Učitel matematiky

Pavel Tlustý; Adam Plocki

Několik poznámek k méně obvyklým úlohám z pravděpodobnosti

Učitel matematiky, Vol. 18 (2010), No. 2, 119–123

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150520

NĚKOLIK POZNÁMEK K MÉNĚ OBVYKLÝM ÚLOHÁM Z PRAVDĚPODOBNOSTI

Pavel Tlustý, Adam Plocki

Jako čtenáře časopisu *Učitel matematiky* nás před časem zaujal příspěvek [1], který pojednává o třech méně obvyklých úlohách z pravděpodobnosti. Vzhledem k tomu, že se touto problematikou také zabýváme, dovolíme si přidat svůj názor na takto koncipované úlohy.

V úvodu článku [1] autor konstatuje, že *pravděpodobnost bývá na střední škole často pojata jako suchá věda plná odrazujících vzorců a ne právě jednoduché množinové symboliky*. S tímto názorem můžeme souhlasit jen částečně. Jednak je to záležitost vhodné učebnice a pak je také na učiteli, jak dané látce rozumí, jak je mu blízká a tedy i jak ji svým žákům podá. Je zřejmé, že přehnaným důrazem na „formalizmus vzorce, množinovou symboliku, atd.“ lze matematiku úspěšně otrávit většině studentů. Na druhé straně jsme zejména v poslední době svědky i přístupu opačného. Zřetelně se projevuje snaha o „propojení“ matematiky s ostatními předměty a také snaha ukázat matematiku jako disciplínu mající bezprostřední aplikovatelnost v praxi. Najít však praktickou úlohu, která je řešitelná prostředky středoškolské matematiky, není vždy snadné. Snad i proto jsme často svědky, že řada těchto úloh představuje jen „pseudoaplikace“ bez možnosti reálného uplatnění v praxi a některé z nich jsou z hlediska matematiky dokonce špatně.

Vraťme se nyní ke třem úlohám z článku [1], které patří právě k úlohám snažící se o praktické aplikace teorie pravděpodobnosti a které *„by ve studentech mohly vzbudit alespoň špetku zájmu, v lepším případě by mohly vést i k zajímavé diskusi”* (uvedeme jen stručná zadání).

Příklad I.
Zkusíme vypočítat, jak dlouho ještě bude existovat Chufuova pyramida v Gíze. Pokud si myslíte, že takovou věc vypočítat nelze, jste na omylu!

V tomto příkladě jsme sice svědky, jak autor dobře počítá s procenty, možná svými závěry i zaujme studenty, ale z hlediska pravděpodobnosti jde o úvahy zcela nesmyslné a hlavně nesprávné. Tento příklad nemá s matematikou nic společného!!! Pokud totiž víme, co je to pravděpodobnost a jak se počítá, je nám jasné, že pro výpočet pravděpodobnosti jevu potřebujeme (mimo jiné) mít pravděpodobnostní prostor. Dalším „slabým místem" je pojem „neexistence pyramidy", tj. jevu jehož pravděpodobnost se pokoušíme vypočítat. Víme, že už dnes chybí podstatná část z původního vápencového obkladu pyramidy. Znamená to, že pyramida již neexistuje? Určitě ne! Když odebereme jeden kvádr z pyramidy (jejich celkový počet se odhaduje na 2 300 000) bude to znamenat neexistenci pyramidy? Taky asi ne? A teď naopak. Kdybychom odstranili všechny kvádry a jen třeba 17 kvádrů ponechali na svém místě, tak asi většina lidí už by v takové „stavbě" pyramidu neviděla, tj. mluvili by asi o neexistenci pyramidy. Kolik kvádrů tedy musíme z pyramidy odstranit, abychom řekli, že už neexistuje? A proč zrovna tolik a ne o jeden víc či jeden méně?

Příklad II.
Jak často přichází „stoletá voda"? „Přece jednou za sto let!", chtělo by se zvolat. Ale je tomu opravdu tak? Jak si potom máme vysvětlit stoleté povodně v České republice v letech 1997 a 2002, jdoucí jen pět let po sobě?

V tomto případě je vysvětlení prosté i bez pravděpodobnosti. Pojem „$n-$letá voda" je definován pro daný tok a danou vodoměrnou stanici. Vzhledem k tomu, že červencové povodně roku 1997 se týkaly povodí řek Moravy a Odry, zatímco srpnové povodně roku 2002 byly záležitostí zejména povodí řek Vltavy a Labe, jde o zcela jiné toky a tedy bohužel, žádná senzace.

Když už jsme zmínili pojem „n–letá voda", je dobré si připomenout jeho definici. Podle názvoslovné normy vyjadřují tzv. n-leté hodnoty průměrnou dobu opakování extrémnosti kulminačního průtoku. Konkrétní hodnoty se určují z dlouhodobých časových řad pozorování. 100-letá povodeň je povodeň, jejíž kulminační průtok je v dlouhodobém průměru dosažen nebo překročen jedenkrát za 100 let. Jde o statistickou charakteristiku, nikoli predikční. Je zřejmé, že neplatí lineární úměra mezi jednotlivými hodnotami n–letých vod, tj. hodnota 100-leté povodně není dvojnásobkem 50-leté povodně, ani desetinásobkem 10-leté povodně a podobně.

Uvědomme si, že pro počítání pravděpodobností v takovém případě jen obtížně vystačíme s modelem navrženým v [1] a to hned z několika důvodů:

1. Hodnoty n–letých vod vznikají sledováním časové řady. Pro časové řady je obvyklé, že jednotlivá pozorování nejsou *nezávislá*, ale jsou obvykle korelovaná (např. několik po sobě jdoucích sušších nebo naopak deštivějších let, atd.).

2. Vzhledem k poměrně krátké délce této časové řady (pouze několik století) a způsobu definice pojmu 100-letá voda je tento pojem velmi „citlivý" na každou povodeň. Důsledkem toho také je, že kulminační průtok, který bychom označili jako 100-letou vodu např. v roce 2000 bychom už v roce 2005 za 100-letou vodu nepovažovali. Ukažme si to na změně hodnot n–letých vod ve vodoměrné stanici Praha-Chuchle viz [4], [5].

	1-letá	5-letá	10-letá	50-letá	100-letá
hodnoty před povodní v roce 2002 (v m^3/s)	765	1 600	2 030	3 150	3 700
současné hodnoty (v m^3/s)	856	1 790	2 230	3 440	4 020

Příklad III.
Americký raketoplán se skládá z asi 2 miliónů součástek, a i závada jediné součástky může být fatální. Aby raketoplán zdárně dokončil svou misi, musí tedy fungovat všechny jeho součástky, a to klade vysoké nároky na jejich spolehlivost (nebudeme teď uvažovat několikanásobné jištění nejdůležitějších systémů).

Řešení tohoto příkladu je „učebnicovou" ukázkou, jak lze od skutečně reálné úlohy přejít metodou *„nebudeme teď uvažovat"* či *„zanedbejme"* k úloze zcela nerealistické, jejímž řešením jsou zcela nesmyslné výsledky (viz spolehlivost každé součástky 99,999 99%). I když se ve fázi matematizace reálného problému zpravidla nelze vyhnout jistému zjednodušení, musíme být při „zanedbávání" velmi opatrní (postup řešení navržený v [1] byl příliš „velkorysý“).

1. Je nesmyslné domnívat se, že všechny součástky jsou stejně důležité, tj. selhání libovolné z nich má za následek havárii celého raketoplánu (např. u auta je také porucha elektrického stahování okna nepříjemná, ale není příčinou havárie).

2. Zanedbání několikanásobného jištění je velký omyl, vždyť to je tam právě z toho důvodu, aby vzrostla celková spolehlivost přístroje.

3. Nedomníváme se na rozdíl od výsledku v [1], že spolehlivost raketoplánu 82% je přijatelná.

Mimochodem problematika sestrojení dostatečně spolehlivého přístroje z méně spolehlivých součástek zajímá techniky i teoretiky již desítky let [2]. V současnosti se s problematikou zvýšení spolehlivost či zabezpečení nějakého systému běžně setkáváme – navzájem nezávislé brzdové soustavy u automobilu, zakruhování počítačových sítí, záložní zdroje elektrického proudu v nemocnici, atd.

Co říci závěrem? Je zřejmé, že každý dobrý učitel se snaží svým studentům probíranou látku co nejvíce přiblížit, či ukázat na využití právě nabytých poznatků v praktickém životě. Učitel angličtiny to má snadné. Pro učitele matematiky je tento úkol o to těžší, že řada poznatků nachází jen velmi obtížně bezprostřední uplatnění v reálném životě. Osobně se domnívám, že je lepší ukázat méně aplikací a matematicky přesně než přesvědčovat žáky o tom, kde všude lze matematiku použít a postupovat matematicky nesprávně nebo řešit pseudoreálné úlohy. V počtu pravděpodobnosti, tak jak je vykládán na střední škole si bohatě vystačíme s mincemi, kostkou, ruletou, kartami, sportkou a jinými náhodnými hrami, na kterých lze studentům velmi dobře demonstrovat zákonitosti pravděpodobnostního uvažování. Mnoho takových problémů, úloh a otázek lze nalézt např. v [3].

Literatura

[1] Mazurek J., O pravděpodobnosti třikrát jinak, *Učitel matematiky* **17**(2), 2009, 99–103.

[2] Moore, E., Shannon, C.E., *Reliable circuits using less reliable relays*, J. Franklin Inst. 262, 191–208, 281–297.

[3] Płocki, A., Tlustý, P., *Pravděpodobnost a statistika pro začátečníky a mírně pokročilé*, Prometheus, Praha, 2007.

[4] Zpravodaj ministerstva životního prostředí, XII (10), Praha 2002.

[5] http://www.chmi.cz/ www stránky Českého hydrometeorologického ústavu

Prof. RNDr. Pavel Tlustý, CSc.
Katedra matematiky PeF JČU
Jeronýmova 10
371 15, České Budějovice
e-mail: tlusty@pf.jcu.cz

Prof. zw. Dr. hab. Adam Plocki
Szkola Wyższa
im. Pawla Włodkowica v Płocku
09-402 Płock
Al. Kilińskiego 12, Polsko