Ladislav Beran; Milan Trch
Egyptské zápisy zlomků IV. Obtížně vyjádřitelné zlomky

Učitel matematiky, Vol. 18 (2010), No. 4, 208–215

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150510

EGYPTSKÉ ZÁPISY ZLOMKŮ IV

(Obtížně vyjádřitelné zlomky)

LADISLAV BERAN, MILAN TRCH

V předcházejících článcích o egyptských zápisech zlomků bylo ukázáno, že každé kladné racionální číslo je možné zapsat součtem konečného počtu po dvou různých kmenových zlomků. V tomto článku ukážeme, že pro libovolné přirozené číslo n vždy existuje nekonečně mnoho kladných racionálních čísel menších než jedna, která nelze vyjádřit součtem méně než n kmenových zlomků.

Budeme-li chtít využít egyptských zápisů zlomků ke zpestření výuky, nebude možné vyjadřovaná čísla volit libovolně. Vždy bude nutné předem bedlivě zvážit, zda je možné příslušné zlomky vyjádřit v reálném čase.

Vyjádření racionálních čísel součtem kmenových zlomků

Kmenovým zlomkem se rozumí každý zlomek $\frac{1}{q}$, kde q je přirozené číslo $q > 1$. Libovolný součet konečného počtu n kmenových zlomků, kde $1 < n$, představuje nějaké kladné racionální číslo r.

Součet konečného počtu racionálních čísel nezávisí na jejich pořadí ani na jejich uzávorkování. Proto je možné každý součet n po dvou různých kmenových zlomků uspořádat tak, že jsou tyto zlomky seřazeny postupně zleva doprava od největšího kmenového zlomku k nejmenšímu.

Egyptským zápisem kladného racionálního čísla r je každý součet n po dvou různých kmenových zlomků $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}$, pro který platí $r = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}$. Bude-li pro přirozená čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zároveň platit $1 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, pak je příslušný egyptský zápis racionálního čísla r jednoznačně určen uspořádanou n-ticí přirozených čísel $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Pro racionální číslo r budeme dále rozumět *egyptským vyjádřením řádu n* právě uspořádanou n-tici přirozených čísel $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, pro kterou platí $1 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$ a zároveň $r = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$.

Množinu všech takových uspořádaných n-tic pro dané racionální číslo r budeme značit symbolem $V_n(r)$. Symbolem $V(r)$ budeme značit sjednocení množin $V_n(r)$ pro všechna přirozená čísla $n > 1$.

Odhady racionálních čísel součtem různých kmenových zlomků

Jestliže pro racionální číslo r existují přirozená čísla k, b_1, b_2, $\dots$, b_k taková, že $1 < b_1 < b_2 < \dots < b_k$ a zároveň $\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_k} < r$, pak součet $\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_k}$ nazveme *k-tým dolním odhadem* egyptského typu *čísla* r. O uspořádané k-tici přirozených čísel $(b_1, b_2, \dots, b_k)$ budeme říkat, že určuje příslušný k-tý dolní odhad čísla r.

Jestliže pro racionální číslo r existují přirozená čísla m, c_1, c_2, $\dots$, c_m taková, že $1 < c_1 < c_2 < \dots < c_m$ a zároveň $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \dots + \frac{1}{c_m} > r$, pak nazveme součet $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \dots + \frac{1}{c_m}$ *n-tým horním odhadem* egyptského typu *čísla* r. O uspořádané m-tici přirozených čísel $(c_1, c_2, \dots, c_m)$ budeme říkat, že určuje příslušný m-tý horní odhad čísla r.

Pro každé přirozené číslo n platí $\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \dots + \frac{1}{2^n+2^n} > 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$. Součet dostatečného počtu po sobě jdoucích kmenových zlomků $\frac{1}{k}, \frac{1}{k+1}, \dots, \frac{1}{k+n}$ proto může být vždy větší než předem dané kladné reálné číslo r pro libovolné přirozené číslo k. Proto platí následující věta:

Věta 1. *Pro každé přirozené číslo k a reálné číslo $r > \frac{1}{k}$ existuje přirozené číslo n takové, že platí $\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{k+n-1} < r \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{k+n}$.*

Předpokládejme, že pro kladné racionální číslo r a přirozená čísla $k, a_1, a_2, \ldots, a_k$ taková, že $1 < a_1 < a_2 < \cdots < a_k$, platí $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k} < r$. Potom také rozdíl $r - \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} - \ldots \frac{1}{a_k}$ představuje kladné racionální číslo s. Zvolíme-li libovolně přirozené číslo b tak, aby $a_k < b$, potom podle uvedené věty existuje přirozené číslo m takové, že $\frac{1}{b} + \frac{1}{b+1} + \ldots \frac{1}{b+m} < s \leq \frac{1}{b} + \frac{1}{b+1} + \ldots \frac{1}{b+m} + \frac{1}{b+m+1}$.

Bude-li $s = \frac{1}{b} + \frac{1}{b+1} + \cdots + \frac{1}{b+m} + \frac{1}{b+m+1}$, lze číslo r zapsat součtem po dvou různých kmenových zlomků ve tvaru $(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k}) + (\frac{1}{b} + \frac{1}{b+1} + \ldots \frac{1}{b+m} + \frac{1}{b+m+1})$.

Bude-li platit $s < \frac{1}{b} + \frac{1}{b+1} + \cdots + \frac{1}{b+m} + \frac{1}{b+m+1}$, potom bude platit nerovnost $0 < s - \frac{1}{b} - \frac{1}{b+1} - \cdots - \frac{1}{b+m} < \frac{1}{b+m+1}$. Pak existují přirozená čísla $n, c_1, c_2, \ldots, c_n$ tak, že $b + m + 1 < c_1 < c_2 < \cdots < c_n$ a $t = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \cdots + \frac{1}{c_n}$. To znamená, že racionální číslo r lze zapsat součtem po dvou různých kmenových zlomků ve tvaru $(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k}) + (\frac{1}{b} + \frac{1}{b+1} + \cdots + \frac{1}{b+m} + \frac{1}{b+m+1}) + (\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \cdots + \frac{1}{c_n})$. Tím je dokázána následující věta:

Věta 2. *Pro každé přirozené číslo $k > 1$ a libovolný z k-tých dolních odhadů čísla r, který je určen uspořádanou k-ticí $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, existují přirozená čísla $n, b_{k+1}, b_{k+2}, \ldots, b_{k+n}$ taková, že platí $a_k < b_{k+1} < b_{k+2} < \cdots < b_{k+n}$ a $r = \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_k} + \frac{1}{b_{k+1}} + \cdots + \frac{1}{b_{k+n}}$.*

Z každého dolního odhadu kladného racionálního čísla r lze doplněním konečného počtu po dvou různých kmenových zlomků vytvořit egyptský zápis daného čísla r.

Součty po sobě jdoucích kmenových zlomků a odhady racionálních čísel

Předpokládejme, že $n > 1$ je přirozené číslo a r je libovolné kladné racionální číslo. Potom buď platí nerovnost $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \frac{1}{n+1} < r$, anebo existuje alespoň jedno přirozené číslo $m \geq 2$ takové, že platí $\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{m+n} < r$.

Ve druhém případě existuje mezi takovými přirozenými čísly $m \geq 2$ nejmenší přirozené číslo s touto vlastností. To znamená, že pro daná čísla $n > 1$ a r pak existuje jednoznačně určené přirozené číslo k takové, že platí $\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots \frac{1}{k+n} < r \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \dots \frac{1}{k+n-1}$.

Řekneme, že k-tý dolní odhad racionálního čísla r určený uspořádanou k-ticí $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ *není nasycený*, jestliže platí jedna z následujících dvou podmínek:

(i) $1 < a_1 - 1$ a zároveň $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots \frac{1}{a_k} < \frac{1}{a_1 - 1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_l} < r$,

(ii) existuje index $1 < i \leq k$ tak, že $a_{i-1} < a_i - 1$ a zároveň $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots \frac{1}{a_k} < \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_{i-1}} + \frac{1}{a_i - 1} + \frac{1}{a_{i+1}} + \dots + \frac{1}{a_k} < r$.

Pokud neplatí ani jedna z těchto podmínek, budeme říkat, že k-tý dolní odhad racionálního čísla r určený uspořádanou k-ticí $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ *je nasycený*. Není-li k-tý dolní odhad čísla r určený uspořádanou k-ticí $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ nasycený, potom ho lze nahradit alespoň jedním přesnějším k-tým dolním odhadem racionálního čísla r. Proces postupného sycení dolních odhadů ale nelze provádět bez omezení. Po konečně mnoha krocích vždy musí vést k dolnímu odhadu daného čísla, který je nasycený.

Bude-li m-tý dolní odhad čísla r určený uspořádanou k-ticí $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ nasycený, potom musí pro přirozené číslo a_1 platit podmínka $a_1 \leq k$. V opačném případě by totiž uspořádaná m-tice $(k, k+1, \dots, k+m-1)$ určovala horní odhad racionálního čísla r a zároveň m-tý dolní odhad součtu m kmenových zlomků $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_m}$.

Racionální čísla obtížně vyjádřitelná součty kmenových zlomků

Pro součet dvou různých kmenových zlomků platí: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$. Proto nelze racionální číslo $\frac{5}{6} < r < 1$ zapsat součtem dvou různých kmenových zlomků.

Příklad 1. *Ukažte, že existuje nekonečně mnoho racionálních čísel $0 < r < 1$, která nelze zapsat součtem tří po dvou různých kmenových zlomků.*

Řešení: Snadno ověříme, že pro součet tří po sobě jdoucích kmenových zlomků platí nerovnost: $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{1}{5}=\frac{19}{20}<1<\frac{13}{12}=\frac{1}{2}+$ $+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$.

(i) Platí-li pro dolní odhad racionálního čísla 1 určený uspořádanou trojicí (a_1, a_2, a_3) nerovnost $3 \leq a_1 < a_2 < a_3$, pak také platí: $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3} \leq \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5} < 1$.

To znamená, že každý z takových dolních odhadů určený trojicí (a_1, a_2, a_3) lze v tomto případě nahradit přesnějším odhadem $(3, 4, 5)$. Protože $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{19}{20}$, není dolní odhad čísla 1 určený trojicí $(3, 4, 5)$ nasycený a je možné ho nahradit přesnějším dolním odhadem, který je určen trojicí $(2, 4, 5)$.

Proto se dále omezíme pouze na dolní odhady čísla 1 určené trojicí (a_1, a_2, a_3), pro které je $2 \leq a_1 < 3$. Tuto podmínku splňuje jedině přirozené číslo $a_1 = 2$.

(ii) Bude-li $(2, a_2, a_3)$ libovolný z dolních odhadů racionálního čísla 1, pak dvojice (a_2, a_3) určuje dolní odhad zlomku $\frac{1}{2}$. V tomto případě však pro součty dvou po sobě jdoucích zlomků platí nerovnost $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{9}{20}<1<\frac{7}{12}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$.

Kdykoliv bude $4 \leq a_2$, pak bude platit $\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3} \leq \frac{1}{4}+\frac{1}{5} < \frac{1}{2}$, a proto bude $\frac{1}{2}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3} < 1$. Proto každý z takových dolních odhadů čísla 1 určený trojicí $(2, a_2, a_3)$ lze v tomto případě nahradit přesnějším dolním odhadem určeným trojicí $(2, 4, 5)$. Protože $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{31}{30}$, je dolní odhad čísla 1 určený trojicí $(2, 4, 5)$ nasycený.

Zbývá tedy prozkoumat případy, kdy dolní odhady určené trojicí $(2, a_2, a_3)$ splňují podmínku $2 < a_2 < 4$. Tuto podmínku však splňuje pouze přirozené číslo $a_2 = 3$.

(iii) Je-li ale $(2, 3, a_3)$ libovolný dolní odhad racionálního čísla 1, pak musí platit $3 < a_1$ a zároveň $\frac{1}{a_3} < \frac{5}{6}$. Odtud ihned plyne $a_3 \geq 7$. To opět znamená, že každý z takových dolních odhadů čísla 1 určený trojicí $(2, 3, a_3)$ lze v tomto případě nahradit přesnějším dolním odhadem určeným trojicí $(2,3,7)$. Protože $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{6}{6}$, je dolní odhad čísla 1 určený trojicí $(2,3,7)$ nasycený. Existují tedy pouze dva nasycené dolní odhady čísla 1, které jsou určeny trojicemi $(2,4,5)$ a $(2,3,7)$.

Protože $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{19}{20}<\frac{41}{42}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}$, platí pro libovolný součet tří po dvou různých kmenových zlomků $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\leq$ $\leq\frac{41}{42}$.

To znamená, že žádné racionální číslo $\frac{41}{42}<r<1$ nelze vyjádřit součtem tří po dvou různých kmenových zlomků.

Příklad 2. *Ukažte, že existuje pouze nekonečný počet nasycených dolních odhadů čísla* 1, *které jsou součtem čtyř různých kmenových zlomků, a najděte největší z nich.*

Řešení: Pro $n=4$ platí $\frac{19}{20}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}<1<\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=$ $=\frac{77}{60}$. Protože $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{67}{60}$, určuje čtveřice $(3,4,5,6)$ jeden z nasycených dolních odhadů čísla 1. Pro každý další nasycený dolní odhad určený čtveřicí (x_1,x_2,x_3,x_4) musí platit $1<x_1<3$, tedy $x_1=2$. Přitom uspořádaná trojice (x_2,x_3,x_4) určuje dolní odhad čísla $\frac{1}{2}$.

Pro $n=3$ a $\frac{1}{2}$ platí $\frac{73}{168}=\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}<\frac{1}{2}<\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}=\frac{107}{210}$. Pro nasycené dolní odhady určené čtveřicí $(2,x_2,x_3,x_4)$ platí podmínka $2<x_2<6$. Lze ověřit, že platí následující nerovnosti: $\frac{1}{2}+$ $+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}<1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{42}$ a $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{25}<1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{24}$; $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{19}<1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}$ a $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{16}<1=\frac{1}{2}+$ $+\frac{1}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$; $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{11}+\frac{1}{14}<1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}$.

Čtveřice $(2,3,7,43)$, $(2,3,8,25)$, $(2,3,9,19)$, $(2,3,10,16)$ a $(2,3,11,14)$ určují šest nasycených dolních odhadů čísla 1. Čtveřice $(2,3,12,13)$ určuje dolní odhad čísla 1, který není nasycený, protože platí $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}<\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}$.

Dále lze ověřit, že také platí: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{21}<1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{20}$ a $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{13}<1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$; $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{10}<1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}$

a $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9} < 1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$; $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8} < 1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$.

Čtveřice $(2,4,5,21)$, $(2,4,6,13)$, $(2,4,7,10)$, $(2,4,8,9)$ a $(2,5,6,8)$ určují zbývající nasycené dolní odhady čísla 1. Existuje tedy celkem dvanáct nasycených dolních odhadů čísla 1. Uspořádaná čtveřice $(2,3,7,43)$ určuje největší ze všech dolních odhadů čísla 1. Proto žádné racionální číslo r, pro které platí $\frac{1805}{1806} < r < 1$, není možné vyjádřit součtem nejvýše čtyř po dvou různých kmenových zlomků.

Závěr

To, co bylo dokázáno pro nasycené dolní odhady složené ze dvou, tří a čtyř kmenových zlomků, je možné dále zobecnit. Oba příklady poukazují na to, že pro každé přirozené číslo $n > 1$ a libovolné kladné racionální číslo r lze nahradit nekonečnou množinu $D_n(r)$ všech možných n-tých dolních odhadů racionálního čísla r konečnou množinou nasycených n-tých dolních odhadů racionálního čísla r. Proto mezi nasycenými dolními odhady kladného racionálního čísla $r < 1$ existuje n-tý dolní odhad, který má maximální hodnotu $m < r < 1$. Zkušenosti získané řešením úloh a existence maximálního n-tého dolního odhadu kladného racionálního čísla $r < 1$ umožňuje formulovat dva důležité poznatky.

(1) Každý dolní odhad libovolně daného racionálního čísla lze vždy doplnit vhodnými kmenovými zlomky tak, že vzniklý součet po dvou různých kmenových zlomků představuje jeden z možných egyptských zápisů daného racionálního čísla. Proto lze pro libovolné kladné racionální číslo nalézt nekonečně mnoho různých egyptských zápisů tohoto čísla. Množinu všech egyptských zápisů daného racionálního čísla není možné žádným konečným počtem konstrukcí vyčerpat.

(2) Pro každé přirozené číslo n existuje nekonečně mnoho racionálních čísel $r < 1$, která nebude nikdy možné vyjádřit součtem nejvýše n různých kmenových zlomků. To znamená, že existují *obtížně vyjádřitelná racionální čísla*, která nebude nikdy možné v daném čase vyjádřit součtem různých n kmenových zlomků.

Literatura

[1] Eves, H., *An Introduction to the History of Mathematics*, Saunders College Publishing, New York, 1990.

[2] Hejný, M., Zlomky, (Kapitola 20). In.: *Dvacet pět kapitol zdidaktiky matematiky*. Editoři: Hejný M., Novotná J., Stehlíková N., Univerzita Karlova – Pedagogická fakulta, Praha 2004, str. 343-356.

[3] Konforovič A. G., *Významné matematické úlohy*, SPN, Praha, 1989.

[4] Van Der Waerden, B.,L., *Probužďajuščajasa nauka*, (Matěmatika drevněvo Egypta, Vavilona i Greciji – ruský překlad), Gos. izd. fiz.-mat. litěratury, Moskva, 1959.

[5] Trch, M., Zapotilová, E., Graded set sof non-standard tasks in mathematic teaching, In.: *Proceeding ERCME 97*, eds. Hejný M. and Novotná J., Poděbrady, Charles University, Faculty of Education, 1997, p. 165–167.

[6] Beran, L., Trch, M., Egyptské zápisy zlomků I (Řešení neurčitých rovnic), *Učitel matematiky* **18**(2009), s. 28–35, JČMF Praha.

[7] Beran, L., Trch, M., Egyptské zápisy zlomků II (Postupné redukce zlomku), *Učitel matematiky* **18**(2010), s. 78–85, JČMF Praha.

[8] Beran, L., Trch, M., Egyptské zápisy zlomků III (Součty vhodných dělitelů), *Učitel matematiky* **18**(2010), s. 137–144, JČMF Praha.

Doc. RNDr. Ladislav Beran, DrSc.
Doc. RNDr. Milan Trch, CSc., Ph.D.
Katedra matematiky České zemědělské univerzity
Kamýcká 129, 165 21 Praha 6
e-mail: trch@tf.czu.cz