Petr Eisenmann
O jedné maturitní práci na rakouském gymnáziu

Učitel matematiky, Vol. 10 (2002), No. 2, 114–121

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150492

O JEDNÉ MATURITNÍ PRÁCI NA RAKOUSKÉM GYMNÁZIU

PETR EISENMANN

V roce 1998 jsem v rámci stáže na Přírodovědecké fakultě Univerzity Salzburg navštívil také tři gymnázia v Salzburgu a jeho okolí. V době mé návštěvy vrcholily přípravy písemných maturitních zkoušek z matematiky. V Rakousku nejsou, stejně jako doposud u nás, maturitní zkoušky z matematiky řízeny centrálně. Gymnázium je osmileté. Obvyklá dotace jsou 4 hodiny matematiky týdně v prvních sedmi letech studia a 3 hodiny týdně v posledním ročníku. Každý student musí absolvovat písemnou klauzuru z matematiky. Čas na vypracování je 240 minut. Při práci mají studenti k dispozici počítač. Následující zadání písemné maturitní práce pochází z jednoho salcburského reálného gymnázia.

1. Um die Ortschaft D, die an der geraden Straße durch $A = (0/4)$ und $B = (4/0)$ liegt, wird eine Umfahrung gebaut. Diese soll in A und B tangential in die alte Straße münden und durch den Punkt $C = (2/1)$ gehen. (Einheit: 1 km)
a) Suche eine Polynomfunktion p vom Grad 4, deren Graph den obigen Bedingungen entspricht.
b) Zeichne die Graphen von p und p im Intervall $[-2; 5]$. (Zeicheneinheit: 2 cm)
c) Erkläre im Zuge der Berechnung der Extrema und Wendepunkte von p die Zusammenhänge zwischen f, f' und f'' und begründe sie.
d) Die Straße führt durch Ackerland. Der gesamte Grund zwischen der neuen und der alten Straße soll abgelöst werden. Wieviele m^2 sind das?
e) Interpretiere das Ergebnis von d).

2. Beim Wachstum einer Population P wirken je Zeiteinheit (Monat) unter Beachtung einer jeweils vorhandenen Giftmenge G (Stoffwechselprodukte, Umweltverschmutzung, ...) folgende Einflüsse: Die Zunahme PZ ist proportional zu P mit dem Faktor z. Die Abnahme setzt sich aus zwei Komponenten $PA1$ und $PA2$ zusammen: $PA1$, die natürliche Abnahme, ist proportional zu P mit dem Faktor a, $PA2$ wird durch "Selbstvergiftung" hervorgerufen und ist proportional zum Produkt von P und G mit dem Faktor b. GZ, die Zunahme der Giftmenge, ist proportional zu P mit dem Faktor c.

a) Erstelle für das oben beschriebene Modell ein rekursives Gleichungssystem.

b) Formuliere dieses Modell in DERIVE, setze für $P0 = 1\,000G0 = = 0z = 0{,}3a = 0{,}1b = 0{,}001c = 0{,}01$. Führe 40 Interationsschritte durch und stelle die Entwicklung von P und G graphisch dar.

c) Beschreibe das Ergebnis der Simulation in Worten.

Zusatzpunkt(e): Kann durch Variation der Parameter ein grundsätzlich anderer Verlauf erreicht werden?

3. Bei einer Serienproduktion von Bauteilen von ca. 10 000 Stück pro Tag wird eine Stichprobe von 30 Stück entnommen und 4 defekte Bauteille festgestellt.

a) Ist die Zufallsvariable H: "Anzahl der defekten Stücke" binomialverteilt? - Begründe!

b) Ist H normalverteilt? - Begründe!

c) Berechne ein 95% - Konfidenzintervall für den relativen Anteil defekter Stücke unter Verwerdung der Binomialverteilung.

d) Berechne ein 95% - Konfidenzintervall für den relativen Anteil defekter Stücke unter Verwerdung der Normalverteilung.

e) Warum ist der Unterschied der Ergebnisse von c) und d) so gro?

f) Wie gro mu man die Stichprobe mindestens wählen, um ein 95% Konfidenzintervall der Länge 0,02 zu erhalten? Warum darf man hier mit der Normalverteilung rechnen?

4. Ein Autohaus unterbreitet für den Kauf eines Neuwagens folgendes Leasingangebot:

FREIBLEIBENDES PORSCHE
BANK LEASINGANGEBOT FÜR

Fahrzeugtype:	IE7334L2 Rabbit Cabrio el. Verdeck TDI 90 PS/66 KW, 5 - Gang - Getriebe
Farbe:	A1PA schwarz/schwarz
Polsterung:	47 Movie/schwarz
Fahrzeugpreis:	282.200,- inkl. 6% NOVA und 20% MWST.
Basispreis:	259.000,- inkl. 6% NOVA und 20% MWST.
Restwert:	90.304,- inkl. 6% NOVA und 20% MWST.
VZ - Depot	20.000,-
Kalkulationsbasisdauer:	60 Monate, Kilometerleistung: 20.000 km/Jahr

Restwertleasing: (Zinsen fix)
Leasingentgelt monatlich inkl. MWST. 4.092.00

a) Welchem effektiven Zinssatz p.a. entspricht dieses Leasingangebot? (Betrachte die Finanzierung durch Leasing als besondere Form eines Kredits!) Berechne den monatlichen Zinssatz auf 5 Dezimalstellen genau und stelle die Ergebnisse in einer Tabelle dar, gib allerdings das Computerprogramm, das Du verwendest, an!
b) Angenommen, Du nimmst einen Kredit bei einer Bank in der Höhe von 262 200,- mit 8,25% dekursiver Verzinsung, der Kredit soll nach 5 Jahren durch eine einmalige Zahlung zurückgezahlt werden. Au erdem verlangt die Bank eine einmalige Bearbeitungsgebühr in der Höhe von 2% der Kreditsumme, welche zu den Schulden hinzugerechnet wird. Wie hoch wäre dieser Rückzahlungsbetrag?
c) Bei Barzahlung gewährt die Autofirma 10% Rabatt. Welche Finanzierung wählst Du?

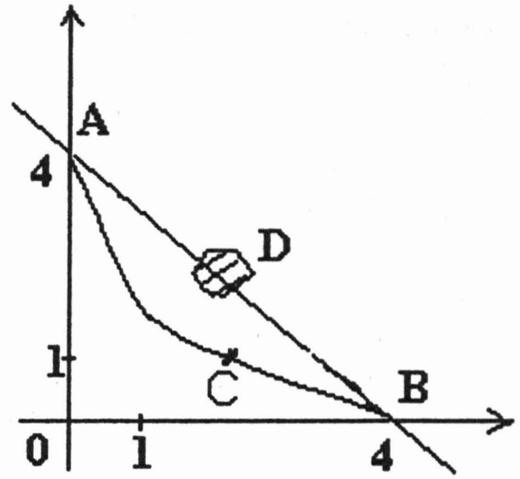
5. a) Wie ist a^n für $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ definiert? Gib Rechenregeln für Potenzen mit natürlichen Hochzahlen an und beweise eine davon.
b) Wie ist a^{-n} für $a \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}$ definiert? Gib Rechenregeln für Potenzen mit negativen Hochzahlen an und beweise eine davon.
c) Wie ist $a^{m/n}$ für $a \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{Z}$ definiert?
d) Wie ist der Logarithmus von b zur Basis a definiert? Gib Rechenregeln an und beweise eine davon.

★ ★ ★

1. Okolo obce D, která leží na přímé silnici mezi městy $A = (0/4)$ a $B = (4/0)$, se staví objížďka. Ta má procházet bodem $C = (2/1)$ a v A i B tečně ústit do staré silnice. (viz obrázek – jednotka délky: 1 km)

a) Najdi celistvou racionální funkci p stupně 4, jejíž graf odpovídá výše uvedeným podmínkám.

b) Nakresli grafy p a p' v intervalu $\langle -2, 5\rangle$. (Jednotka délky: 2 cm)



Obrázek 1

c) Vysvětli na základě výpočtu extrémů a inflexních bodů funkce p obecné souvislosti mezi f, f' a f'' a zdůvodni je.

d) Silnice vede polnostmi. Celý pozemek mezi starou a novou silnicí má být vykoupen. O kolik m^2 se jedná?

e) Interpretuj výsledek bodu d).

2. Při vývoji populace P působí vzhledem k přítomnému množství jedu G (produkty látkové přeměny, znečistění životního prostředí, ...) následující vlivy: Přírůstek PZ je přímo úměrný P s faktorem z. Úbytek sestává ze dvou činitelů: $PA1$, přirozený úbytek, je přímo úměrný P s faktorem a, $PA2$, vyvolávaný „samootravou", je přímo úměrný součinu P a G s faktorem b. GZ, přírůstek jedu, je přímo úměrný P s faktorem c.

a) Sestav pro výše popsaný model systém rekurentních rovnic.

b) Vyjádři tento model v programu DERIVE, dosaď $P0 = 1000$ $G0 = 0$ $z = 0{,}3$ $a = 0{,}1$ $b = 0{,}001$ $c = 0{,}01$. Proveď 40 iteračních cyklů a znázorni graficky vývoj P a G.

c) Popiš výsledek simulace slovy.

Může být změnou parametrů dosaženo zásadně jiného průběhu?

3. Při sériové výrobě stavebních dílů (cca 10 000 kusů za den) byl namátkově vybrán zkušební vzorek 30 kusů, v něm byly zjištěny

4 zmetky.
a) Má náhodná veličina H: *počet zmetků* binomické rozdělení? Zdůvodni!
b) Má H normální rozdělení? Zdůvodni!
c) Vypočti 95% interval spolehlivosti pro relativní podíl zmetků při použití binomického rozdělení.
d) Vypočti 95% interval spolehlivosti pro relativní podíl zmetků při použití normálního rozdělení.
e) Proč je rozdíl mezi výsledky bodů c) a d) tak velký?
f) Jak početný bychom museli volit zkušební vzorek, abychom dostali 95% interval spolehlivosti délky 0,02? Proč zde smíme počítat s normálním rozdělením?

4. Jeden prodejce aut předkládá pro nákup nového vozu následující lasingovou nabídku:

Typ vozu:	IE7334L2 Rabbit Cabrio, elektrické zatahování, TDI, 90 PS/66 KW, 5-stupňová převodovka
Barva:	A1PA černá/černá
Čalounění:	47 Movie/černá
Cena vozu:	282.200,- včetně. 6% NOVA a 20% DPH.
Základní cena:	259.000,- včetně 6% NOVA a 20% DPH.
Zbývající hodnota:	90.304,- včetně 6% NOVA a 20% DPH.
VZ - Depot	20.000,-
Základní kalkulovaná doba:	60 měsíců
Počet kilometrů:	20.000 km/rok
Leasing zbývající hodnoty:	(pevné úroky)
Splátka měsíčně vč. DPH.	4.092.00

a) Jaké efektivní úrokové míře odpovídá tato nabídka? (Považuj financování leasingem za zvláštní formu úvěru!) Vypočti měsíční úrokovou míru s přesností na 5 desetinných míst a vyjádři výsledky v tabulce. Uveď použitý počítačový program!
b) Předpokládejme, že si vezmeš u jisté banky úvěr ve výši 262 200,- s úrokovou mírou 8,25%. Tento úvěr má být po 5 letech jednorázově splacen. Kromě toho banka požaduje poplatek za zpracování ve výši 2% úvěru. Jak vysoká by byla tato celková splátka?
c) Při platbě v hotovosti poskytuje prodejce aut 10% slevu. Jaké financování zvolíš?

5. a) Jak je definováno a^n pro $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$? Napiš pravidla pro počítání s přirozenými exponenty a dokaž jedno z nich.
b) Jak je definováno a^{-n} pro $a \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}$? Napiš pravidla pro počítání se zápornými exponenty a dokaž jedno z nich.
c) Jak je definováno $a^{m/n}$ pro $a \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{Z}$?
d) Jak je definován logaritmus čísla b při základu a? Napiš pravidla pro počítání s logaritmy a dokaž jedno z nich.

Předložená práce se na naše poměry odlišuje hned několika znaky. Svým rozsahem, který odpovídá 240 minutám poskytovaným na vypracování, svým charakterem, kdy čtyři úlohy z pěti jsou aplikační, svým zaměřením na matematickou analýzu a pravděpodobnost, i tím, že pro řešení většiny úloh je nezbytný či alespoň užitečný počítač.

Je zřejmé, že ani vynikající student 4. ročníku českého gymnázia by u této maturitní zkoušky neuspěl. Učivo potřebné ke zvládnutí 2. a 3. úlohy se na našich středních školách neprobírá. Ve středoškolské matematice v Rakousku mají pravděpodobnost, statistika a aplikace diferenciálního a integrálního počtu značný prostor. (Menší pozornost se naopak věnuje například analytické geometrii či řešení rovnic a nerovnic.) Úloha č. 1 je sice pro české studenty gymnázií, kteří prošli ve čtvrtém ročníku kursem základů diferenciálního a integrálního počtu, principielně řešitelná, její úplné řešení je však bez použití počítače zdlouhavé a především úloha sama je pro naše studenty velmi neobvyklá. Uspokojivé splnění bodů c) a e) navíc vyžaduje jistou zkušenost v hledání souvislostí a interpretování matematických modelů. Čeští studenti nejsou zvyklí ani na opačnou, první fázi řešení problému – matematizaci reálné situace. Vytáhnout všechny potřebné údaje, vhodně je uspořádat a použít, to vše vyžaduje úspěšné řešení úlohy č. 4. Pouze poslední, pátá úloha je podobná otázkám u našich maturit z matematiky.

Podobný charakter mají maturitní práce v Rakousku přibližně posledních pět let. Jsou reakcí na učební plány gymnaziální matematiky zavedené na začátku posledního desetiletí. V nich se klade důraz na to, aby „die Schüler im Zusammenhang mit dem Erwerb von mathematischen Wissen und Können auch Fähigkeiten im Darstellen und Interpretieren, Argumentieren und exakten Arbeiten, produktiven geistigen Arbeiten, kritischen Denken und Anwenden von Mathematik erwerben." (cit. z komentáře k učebnímu plánu matematiky pro gymnázia vydaného spolkovým ministerstvem školství v roce 1991).

Při diskusích s našimi středoškolskými učiteli matematiky na didaktických seminářích či letních školách matematiky slýcháme většinou z jejich strany souhlas s těmito akcenty výuky matematiky na střední škole, ale jedním dechem zároveň dodávají – kde na to máme vzít čas? My stěží stačíme to, co se od nás ze strany studentů, jejich rodičů i našich ředitelů především očekává – připravit studenty k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy. A tam se tradičně většinou vyžadují standardní středoškolské úlohy, jejichž postupy řešení se pak v hodinách matematiky posledního ročníku gymnázia, v seminářích, přípravných kursech trénují.

Je nutné při této diskusi upozornit na dvě zásadní odlišnosti podmínek vzdělávání v Rakousku a České republice. Tou první je podstatně lepší vybavenost rakouských gymnázií počítačovou technikou a daleko větší využití počítačů ve výuce matematiky než u nás. (Na gymnáziu, ze kterého pochází uvedená maturitní práce, se studenti v hodinách matematiky ve 3. a 4. ročníku poměrně důkladně seznámili s programem DERIVE a uměli jej používat). Druhým zásadním rozdílem je to, že v Rakousku se nedělají až na výjimky žádné přijímací zkoušky na vysoké školy. Oba dva uvedené rozdíly vyplývají z odlišné ekonomické situace obou zemí a budou se teprve postupně a pomalu smazávat.

Patrně každý středoškolský učitel bude souhlasit s tím, že počítačů by na středních školách mělo být víc a do jisté míry i s tím, že šanci studovat na vysoké škole by mělo dostat více uchazečů. Změnit to však příliš nemůže. Na co však obec učitelů matematiky vliv má, jsou učební plány, maturitní práce a přijímací zkoušky na vysoké školy. A proto tedy v závěru svého příspěvku pokládám tuto otázku: Do jaké míry se ztotožňujeme s cíly například výše uvedených rakouských učebních plánů, do jaké míry chceme posílit podíl aplikačních, mimomatematických problémů ve školské matematice a do jaké míry chceme změnit tradiční charakter maturitních a přijímacích zkoušek z matematiky?

Paed. Dr. Petr Eisenmann, CSc.
Katedra matematiky UJEP
České mládeže 8
400 96 Ústí nad Labem
e-mail: EisenmannP@pf.ujep.cz

★ ★ ★

Archimedův zákon

EMIL CALDA

Těleso jsem do nádoby
ponořil,
očím svým jsem ale vůbec
nevěřil,
neb nebylo nadnášeno
žádnou silou,
i když bylo obklopeno
kapalinou.
Brzy jsem však na ten důvod
přišel:
O těleso šlo reálných
čísel!