Učitel matematiky

Jaromír Šimša

K rozkladu mnohočlenů bez reálných kořenů

Učitel matematiky, Vol. 10 (2002), No. 1, 13–24

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150473`

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2002

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://dml.cz`

K ROZKLADU MNOHOČLENŮ BEZ REÁLNÝCH KOŘENŮ

Jaromír Šimša

1. Začněme poněkud nevážně krátkou historkou s hádankou. V hodině matematiky v sextě gymnázia ve městě N napsal jednou jeden roztržitý profesor na tabuli výraz

$$x^4 + x + 1 \tag{1}$$

a zeptal se přítomných žáků, zda někdo dokáže tento mnohočlen čtvrtého stupně, který nemá v oboru reálných čísel žádný kořen, rozložit na součin mnohočlenů nižšího stupně. Protože se nikdo z žáků ani po minutě napjatého ticha nepřihlásil, chopil se profesor opět křídy s cílem, že kýžený rozklad předvede na tabuli sám. Po první úpravě se však dostal do nesnází, protože mnohočlen zadal nepozorně. Jakou „maličkost" ve výrazu (1) opomenul?

Ti z čtenářů, kteří algebru mnohočlenů někdy na gymnáziích podle dostupných příruček učili, vědí, že učitel z úvodní historky patrně „zapomněl" při zápisu (1) na jeden exponent. Chtěl nejspíše napsat mnohočlen $x^4 + x^2 + 1$ a rozložit ho obratem, při kterém se nejprve dvojčlen $x^4 + 1$ doplní členem $2x^2$ na čtverec $(x^2 + 1)^2$ a poté se celý mnohočlen rozloží na součin podle vzorce pro $A^2 - B^2$:

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 + 1 &= (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = \\ &= (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1). \end{aligned}$$

Mnohočlen $x^4 + x^2 + 1$ je touto procedurou v učebnicích algebry „proslaven". Stejným trikem lze rozložit na součin i jiný, často uváděný mnohočlen $x^4 + 1$:

$$\begin{aligned} x^4 + 1 &= (x^4 + 2x^2 + 1) - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = \\ &= (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1). \end{aligned}$$

Mnohočlen (1) však tímto postupem rozložit nelze:

$$x^4+x+1=(x^4+2x^2+1)-2x^2+x=(x^2+1)^2-(2x^2-x)=???,$$

kde otazníky naznačují naši bezradnost: dvojčlen $2x^2-x$ totiž není druhou mocninou žádného mnohočlenu. Vzniká tedy otázka, zda nelze rozklad mnohočlenu (1) získat jinými algebraickými úpravami. Posoudíme ji právě v tomto příspěvku[1]. I když budeme pracovat s jediným mnohočlenem (1), poznatky a výsledky, ke kterým dospějeme, a postupy, které uplatníme, lze se zřejmou obměnou využít při hledání rozkladu jakéhokoliv mnohočlenu čtvrtého stupně s reálnými koeficienty, který nemá žádný reálný kořen.[2]

2. Rozklad mnohočlenu x^4+x+1 nejdříve posoudíme „teoreticky“. Především poznamenejme, že zkoumaný mnohočlen nemá žádný reálný kořen, neboť platí

$$x^4+x+1>0 \quad \text{pro každé reálné číslo } x. \tag{2}$$

Tato nerovnost je zřejmá v případě, kdy $x \geq 0$, a rovněž v případě, kdy $x \leq -1$: tehdy totiž platí $x^4+x=x(x^3+1) \geq 0$, a proto $x^4+x+1 \geq 1$. Nerovnost (2) tedy zbývá dokázat pro $x \in (-1,0)$, pro takové hodnoty x ovšem z nerovností $x>-1$ a $0<x^3+1<1$ plyne nerovnost $x(x^3+1)>-1$, odkud vychází $x^4+x+1=x(x^3+1)+1>0$. Podle *základní věty algebry* má proto mnohočlen x^4+x+1 v oboru komplexních čísel dvě dvojice komplexně sdružených kořenů $\alpha_1+i\beta_1$, $\alpha_1-i\beta_1$, $\alpha_2+i\beta_2$ $\alpha_2-i\beta_2$ s nenulovými imaginárními částmi $\pm\beta_1$, $\pm\beta_2$. V oboru mnohočlenů s komplexními koeficienty tak platí rozklad

$$x^4+x+1=(x-\alpha_1-i\beta_1)(x-\alpha_1+i\beta_1)(x-\alpha_2-i\beta_2)(x-\alpha_2+i\beta_2).$$

[1]Odpověď najdete v závěrečné Poznámce 14 pod čarou. V článku však odpovíme i na jiné otázky, zejména ty, které souvisí s řešením kubických rovnic.

[2]Jak víme, mnohočlen $P(x)$ s kořenem $x=a$ můžeme rozložit podle *Bezoutovy věty* na součin $P(x)=(x-a)Q(x)$; přitom činitel $Q(x)$ určíme známým algoritmem jako výsledek dělení $P(x):(x-a)$.

Vynásobením komplexně sdružených činitelů podle vzoru

$$(x-\alpha-i\beta)(x-\alpha+i\beta)=(x-\alpha)^2+\beta^2$$

dostaneme rozklad původního mnohočlenu ve tvaru

$$x^4+x+1=[(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2]\cdot[(x-\alpha_2)^2+\beta_2^2],$$

který přepíšeme jako součin kvadratických trojčlenů

$$x^4+x+1=(x^2+Ax+B)\cdot(x^2+Cx+D) \tag{3}$$

s reálnými koeficienty A, B, C a D určenými vzorci

$$A=-2\alpha_1,\ B=\alpha_1^2+\beta_1^2,\ C=-2\alpha_2,\ D=\alpha_2^2+\beta_2^2.$$

Činitelé x^2+Ax+B a x^2+Cx+D, které začneme v následujícím odstavci „prakticky" hledat, mají pochopitelně záporné diskriminanty, neboť jejich kořeny jsou komplexní čísla $\alpha_1 \pm i\beta_1$ resp. $\alpha_2 \pm i\beta_2$. Poznamenejme ještě, že výpočet koeficientů A, B, C, D by bylo možné uskutečnit cestou, kterou jsme „teoreticky" právě prošli, totiž určením (komplexních) kořenů rovnice čtvrtého stupně $x^4+x+1=0$. Jak si totiž z kurzu vyšší algebry pamatujeme, kořeny algebraických rovnic stupně nejvýše 4 lze vyjádřit z jejich koeficientů pomocí konečného počtu aritmetických operací $+$, $-$, $\times$, $:$ a operace odmocňování $\sqrt[n]{\ }$. Většina z nás si ovšem detailní způsob řešení rovnic stupně 4 nepamatuje (proč taky), k dobré „osvětové výbavě" středoškolského učitele matematiky by však měla patřit vědomost, že *zmíněné operace vedoucí k vyjádření kořenů rovnic stupňů 3 a 4 je často nutné provádět v komplexním oboru*, poněkud překvapivě i v těch případech, kdy koeficienty rovnice i její kořeny jsou reálná čísla. Tento fenomén (známý z historie řešení kubických rovnic v Itálii 16. století[3]) se velmi výrazně projeví i při našem pokusu „obejít" komplexní čísla

[3]Její podrobný popis najdete ve stati J. Bečváře *Algebra v 16. a 17. století* ze sborníku J. Bečvář, E. Fuchs (ed.): *Matematika v 16. a 17. století*, edice Dějiny matematiky, sv. 12, Prometheus, Praha 1999.

při výpočtu rozkladu (3) metodou neurčitých koeficientů, ke které nyní přistoupíme.

3. Součin hledaných trojčlenů z pravé strany (3) je roven

$$\begin{aligned}&(x^2 + Ax + B) \cdot (x^2 + Cx + D) =\\ &= x^4 + (A + C)x^3 + (AC + B + D)x^2 + (AD + BC)x + BD,\end{aligned}$$

takže jde o rozklad našeho mnohočlenu $x^4 + x + 1$, právě když jsou reálná čísla A, B, C, D řešením soustavy rovnic

$$A + C = 0, \quad AC + B + D = 0, \quad AD + BC = 1, \quad BD = 1. \tag{4}$$

Neznámé C a D odtud snadno vyjádříme pomocí A a B vzorci

$$C = -A, \quad D = \frac{1}{B} \tag{5}$$

a pro neznámé A a B nám pak „zůstane“ soustava rovnic

$$-A^2 + B + \frac{1}{B} = 0, \quad \frac{A}{B} - AB = 1,$$

kterou upravíme do tvaru

$$B + \frac{1}{B} = A^2, \quad B - \frac{1}{B} = -\frac{1}{A} \tag{6}$$

(zřejmě totiž $A \neq 0$). Sečtením a odečtením posledních dvou rovnic dostaneme

$$B = \frac{1}{2}\left(A^2 - \frac{1}{A}\right) \quad \text{a} \quad \frac{1}{B} = \frac{1}{2}\left(A^2 + \frac{1}{A}\right). \tag{7}$$

Vynásobením těchto rovnic obdržíme

$$1 = B \cdot \frac{1}{B} = \frac{1}{2}\left(A^2 - \frac{1}{A}\right) \cdot \frac{1}{2}\left(A^2 + \frac{1}{A}\right) = \frac{1}{4}\left(A^4 - \frac{1}{A^2}\right).$$

Pro neznámou A tak vychází rovnice

$$1 = \frac{1}{4}\left(A^4 - \frac{1}{A^2}\right), \quad \text{neboli} \quad A^6 - 4A^2 - 1 = 0.$$

Číslo $T = A^2$ je tedy *kladný* kořen kubické rovnice[4]

$$t^3 - 4t - 1 = 0. \tag{8}$$

Řešení soustavy čtyř rovnic (4) jsme tak převedli na řešení jediné rovnice (8). I jiné postupy řešení vedou ke „kubické" úloze; například pro neznámou B vychází reciproká rovnice šestého stupně[5]

$$B^6 - B^4 - B^3 - B^2 + 1 = 0, \tag{9}$$

kterou lze odvodit z následujícího důsledku rovností (6):

$$1 = A^2 \cdot \left(\frac{1}{A}\right)^2 = \left(B + \frac{1}{B}\right) \cdot \left(B - \frac{1}{B}\right)^2.$$

4. Přistupme nyní k řešení kubické rovnice (8). Nejdříve však ukažme, že (hledaný) kladný kořen rovnice (8) je jediný. K tomuto účelu přepišme rovnici (8) do tvaru

$$f(t) = t, \quad \text{kde} \quad f(t) = \frac{4}{t} + \frac{1}{t^2}.$$

---

[4]Uvědomte si, že v rozkladu (3) na pořadí činitelů $(x^2 + Ax + B)$ a (x^2+Cx+D) nezáleží. Proto rovnici odvozenou pro koeficient A musí splňovat i koeficient C. Je to skutečně tak: zjistili jsme totiž, že platí rovnost $C = -A$, neboli $C^2 = A^2$, proto se hodnota nové neznámé $T = A^2$ při záměně A za C nezmění. Ze vzorců (6) je dobře vidět, že při výměně čísel A a C se vymění i (navzájem převrácená) čísla B a D.

[5]Přívlastek *reciproká* (jak asi dobře víte) znamená, že jakákoliv dvě navzájem převrácená čísla buď nejsou kořeny, nebo jsou kořeny téže násobnosti dané rovnice. V naší situaci je to v souladu se zaměnitelností koeficientů B a D a jejich vazbou $BD = 1$. Reciproká rovnice (9) se standardně převede na kubickou rovnici pro novou neznámou $B + 1/B$, což je v našem označení hodnota A^2, tedy kladný kořen T rovnice (8). Zjišťujeme tak, že obě úlohy pro izolované neznámé A a B jsou v podstatě totožné, i když nejsou vazby (6) mezi A a B lineární. Bez řešení kubické rovnice se tedy při řešení soustavy rovnic (4) patrně neobejdeme.

Pravá strana rovnice $f(t) = t$ je v intervalu $t \in (0, \infty)$ *rostoucí* identická funkce $t \mapsto t$, zatímco levá strana $t \mapsto f(t)$ je tam zřejmě *klesající*. Proto má rovnice $f(t) = t$ v intervalu $(0, \infty)$ nejvýše jeden kořen. Z nerovností

$$f(2{,}1) = \frac{940}{441} = 2{,}13\cdots > 2{,}1 \quad \text{a} \quad f(2{,}2) = \frac{245}{121} = 2{,}02\cdots < 2{,}2$$

pak podle *věty o mezihodnotách spojité funkce* vyplývá, že naše rovnice $f(t) = t$ má skutečně jediný kladný kořen a tento kořen přitom leží mezi čísly 2,1 a 2,2. Dodejme, že obdobně lze zdůvodnit poznatek, který využijeme později k metodické poznámce: rovnice (8) má (kromě jednoho kladného kořene) ještě dva záporné kořeny, které leží mezi čísly $-1{,}9$ a $-1{,}8$, respektive mezi čísly $-0{,}3$ a $-0{,}2$.[6]

K rovnici (8) nyní uplatníme metodu řešení kubických rovnic $t^3 + pt + q = 0$, která vede k tzv. Cardanovým vzorcům. Domníváme se, že hlavní myšlenka této metody je natolik elegantní a průzračná, že stojí za zapamatování (na rozdíl od komplikovaných výsledných vzorců, které lze v případě potřeby rychle vyhledat ve vhodné příručce). Nápad vychází z toho, že kořen kubické rovnice (8) najdeme ve tvaru součtu dvou vhodných čísel u a v:

$$t = u + v. \tag{10}$$

Každé číslo t lze ovšem zapsat jako součet $u + v$ nekonečně mnoha způsoby; vybereme z nich ten, při kterém po dosazení do (8) dostaneme pro čísla u a v co nejjednodušší rovnici. Protože platí

$$t^3 = (u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v),$$

po dosazení do rovnice (8) dostáváme vztah

$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) - 4(u + v) - 1 = 0,$$

[6] Platí $f(-1{,}9) \doteq -1{,}83$, $f(-1{,}8) \doteq -1{,}91$, $f(-0{,}3) \doteq -2{,}22$ a $f(-0{,}2) = 5$.

který přepíšeme takto:

$$u^3 + v^3 + (3uv - 4)(u + v) - 1 = 0.$$

Vybereme-li proto čísla u, v ve vyjádření $t = u+v$ tak, aby se výraz $3uv - 4$ rovnal nule, dostaneme „krátkou“ rovnici $u^3 + v^3 - 1 = 0$. Zjišťujeme tak, že součet $t = u+v$ je řešením rovnice (8), splňují-li čísla u, v soustavu rovnic

$$3uv = 4, \qquad u^3 + v^3 = 1. \tag{11}$$

Brzy se bohužel přesvědčíme, že žádná dvojice *reálných* čísel (u, v) není řešením soustavy (11). Pozitivní je však skutečnost, že soustavu (11) lze nahradit jedinou kvadratickou rovnicí, budeme-li místo čísel u a v uvažovat jejich třetí mocniny, tedy čísla $z_1 = u^3$ a $z_2 = v^3$. Tato čísla podle (11) splňují podmínky

$$z_1 + z_2 = 1 \quad \text{a} \quad z_1 \cdot z_2 = (uv)^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3,$$

takže to jsou kořeny kvadratické rovnice

$$z^2 - z + \left(\frac{4}{3}\right)^3 = 0.$$

Snadno se přesvědčíme, že diskriminant této rovnice je záporný a její kořeny $z_{1,2}$ jsou komplexně sdružená čísla

$$z_{1,2} = \frac{1}{2} \pm i \cdot \sqrt{\frac{229}{108}}.$$

Od vypočtených čísel $z_1 = u^3$ a $z_2 = v^3$ se vrátíme odmocněním k číslům u, v. Nejprve zapíšeme komplexní čísla $z_{1,2}$ v *goniometrickém* tvaru; protože platí

$$|z_1| = |z_2| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{229}{108}} = \sqrt{\frac{64}{27}} = \frac{8}{3\sqrt{3}} = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3,$$

mají čísla $z_{1,2}$ vyjádření

$$z_1 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3 \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad z_2 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3 \cdot (\cos\varphi - i\sin\varphi),$$

kde číslo $\varphi \in (0, \pi/2)$ je dáno vzorcem

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{8}{3\sqrt{3}}}\right) = \arccos\frac{3\sqrt{3}}{16}. \tag{12}$$

Podle *Moivreovy poučky* teď vypíšeme hodnoty $u = \sqrt[3]{z_1}$ a $v = \sqrt[3]{z_2}$. Kterou ze tří (komplexních) hodnot každé z obou odmocnin však v naší situaci vybrat? Vzpomeňme si, že komplexní čísla u a v musí mít díky podmínce $3uv = 4$ navzájem opačné argumenty[7]; musí tedy platit

$$\begin{aligned} u &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{3}\right)\right], \\ v &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{3}\right)\right], \end{aligned} \tag{13}$$

kde φ je dáno vzorcem (12) a k je vhodné celé číslo. Vzorce (13) nám poskytují obecné řešení (u, v) soustavy rovnic (11) v komplexním oboru.[8] Různá řešení ovšem dostaneme jen například pro hodnoty $k = 0, 1, 2$, odpovídající kořeny $t = u + v$ kubické rovnice (8) jsou reálná čísla

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{4\sqrt{3}}{3}\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right), \quad t_2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi}{3}\right), \\ t_3 &= \frac{4\sqrt{3}}{3}\cos\left(\frac{\varphi + 4\pi}{3}\right). \end{aligned} \tag{14}$$

---

[7]Při našem postupu jsme rovnici $3uv = 4$ vlastně zaměnili rovnicí $(3uv)^3 = 4^3$, která s původní rovnicí není *v oboru komplexních čísel* ekvivalentní. Kdybychom obě hodnoty u, v třetích odmocnin z čísel z_1, z_2 vybrali nezávisle, platila by pouze obecnější rovnost $3uv = 4\sqrt[3]{1}$.

[8]Doporučujeme provést přímou zkoušku dosazením čísel (13) do obou rovnic (11).

5. Dříve než se od Cardanovy metody definitivně vrátíme k naší původní úloze o rozkladu (3), zhodnoťme průběh celého řešení rovnice (8) i jeho výsledek. Přestože[9] má kubická rovnice (8) tři reálné kořeny, neobešli jsme se při jejich výpočtu bez komplexních čísel. Tyto kořeny bychom mohli zapsat v „konečném algebraickém" tvaru, kdyby mezi „povolené" operace patřila i třetí odmocnina z komplexního čísla. Místo odmocnin z komplexních čísel jsme využili obvyklejší (avšak „nealgebraický") prostředek – goniometrické a cyklometrické funkce. Postavme se však nyní na pozice „ryzích" algebraiků a zkoumejme otázku, zda můžeme hodnoty třetích odmocnin z komplexního čísla $a + ib$ (tedy tři čísla, která souhrnně označujeme symbolem $\sqrt[3]{a+ib}$) vyjádřit pomocí aritmetických operací (včetně operace $\sqrt[3]{}$), když je budeme provádět pouze v oboru reálných čísel vycházejíce z daných čísel a a b (reálné a imaginární části odmocňovaného čísla $a+ib$). Přesněji řečeno, jde nám o takové vyjádření reálných čísel x a y z rovnosti $a + ib = (x + iy)^3$. Je jasné, že při řešení takového úkolu se můžeme omezit na případ, kdy odmocňované číslo $a+ib$ je komplexní jednotka. Předpokládejme tedy, že daná reálná čísla a, b splňují podmínku

$$a^2 + b^2 = 1 \tag{15}$$

a pokusme se algebraicky vyjádřit reálná čísla x a y, pro která platí

$$a + ib = (x + iy)^3. \tag{16}$$

Protože $(x+iy)^3 = (x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3)$, je komplexní rovnice (16) ekvivalentní se soustavou dvou reálných rovnic

$$a = x^3 - 3xy^2 \quad \text{a} \quad b = 3x^2y - y^3. \tag{17}$$

Izolované rovnice pro jednotlivé neznámé x a y nejsnáze dostaneme, když do obou rovnic (17) dosadíme ze vztahu $x^2 + y^2 = 1$,

---

[9]Spojka *přestože* není příliš na místě. Platí totiž, že reálný kořen kubické rovnice (s reálnými koeficienty) lze vyjádřit Cardanovými vzorci bez komplexních čísel, právě když ostatní dva kořeny této rovnice jsou nereálná (komplexně sdružená) čísla. Znamená to, že u žádné kubické rovnice s třemi reálnými kořeny se bez komplexních čísel při užití Cardanových vzorců neobejdeme (tzv. případ *casus irreducibilis*).

který[10] plyne z podmínky (15) a následujícího důsledku rovnic (17):

$$\begin{aligned}a^2+b^2 &= (x^3-3xy^2)^2+(3x^2y-y^3)^2 = \\ &= (x^6-6x^4y^2+9x^2y^4)+(9x^4y^2-6x^2y^4+y^6) = \\ &= x^6+3x^4y^2+3x^2y^4+y^6=(x^2+y^2)^3.\end{aligned}$$

Po zmíněném dosazení dostaneme rovnice

$$a=x^3-3x(1-x^2) \quad \text{a} \quad b=3(1-y^2)y-y^3,$$

které po úpravě vypadají takto:

$$4x^3-3x-a=0 \quad \text{a} \quad 4y^3-3y+b=0. \tag{18}$$

Jsou to dvě obdobné kubické rovnice, ve kterých reálné parametry a, b probíhají podle (15) interval $\langle -1,1\rangle$.[11] Je proto lhostejno, kterou z rovnic (18) zkusíme řešit Cardanovou metodou. Protože jsme ji již dříve podrobně popsali při řešení rovnice (8), budeme nyní stručnější. Číslo $x=u+v$ je řešení první rovnice (18), splňují-li čísla u, v soustavu dvou rovnic

$$4uv=1, \quad u^3+v^3=\frac{a}{4},$$

podle které jsou čísla $z_1=u^3$ a $z_2=v^3$ kořeny kvadratické rovnice

$$z^2-\frac{a}{4}\cdot z+\frac{1}{4^3}=0,$$

tedy čísla

$$z_{1,2}=\frac{a\pm\sqrt{a^2-1}}{8}=\frac{1}{8}\left(a\pm i\sqrt{1-a^2}\right)=\frac{1}{8}(a\pm ib).$$

[10] I když vztah $x^2+y^2=1$ v textu zdůvodňujeme, uvědomte si, že jde o známé pravidlo „odmocnina z komplexní jednotky je komplexní jednotka."

[11] V „goniometrickém" přepisu vedou rovnice (18) ke vzorcům $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ a $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$.

Vidíme, že čísla $z_{1,2}$ jsou bohužel komplexní; k algebraickému vyjádření čísel

$$u = \sqrt[3]{z_1} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{a+ib} \quad \text{a} \quad v = \sqrt[3]{z_2} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{a-ib}$$

potřebujeme algebraický tvar odmocniny $\sqrt[3]{a+ib}$, kvůli kterému jsme vlastně rovnici (16) začali řešit. Dostali jsme se do situace, kterou obvykle nazýváme „bludným kruhem". Je to významný signál (ne však exaktní důkaz[12]) toho, že *třetí odmocninu z obecného komplexního čísla $a+ib$ nelze z čísel a, b vypočítat konečným počtem aritmetických operací (včetně odmocňování) v oboru reálných čísel.* Dodejme, že jinak to dopadá s algebraickým výpočtem druhé odmocniny: je-li $a+ib$ libovolné komplexní číslo a $b \neq 0$, pak obě hodnoty $\sqrt{a+ib}$ jsou určeny vzorcem[13]

$$\sqrt{a+ib} = \pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \cdot \left(1 + \frac{ib}{a+\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

6. Dokončeme nyní řešení původního úkolu vypočítat koeficienty A, B, C, D z rozkladu (3). V první části řešení jsme ukázali, že číslo $T = A^2$ je kladný kořen rovnice (8), tedy jedno z čísel t_1, t_2 a t_3 zapsaných v (14). Zřejmě se jedná o číslo t_1 (přibližné hodnoty všech tří kořenů jsou $t_1 \doteq 2{,}115$, $t_2 \doteq -2{,}272$ a $t_3 \doteq -0{,}254$), takže platí $A^2 = t_1$, odkud s přihlédnutím k (12) a (14) dostáváme výsledné vyjádření neznámého koeficientu A:

$$A = \frac{2}{\sqrt[4]{3}} \cdot \sqrt{\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{3\sqrt{3}}{16}\right)} \tag{19}$$

[12]Neposoudili jsme totiž otázku, zda kořeny kubické rovnice $x^3+px+q=0$ nelze algebraicky vyjádřit jinak než Cardanovými vzorci.

[13]Přesvědčete se o tom sami řešením rovnice $a+ib = (x+iy)^2$. Osvojíte-li si tuto metodu výpočtu druhých odmocnin, dokážete vyřešit jakoukoliv kvadratickou rovnici $pz^2+qz+r=0$ s komplexní neznámou z a komplexními koeficienty p, q, r pomocí klasického vzorce s odmocninou z diskriminantu.

(s ohledem na symetrii obou činitelů v rozkladu (3) a podmínku $A+C=0$ můžeme předem předpokládat, že platí $A>0$ a $C<0$). Pomocí vzorce (19) a dříve uvedených rovností

$$C=-A, \quad B=\frac{1}{2}\left(A^2-\frac{1}{A}\right), \quad D=\frac{1}{B}$$

lze získat obdobná výsledná vyjádření pro koeficienty B, C, D.[14] Nebudeme je zde vypisovat, místo toho uvedeme poměrně přesná zaokrouhlení všech čtyř nalezených koeficientů, jaká lze snadno získat na běžně vybaveném počítači:

$$\begin{aligned} A &\doteq 1{,}454\,272\,169, \qquad & B &\doteq 0{,}713\,639\,174,\\ C &\doteq -1{,}454\,272\,169, \qquad & D &\doteq 1{,}401\,268\,368. \end{aligned}$$

Vynásobíme-li trojčleny x^2+Ax+B a x^2+Cx+D s koeficienty rovnými uvedeným desetinným číslům, vyjde nám mnohočlen

$$x^4+5\cdot 10^{-10}x^2+(1-5\cdot 10^{-10})x+(1+3\cdot 10^{-10})$$

(po zaokrouhlení koeficientů v řádu 10^{-10}).

Za podnět k sepsání příspěvku děkuji panu redaktoru *Dagovi Hrubému.* Rozhodně není oním roztržitým profesorem z úvodní historky, může však za to, že na stránkách *Učitele* byl podroben rozkladu právě mnohočlen x^4+x+1.

Doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc.
Katedra matematiky PřF MU
Janáčkovo nám. 2a, 662 95 Brno
email: simsa@ipm.cz

[14]Přítomnost cyklometrické funkce v těchto vyjádřeních a metodické úvahy z části 5 článku naznačují, že mnohočlen x^4+x+1 nelze rozložit na součin dvou kvadratických trojčlenů žádnými ryze algebraickými úpravami.