Učitel matematiky

Dag Hrubý
Přímka v Gaussově rovině (1)

Učitel matematiky, Vol. 19 (2011), No. 2, 81–88

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150355

PŘÍMKA V GAUSSOVĚ ROVINĚ (1)

DAG HRUBÝ

Cílem článku je ukázat na souvislosti mezi analytickou geometrií v rovině a komplexními čísly. Občas ve škole s kolegy diskutuji, zda je vhodnější vyložit nejdříve komplexní čísla a potom probírat analytickou geometrii nebo naopak. Osobně se přikláním ke druhé uvedené možnosti, tj. nejdříve zařadit analytickou geometrii a potom komplexní čísla. Absolvent kurzu analytické geometrie je podle mého názoru schopen s větším porozuměním interpretovat například pojem vzdálenosti v Gaussově rovině. Mám na mysli například interpretaci zápisu $|u - v|$, kde $u, v \in \mathbb{C}$ nebo hledání všech komplexních čísel, které splňují rovnici $|z - a| = r$, kde $a, z \in \mathbb{C}, r \in \mathbb{R}$. Podobných úloh bychom našli celou řadu.

Tyto úlohy mám rád, protože představují výše zmíněnou syntézu mezi analytickou geometrií a komplexními čísly, umožňují vidět a vnímat souvislosti. Dovedete si představit tu radost učitele, kdyby se po zápisu výrokové formy $|z - 1| + |z + 1| = 4$ na tabuli ozval ve třídě student a řekl, že se jedná o elipsu s ohnisky $[-1; 0]$, $[1; 0]$ a hlavní poloosou $a = 2$.

Obsahem výše uvedeného odstavce je, stručně řečeno, vztah mezi pravoúhlou soustavu souřadnic v rovině a rovinou komplexních čísel, stručně nazývanou Gaussovou rovinou. Vědět, že obraz komplexního čísla $z = x + yi$ v Gaussově rovině odpovídá bodu $A[x, y]$ o souřadnicích x, y v pravoúhlé soustavě souřadnic je pro učitele povinnost, pro studenty gymnázia je to objevování souvislostí, které přinášejí radost. Bohužel, v důsledku probíhající kurikulární reformy, abych se vyjádřil fundovaně, se na řadě středních škol stanou komplexní čísla popelkou a na řadě škol nebudou probírána vůbec.

Nyní se pokusím dát předcházejícím úvahám pevnější rámec. Připomeňme si, že je-li dáno komplexní číslo $z = x + yi$, pak číslo $\overline{z} = x - yi$ nazýváme číslem komplexně sdruženým k číslu z. Pomocí čísel $z, \overline{z}$ je možné zavést komplexní souřadnice. Potom bude možné vytvořit analytickou geometrii v Gaussově rovině. Následující rovnice představují příslušnou transformaci.

$$\begin{aligned} z &= x + y\mathrm{i} \\ \overline{z} &= x - y\mathrm{i} \end{aligned}$$

Odtud snadno plyne

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \\ y &= \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \overline{z}) \end{aligned}$$

Je-li nyní v kartézské soustavě souřadnic v rovině $\mathbb{E}^2$ dán útvar s analytickým vyjádřením

$$F(x, y) = 0,$$

získáme výše uvedenou transformací do komplexních souřadnic rovnici

$$F\left(\frac{1}{2}(z + \overline{z}), \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \overline{z})\right),$$

která charakterizuje daný útvar v Gaussově rovině $\mathbb{G}$.

Úloha 1. V $\mathbb{E}^2$ je dána rovnice přímky $x + y + 1 = 0$. Najděte vyjádření dané přímky v komplexních souřadnicích.

Řešení: Po dosazení $x = \frac{1}{2} \cdot (z + \overline{z})$, $y = \frac{1}{2\mathrm{i}} \cdot (z - \overline{z})$ postupně dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(z + \overline{z}) + \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \overline{z}) + 1 &= 0 \\ (z + \overline{z}) - \mathrm{i}(z - \overline{z}) + 2 &= 0 \\ (1 + \mathrm{i})\overline{z} + (1 - \mathrm{i})z + 2 &= 0 \end{aligned}$$

Úloha 2. V $\mathbb{E}^2$ je dána rovnice přímky $ax + by + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Najděte vyjádření dané přímky v komplexních souřadnicích.

Řešení: Po dosazení $x = \frac{1}{2} \cdot (z + \overline{z})$, $y = \frac{1}{2\mathrm{i}} \cdot (z - \overline{z})$ postupně dostáváme

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} a \cdot (z + \overline{z}) + \frac{1}{2\mathrm{i}} b \cdot (z - \overline{z}) + c &= 0 \\
\frac{1}{2} az + \frac{1}{2} a\overline{z} + \frac{1}{2} bz - \frac{1}{2\mathrm{i}} b\overline{z} + c &= 0 \\
\frac{1}{2}(a + b\mathrm{i})\overline{z} + \frac{1}{2}(a - b\mathrm{i})z + c &= 0
\end{aligned}
$$

Tuto rovnici můžeme napsat v jednodušším tvaru. Dosadíme-li

$$\alpha = \frac{1}{2}(a + b\mathrm{i}),\ \overline{\alpha} = \frac{1}{2}(a - b\mathrm{i}),$$

dostáváme rovnici ve tvaru

$$\alpha\overline{z} + \overline{\alpha}z + c = 0$$

Úloha 3. V $\mathbb{G}$ je dána rovnice přímky $(1 - \mathrm{i})\overline{z} + (1 + \mathrm{i})z + 2 = 0$. Najděte vyjádření dané přímky v soustavě souřadnic v rovině $\mathbb{E}^2$.

Řešení: Po dosazení $z = x + y\mathrm{i}$ máme

$$
\begin{aligned}
(1 - \mathrm{i}) \cdot (x - y\mathrm{i}) + (1 + \mathrm{i})(x + y\mathrm{i}) + 2 &= 0 \\
x - y + 1 &= 0
\end{aligned}
$$

Nyní si ukážeme, jak lze v $\mathbb{G}$ napsat parametrickou rovnici přímky. Jsou-li totiž v $\mathbb{G}$ dány body a, u, $u \neq 0$, můžeme bod u chápat jako vektor. Potom bod $z \in \mathbb{G}$ leží na přímce procházející bodem a a mající směrový vektor u právě tehdy, když

$$z - a = tu, \qquad t \in \mathbb{R}$$

Tak dostáváme parametrickou rovnici přímky v $\mathbb{G}$.

Úloha 4. V $\mathbb{G}$ je dán bod $a = 2 + 3i$ a vektor $u = 1 + i$. Napište parametrickou rovnici přímky, která prochází bodem a a má směrový vektor u.

Řešení: Po dosazení do rovnice $z - a = tu, qquadt \in R$ ihned dostáváme

$$z - (2 + 3i) = t(1 + i), \qquad t \in \mathbb{R}$$

V odpovídající úloze v $\mathbb{E}^2$ by bylo požadováno napsání parametrické rovnice přímky, která prochází bodem $A[2; 3]$ a má směrový vektor $\vec{u}(1; 1)$. Po dosazení do rovnice $X = A + t\vec{u}$ obdržíme hledanou rovnici

$$\begin{aligned} x &= 2 + t \\ y &= 3 + t, \qquad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Stejný výsledek získáme, pokud do rovnice $z - (2 + 3i) = t(1 + i)$, $t \in \mathbb{R}$ dosadíme $z = x + yi$. Obdržíme rovnost dvou komplexních čísel a porovnáme jejich reálné a imaginární složky.

Nyní můžeme v analogiích pokračovat a napsat rovnici přímky v $\mathbb{G}$, jsou-li dány dva body v Gaussově rovině. Nechť $z_1, z_2 \in \mathbb{G}, z_1 \neq z_2$. Pro směrový vektor přímky procházející body z_1, z_2 platí $u = z_2 - z_1$. Po dosazení do rovnice $z - a = tu$, $t \in R$ dostáváme

$$z - z_1 = t(z_2 - z_1), t \in RR$$

Úloha 5. V $\mathbb{G}$ jsou dány body $a = 2 - 4i$, $b = 5 + 2i$. Napište parametrickou rovnici přímky, která prochází body a, b.

Řešení: Rovnice přímky určené body a, b je

$$z - (2 - 4i) = t(3 + 6i), \quad \text{nebo} \quad z - (5 + 2i) = t(3 + 6i), t \in \mathbb{R}$$

Připomeňme si nyní geometrickou interpretaci násobení $v \cdot i$, $v \in \mathbb{C}$. Je-li $v = a + bi$, pak $v \cdot i = (a + bi) \cdot i = -b + ai$ a $|v| = |v\,i|$. Obraz komplexního čísla $v \cdot i$ je obrazem komplexního čísla v

v otočení o 90°. Pokud budeme chápat, ve smyslu zde budované teorie, komplexní číslo $v = a + bi$ za vektor, tak číslo $v \cdot \mathrm{i} = -b + ai$ je vektor kolmý k vektoru v. Této okolnosti můžeme využít pro napsání rovnice přímky v $\mathbb{G}$, která je určena bodem a normálovým vektorem. Je-li vektor v normálový vektor přímky, pak vektor $v \cdot \mathrm{i}$ je její směrový vektor. Nechť nyní $z_0, v \in \mathbb{G}, v \neq 0$. Rovnice

$$z - z_0 = t \cdot v \cdot \mathrm{i}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

je rovnicí přímky, která má normálový vektor v a prochází bodem z_0.

Úloha 6. Napište rovnici přímky, která je osou úsečky s krajními body $z_1, z_2 \in \mathbb{G}$.

Řešení: Osa dané úsečky je přímka, která má normálový vektor $v = z_2 - z_1$ a která prochází středem úsečky $s = \frac{1}{2} \cdot (z_1 + z_2)$. Její rovnice je tedy

$$z - s = t \cdot v \cdot \mathrm{i}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$z - \frac{1}{2} \cdot (z_1 + z_2) = t \cdot (z_2 - z_1) \cdot \mathrm{i}, t \in R$$

Dříve, než přistoupíme k dalšímu tvaru přímky v $\mathbb{G}$, připomeneme si kolmost vektorů v $\mathbb{E}^2$. Vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ jsou kolmé, právě když jejich skalární součin $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$ je roven nule, $u \perp v \iff \vec{u}\vec{v} = 0$. Abychom mohli zapsat odpovídající vztah pro vektory v $\mathbb{G}$, tak zavedeme symbol $Re(z)$, kterým budeme značit reálnou část komplexního čísla $z = x + yi$. Jsou-li nyní dány vektory $a, b \in \mathbb{G}, a \neq b$, platí

$$a \perp b \iff Re(a\bar{b}) = 0 \quad \text{nebo} \quad a \perp b \iff Re(\bar{a}b) = 0$$

Označíme-li $a = a_1 + a_2\mathrm{i}$, $b = b_1 + b_2\mathrm{i}$, pak platí

$$a\bar{b} = (a_1 + a_2\mathrm{i})(b_1 - b_2\mathrm{i}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + (a_2 b_1 - a_1 b_2)\mathrm{i}.$$

Pro $Re(a\bar{b})$ dostáváme $Re(a\bar{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2$. Nyní si ukážeme, že číslo $Re(a\bar{b})$ lze vyjádřit i jiným způsobem. Platí

$$Re(a\bar{b}) = \frac{1}{2}(\bar{a}b + a\bar{b})$$

Položíme-li $a = a_1 + a_2\mathrm{i}$, $b = b_1 + b_2\mathrm{i}$, dostáváme

$$\frac{1}{2}(\overline{a}b + a\overline{b}) = \frac{1}{2}[(a_1 - a_2\mathrm{i})(b_1 + b_2\mathrm{i}) + (a_1 + a_2\mathrm{i})(b_1 - b_2\mathrm{i})] =$$
$$= a_1b_1 + a_2b_2 = R(a\overline{b})$$

Nechť je nyní dána přímka určená bodem z_0 a normálovým vektorem v. Bod $z \in \mathbb{G}$, $z \neq z_0$ leží na této přímce právě když jsou vektory $z - z_0$ a v navzájem kolmé. Tuto podmínku kolmosti lze zapsat více způsoby, my zvolíme následující zápis

$$Re[(z - z_0)\overline{v}] = 0$$

S využitím výše uvedeného vztahu pro $R(a\overline{b})$ můžeme levou stranu rovnice rozepsat následovně

$$\frac{1}{2}\left[\overline{(z - z_0)}v + (z - z_0)\overline{v}\right] = 0$$
$$(\overline{z} - \overline{z_0})v + (z - z_0)\overline{v} = 0$$
$$v\overline{z} + \overline{v}z - v\overline{z}_0 - \overline{v}z_0 = 0$$

Položíme-li $\alpha = -v\overline{z}_0 - \overline{v}z_0$, získáme rovnici

$$v\overline{z} + \overline{v}z + \alpha = 0, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Tato rovnice se nazývá *normálový tvar rovnice přímky.* Ponecháme na čtenáři, aby si sám ověřil, že $\alpha \in \mathbb{R}$. Stačí vyjádřit z_0 a v v algebraickém tvaru a dosadit do dané rovnice. My ukážeme, že ke každému reálnému číslu α existuje komplexní číslo z_0 takové, že platí $\alpha = -v\overline{z}_0 - \overline{v}z_0$. V tomto případě stačí položit $z_0 = -\frac{\alpha}{2\overline{v}}, \overline{z}_0 = -\frac{\alpha}{2v}$. Potom platí

$$\alpha = -v\overline{z}_0 - \overline{v}z_0 = \frac{\alpha}{2\overline{v}}\overline{v} + \frac{\alpha}{2v}v = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha$$

Úloha 7. Napište v normálovém tvaru rovnici osy úsečky s krajními body $z_1, z_2 \in \mathbb{G}$.

Řešení: Rovnici osy úsečky budeme hledat ve tvaru $v\overline{z}+\overline{v}z+\alpha = 0$, $\alpha = -v\overline{z}_0 - \overline{v}z_0$. V našem případě položíme $z_0 = \frac{1}{2}\cdot(z_1 + z_2)$, kde z_0 je střed úsečky s krajními body z_1, z_2. Pro normálový vektor platí $v = z_2 - z_1$. Nyní vyjádříme α:

$$\alpha = -(z_2 - z_1)\cdot\left(\frac{\overline{z}_1 + \overline{z}_2}{2}\right) - (\overline{z}_2 - \overline{z}_1)\cdot\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) =$$
$$= z_1\overline{z}_1 - z_2\overline{z}_2 = |z_1|^2 - |z_2|^2.$$

Po dosazení do $v\overline{z} + \overline{v}z + \alpha = 0$ dostáváme rovnici osy úsečky

$$(z_2 - z_1)\,\overline{z} + (\overline{z}_2 - \overline{z}_1)\,z + |z_1|^2 - |z_2|^2 = 0.$$

Úloha 8. Napište rovnici osy úsečky s krajními body $0, 2 + \mathrm{i}$.

Řešení: Rovnici osy úsečky budeme hledat ve tvaru $v\overline{z} + \overline{v}z + \alpha = 0$. Pro normálový vektor platí $v = 2 + \mathrm{i} - 0 = 2 + \mathrm{i}$. Dále je $z_0 = \frac{2+\mathrm{i}+0}{2} = 1 + \frac{1}{2}\mathrm{i}$. Z rovnice $z_0 = -\frac{\alpha}{2\overline{v}}$ snadno vypočteme $\alpha = -5$. Rovnice hledané přímky je

$$(2 + \mathrm{i})\overline{z} + (2 - \mathrm{i})z - 5 = 0.$$

V obecnějším případě jde o úlohu napsat rovnici osy úsečky s krajními body 0, z_0. Pro normálový vektor platí $v = z_0, \overline{v} = \overline{z}_0$. Pro střed úsečky platí $s = \dfrac{z_0 + 0}{2} = \frac{1}{2}z_0$. Z rovnice $s = \frac{1}{2}z_0 = -\dfrac{\alpha}{2\overline{v}}$ dostáváme $\alpha = -|z_0|^2$. Rovnice osy úsečky s krajními body 0, z_0 má tvar

$$z_0\overline{z} + \overline{z}_0 z - |z_0|^2 = 0.$$

Úloha 9. Napište rovnici osy úsečky s krajními body $-2-\mathrm{i}, 2+\mathrm{i}$.

Řešení: Opět budeme vycházet z rovnice $v\overline{z} + \overline{v}z + \alpha = 0$. Pro normálový vektor platí $v = 2 + \mathrm{i} - (-2 - \mathrm{i}) = 4 + 2\mathrm{i}$. Dále je

$z_0 = \frac{2+i-2-i}{2} = 0$. Z rovnice $z_0 = -\frac{\alpha}{2\overline{v}}$ ihned plyne $\alpha = 0$. Rovnice přímky je

$$(4+2i)\overline{z} + (4-2i)z = 0.$$

Obecněji jde o úlohu napsat rovnici osy úsečky s krajními body $-z_0, z_0$. Pro normálový vektor platí $v = z_0 - (-z_0) = 2z_0$, $\overline{v} = -2\overline{z}_0$. Pro střed úsečky platí $s = \dfrac{z_0 - z_0}{2} = 0$. Z rovnice $s = \dfrac{1}{2}z_0 = -\dfrac{\alpha}{2\overline{v}}$ dostáváme $\alpha = 0$. Rovnice osy úsečky s krajními body $-z_0$, z_0 je

$$z_0\overline{z} + \overline{z}_0 z = 0.$$

Za domácí cvičení si můžete vyřešit následující úlohu.

Úloha 10. Je dána rovnice $a\overline{z}+bz+c = 0, a, b, c \in \mathbb{C}$. Určete nutné a postačující podmínky aby daná rovnice byla rovnicí přímky.

Literatura

[1] Ráb, M., *Komplexní čísla v elementární matematicee*, Masarykova univerzita Brno, 1996.

RNDr. Dag Hrubý
Gymnázium, A. K. Vitáka 452
569 43 Jevíčko
e-mail: hruby@gymjev.cz