \cdot (a_1, b_1, c_1) &=& \ 24 \cdot (a_1, b_1, c_1), \\ (a_6, b_6, c_6) &= (a_4, b_4, c_4) + 24 \cdot 3 \cdot (a, b, c) &=& \ 91 \cdot (a, b, c), \\ (a_7, b_7, c_7) &= (a_5, b_5, c_5) + 91 \cdot (a_1, b_1, c_1) &=& \ 115 \cdot (a_1, b_1, c_1) \ \text{atd.} \end{aligned}$$

Dostáváme tedy (užitím indukce) posloupnosti $\{u_k;\ k \geq 1\}$ a $\{v_k;\ k \geq 1\}$ přirozených čísel, která určují růst stran čtverců a která jsou definována následujícím způsobem:

Je-li $n = 2k$, položme $(a_n, b_n, c_n) = u_k(a, b, c)$, je-li $n = 2k+1$, položme $(a_n, b_n, c_n) = v_k(a_1, b_1, c_1)$, přičemž

$$u_k = u_{k-1} + 3v_{k-1}, \quad v_k = u_{k-1} + 4v_{k-1} \quad \text{a} \quad u_0 = v_0 = 1.$$

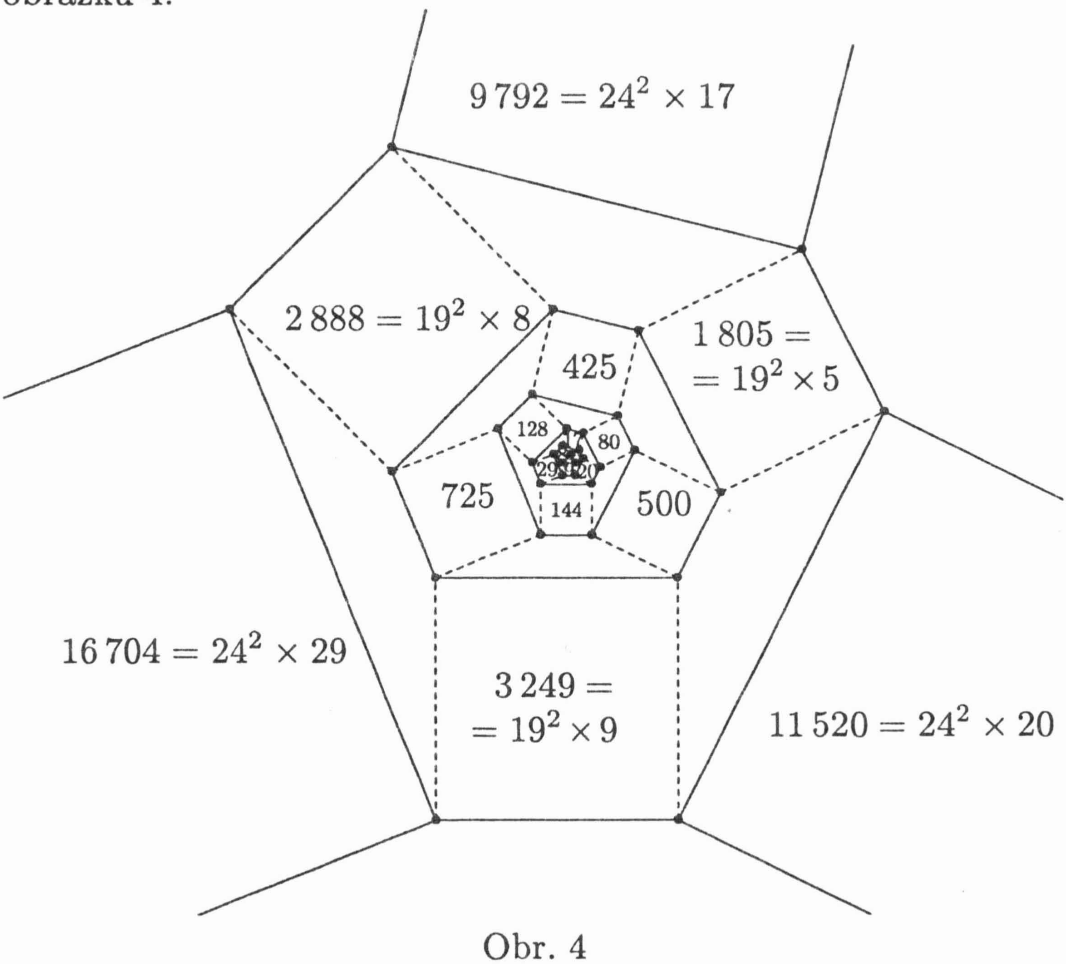
Posloupnost $(u_0, v_0, u_1, v_1, \dots)$, tj.

$$(1,\ 1,\ 4,\ 5,\ 19,\ 24,\ 91,\ 115,\ 436,\ 551,\ 2\,089,\ 2\,640, \dots),$$

je velmi blízká posloupnosti Fibonacciho čísel. Připomeňme pouze, že Fibonacciho posloupnost $(u_0, v_0, u_1, v_1, \dots)$ je definována obdobným indukčním vztahem

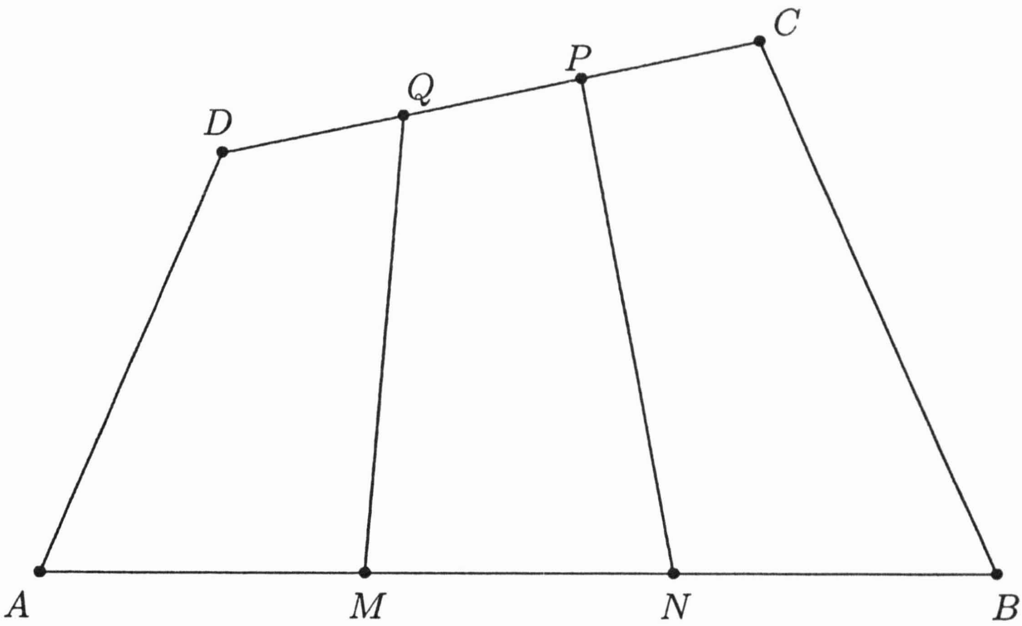
$$u_k = u_{k-1} + v_{k-1}, \quad v_k = u_{k-1} + 2v_{k-1}, \quad u_0 = v_0 = 1.$$

Pro ilustraci zvolme délky stran původního trojúhelníku $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$, 3. Potom obsahy jednotlivých čtverců jsou uvedeny v následujícím obrázku 4.




Obr. 4

Obraťme nyní pozornost k **úloze číslo 2**. Jakou část obsahu daného čtyřúhelníku zaujímá čtyřúhelník $MNPQ$, kde $AM = MN = NB$ a $DQ = QP = PC$? Viz obr. 5.



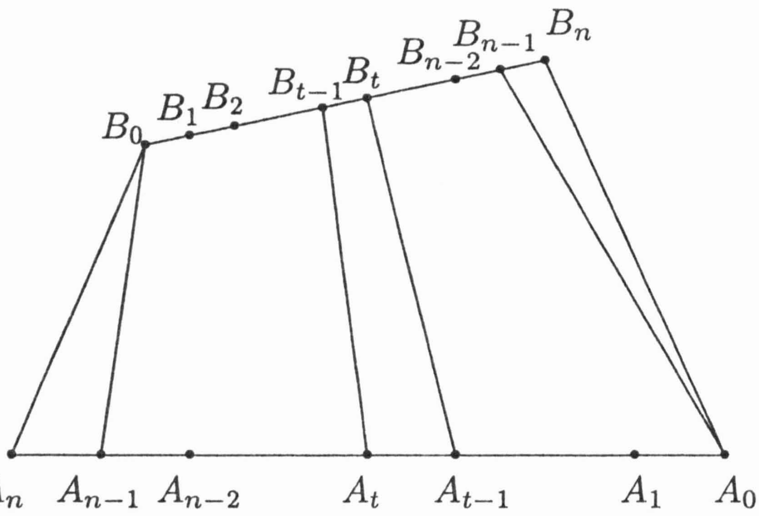

Obr. 5

Vysvětlení, v čem tato úloha spočívá, lze vyčíst z následujícího obrázku:

Body $A_1, \ldots, A_{t-1}, A_t, \ldots, A_{n-2}, A_{n-1}$ dělí stranu $A_nA_0$ daného čtyřúhelníku $A_nA_0B_nB_0$ na $n$ rovných dílů. Podobně body $B_1, B_2, \ldots, B_{t-1}, B_t, \ldots, B_{n-2}, B_{n-1}$ dělí stranu $B_0B_n$ na $n$ rovných dílů. Matematickou indukcí snadno dokážeme, že obsah čtyřúhelníku $A_tA_{t-1}B_tB_{t-1}$ je pro každé $1 \leq t \leq n$ rovný $\frac{1}{n}$ obsahu čtyřúhelníku $A_nA_0B_nB_0$.

Pro $n = 1$ je tvrzení zjevné, čtyřúhelník se nedělí na žádné části. Pro $n = 2$ je na protilehlých stranách čtyřúhelníku vždy jen jediný dělící bod $A_1$, resp. $B_1$. Obsah čtyřúhelníku $A_2A_1B_2B_1$, resp. $A_1A_0B_1B_0$ je zřejmě roven polovině obsahu čtyřúhelníku $A_0A_2B_0B_2$.

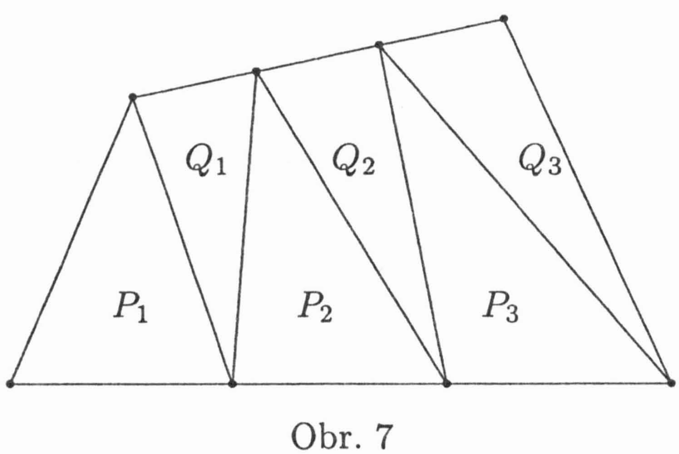
Předpokládejme dále, že tvrzení platí pro $n - 1$ a dokažme je pro $n$. Viz obr. 6.




Obr. 6

Snadno vidíme, že obsah trojúhelníku $A_nA_{n-1}B_0$ je roven $\frac{1}{n}$ obsahu trojúhelníku $A_nA_0B_0$ a že obsah trojúhelníku $B_nB_{n-1}A_0$ je roven $\frac{1}{n}$ obsahu trojúhelníku $B_nB_0A_0$, tj. obsah čtyřúhelníku $A_{n-1}A_0B_{n-1}B_0$ je roven $\frac{n-1}{n}$ obsahu čtyřúhelníku $A_nA_0B_nB_0$. Ale obsah čtyřúhelníku $A_tA_{t-1}B_tB_{t-1}$ je podle indukčního předpokladu roven $\frac{1}{n-1}$ obsahu čtyřúhelníku $A_{n-1}A_0B_{n-1}B_0$, a dostáváme požadované tvrzení.

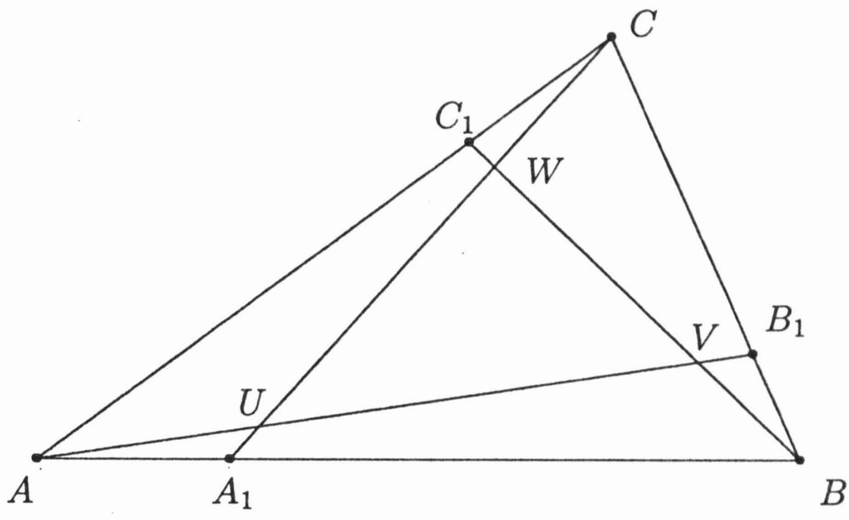
**Poznámka.** Původní formulace úlohy č. 2 je zavádějící, neboť zakrývá cestu k obecnému tvrzení. Úlohu je totiž možno řešit např. takto. Rozdělíme daný čtyřúhelník na šest trojúhelníků, jejichž obsahy tvoří dvě aritmetické posloupnosti $P_1$, $P_2$, $P_3$ a $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$, jak ukazuje obrázek 7 (délky výšek v každé trojici trojúhelníků se shodnými podstavami tvoří aritmetické posloupnosti). Proto je $P_2 + Q_2$ třetinou obsahu celého čtyřúhelníku.




Obr. 7

Nakonec se podívejme na **úlohu číslo 3.**
Jakou část obsahu rovnostranného trojúhelníku $ABC$ zaujímá trojúhelník $UVW$, kde

$$AA_1 = \tfrac{1}{3}AB, \qquad BB_1 = \tfrac{1}{3}BC \quad \text{a} \quad CC_1 = \tfrac{1}{3}CA?$$




Obr. 8

Právě tato úloha zasluhuje vysvětlení, neboť předpoklad, že trojúhelník má být rovnostranný, je zcela zbytečný. Patřičné tvrzení má být formulováno takto:

Nechť $ABC$ je **libovolný** trojúhelník. Nechť délka úsečky $AA_1$ je $\frac{1}{n}$ délky strany $AB$, délka úsečky $BB_1$ je $\frac{1}{n}$ délky strany $BC$ a délka úsečky $CC_1$ je $\frac{1}{n}$ délky strany $CA$. Potom obsah trojúhelníku $UVW$ je roven $\frac{(n-2)^2}{n^2-n+1}$ obsahu trojúhelníku $ABC$. Viz obr. 8.

Náčrt řešení: Užitím podobnosti trojúhelníků vypočteme, že výška trojúhelníku $AA_1U$ spuštěná z bodu $U$ je rovna $\frac{1}{n^2-n+1}$ výšky trojúhelníku $ABC$ spuštěné z bodu $C$, a tedy obsah $S(\Delta AA_1U)$ trojúhelníku $AA_1U$ je $\frac{1}{n(n^2-n+1)}$ obsahu trojúhelníku $ABC$. Užitím symetrie zjistíme, že stejný obsah mají trojúhelníky $BB_1V$ a $CC_1W$. Proto je obsah každého z čtyřúhelníků $A_1BVU$, $B_1CWV$ a $C_1AUW$ roven

$$\frac{1}{n} - \frac{2}{n(n^2-n+1)} = \frac{n^2-n-1}{n(n^2-n+1)}$$

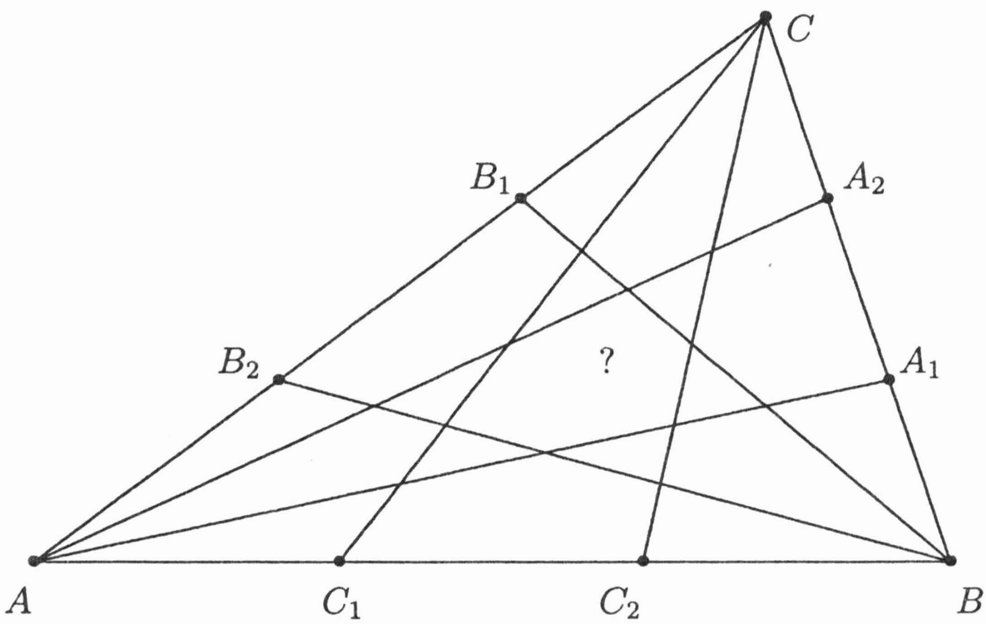
obsahu trojúhelníku $ABC$, a tedy obsah $S(\Delta UVW)$ je roven

$$1 - \frac{3(n-1)}{n^2-n+1} = \frac{(n-2)^2}{n^2-n+1}$$

obsahu trojúhelníku $ABC$. Pro malé hodnoty $n$ docházíme k těmto výsledkům:

$$\begin{aligned}
n&=1 & S(\Delta UVW) &= S(\Delta ABC),\\
n&=2 & S(\Delta UVW) &= 0,\\
n&=3 & S(\Delta UVW) &= \tfrac{1}{7}\, S(\Delta ABC),\\
n&=4 & S(\Delta UVW) &= \tfrac{4}{13}\, S(\Delta ABC),\\
n&=5 & S(\Delta UVW) &= \tfrac{3}{7}\, S(\Delta ABC),\\
n&=6 & S(\Delta UVW) &= \tfrac{16}{31}\, S(\Delta ABC),\\
n&=7 & S(\Delta UVW) &= \tfrac{25}{43}\, S(\Delta ABC),\\
n&=8 & S(\Delta UVW) &= \tfrac{12}{19}\, S(\Delta ABC) \text{ atd.}
\end{aligned}$$

Číselně je zajímavá úloha (viz [3]) týkající se obr. 9: **Jaký je obsah šestiúhelníku v porovnání s obsahem trojúhelníku?**



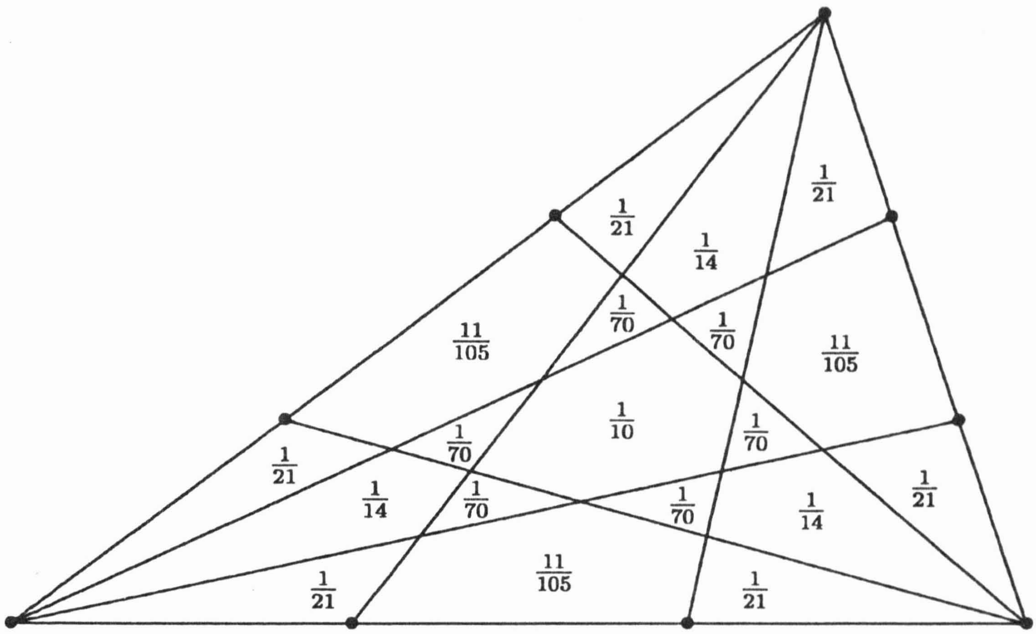

Obr. 9

Zde jsou samozřejmě dány tyto podmínky:

$$AC_1 = C_1C_2 = C_2B,\ BA_1 = A_1A_2 = A_2C,\ CB_1 = B_1B_2 = B_2A.$$

**Odpověď zní zcela překvapivě:** $\frac{1}{10}$!

Poměry obsahů jednotlivých částí trojúhelníku jsou dány obrázkem 10:




Obr. 10

Tato úloha je samozřejmě speciálním případem úlohy určit obsah šestiúhelníku, který dostaneme obdobným způsobem, rozdělíme-li každou stranu daného trojúhelníku na **lichý** počet $2n + 1$ stejně dlouhých úseků; zde dostaneme požadovaný šestiúhelník průnikem „centrálních“ trojúhelníků (jejichž obsah je roven $\frac{1}{2n+1}$ obsahu celého trojúhelníku). Odpověď i v této obecnosti je překvapivá:

**Obsah daného trojúhelníku** $= \binom{3n+2}{2} \times$ **obsah šestiúhelníku.**

Jak budete formulovat tuto úlohu, když rozdělíte strany trojúhelníku na **sudý** počet stejně dlouhých úseků?

**Addendum.**

Důvodem pro tento dodatek je to, že jsem zaslechl hlasy, že užití věty kosinové (tedy správně věty Al-Kashiho (1390–1450)) je ten nejlepší, nejpřijatelnější, a tedy nejelementárnější způsob, jak řešit úlohu číslo 1.

Znovu tvrdím, že správný (a z hlediska důkladného porozumění úloze velmi rozumný) přístup je užití následující varianty (zdánlivého zobecnění) Pythagorovy věty:

**Označíme-li $u$ a $v$ úhlopříčky rovnoběžníku o stranách $a$ a $b$, potom**

$$u^2 + v^2 = 2(a^2 + b^2).$$

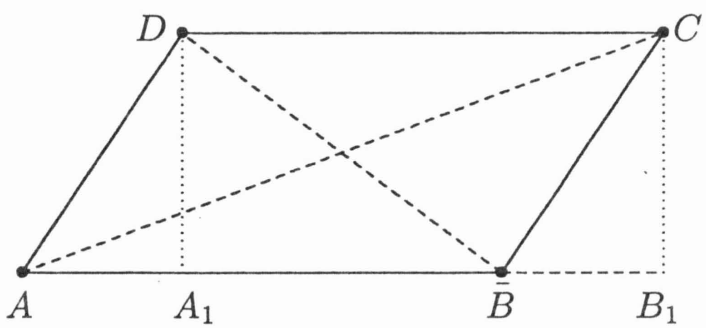
V předchozím textu jsem načrtl odvození tohoto vztahu pomocí komplexních čísel. To nebylo nutné, chtěl jsem zdůraznit „jednotu matematiky", tj. ukázat matematiku jako jednotnou oblast s množstvím spolu těsně souvisejících disciplín. Zákon o rovnoběžníku je uveden např. v [1] na str. 364.

Pythagorova věta je speciálním případem výše uvedeného tvrzení, když je rovnoběžník obdélníkem (tj. když $u = v$):

**Úhlopříčka $u$ obdélníku o stranách $a$ a $b$ splňuje vztah**

$$u^2 = a^2 + b^2.$$

Obdobně lze pomocí tohoto tvrzení (třikrát použitého) odvodit „obecný" vztah. Stačí načrtnout následující obrázek 11:




Obr. 11

Položíme-li $AB = a$, $BC = b$, $AC = u$, $BD = v$, $AA_1 = BB_1 = s$ a $CB_1 = h$, je

$$u^2 = (a+s)^2 + h^2, \qquad v^2 = (a-s)^2 + h^2$$

a sečtením získáme

$$u^2 + v^2 = 2a^2 + 2(s^2 + h^2) = 2(a^2 + b^2).$$

Toto je rozhodně látka patřící do základních škol na rozdíl od věty kosinové, která i v té nejjednodušší formulaci (užitím komplexních čísel)

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2Re(z_1\overline{z_2}),$$

kde

$$2Re(z_1\overline{z_2}) = z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = 2|z_1||z_2|\cos\sphericalangle(z_1z_2),$$

předpokládá hlubší znalosti.

Užitím tohoto jednoduchého tvrzení potom konstruujeme posloupnost trojic čtverců, jejichž strany jsou dány celočíselnými vektory $\mathbf{z_n} = (a_n, b_n, c_n)$. Strany počátečního trojúhelníku jsou dány vektorem $\mathbf{z_0} = (a, b, c)$ a strany prvně zkǫnstruované trojice čtverců vektorem $\mathbf{z_1} = (a_1, b_1, c_1)$, kde

$$a_1{}^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2,\ b_1{}^2 = 2(a^2 + c^2) - b^2,\ c_1{}^2 = 2(a^2 + b^2) - c^2.$$

Dále je

$$\mathbf{z_2} = 4\mathbf{z_0},\ \mathbf{z_3} = 5\mathbf{z_1},\ \mathbf{z_4} = 19\mathbf{z_0},\ \mathbf{z_5} = 24\mathbf{z_1},\ \mathbf{z_6} = 91\mathbf{z_0},\ \ldots,$$

takže součty obsahů jednotlivých trojic čtverců jsou postupně

$$\begin{array}{lcr} S_0 = a^2 + b^2 + c^2 & = & \Delta, \\ S_1 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 & = & 3\Delta, \\ S_2 = 4^2\Delta & = & 16\Delta, \\ S_3 = 5^2 \cdot 3\Delta & = & 75\Delta, \\ S_4 = 19^2\Delta & = & 361\Delta, \\ S_5 = 24^2 \cdot 3\Delta & = & 1728\Delta, \\ S_6 = 91^2\Delta & = & 8281\Delta \quad \text{atd.} \end{array}$$

Obecně, pro každé $k \geq 1$, je

$$\mathbf{z_{2k}} = c_{2k}\mathbf{z_0} \quad \text{a} \quad \mathbf{z_{2k+1}} = c_{2k+1}\mathbf{z_1},$$

kde

$$c_{2k} = c_{2k-2} + 3c_{2k-1} \quad \text{a} \quad c_{2k+1} = c_{2k-2} + 4c_{2k-1},$$

přičemž $c_0 = c_1 = 1$. Proto $S_{2k} = c_{2k}^2\Delta$ a $S_{2k+1} = 3c_{2k+1}^2\Delta$.

Dokonalému porozumění elementární matematice budou dále věnovány články [2], [5] a [6].

# Literatura

[1] Bečvář, J., *Lineární algebra*, Matfyzpress, Praha, 2000.

[2] Bečvář, J., Dlab, V., *Rozdělení čtyřúhelníku na čtyři části stejného obsahu.* Připravuje se do tisku.

[3] Bečvář, J., Dlab, V., Hrubý, D., Kuřina, F., Education of Mathematics Teachers (In Algebra and Geometry, in Particular), *Proceedings of the* $5^{th}$ *European Summer University* (eds. E. Barbin, N. Stehlíková, C. Tzanakis), Vydavatelský servis, Plzeň, 2008, 439–448.

[4] Dlab, V., Výchova budoucích učitelů matematiky. Předstírání k nápravě nepomůže: „Učitelé se tváří, že vyučují, a studenti, že studují.", Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2008, 6.–8. listopadu 2008, Srní (ed. M. Lávička, B. Bastl), Vydavatelský servis, Plzeň, 2008, 101–104.

[5] Dlab, V., *Aritmetické posloupnosti vyšších řádů.* Připravuje se do tisku.

[6] Dlab, V., *Rekurzivní posloupnosti* $\{x_n;\ n \geq 1\}$ *o dvou parametrech:* $x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n$. Připravuje se do tisku.

[7] Ma, Liping, *Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States*, Studies in Mathematical Thinking and Learning, Lawrence Erlbaum Associates, 1999.

*Prof. RNDr. Vlastimil Dlab, DrSc., FRSC*
*School of Mathematics and Statistics*
*Carleton University*
*Ottawa, Ontario, K1S 5B6*
*Canada*
*e-mail: vdlab@math.carleton.ca*