Judita Piknerová

Matematika a hudba (2): Co je zvuk?

Učitel matematiky, Vol. 19 (2011), No. 2, 72–80

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150348

MATEMATIKA A HUDBA (2)

CO JE ZVUK?

JUDITA PIKNEROVÁ

Přenašečem hudebního sdělení je zvuk. Zvuk je mechanické vlnění (nebo-li chvění mechanických soustav) v látkovém prostředí, které je schopno vyvolat v lidském sluchový vjem. Frekvence takového vlnění se pohybuje v rozmezí mezi 16 a 20 000 Hz. Zvuky o frekvencích mimo toto rozpětí (infra-, ultrazvuky) člověk nevnímá. Ději, které jsou spojeny se vznikem zvuku, jeho šířením a vnímáním, se zabývá akustika. V širším smyslu lze za zvuk označovat i vlnění s frekvencemi mimo tento rozsah. V elektroakustice se jako zvukový signál označují i elektrické kmity odpovídající kmitům mechanickým. Chceme-li porozumět zvuku správně, musíme mít o tom kterém látkovém prostředí nějaké informace. Situace, kdy se bude zvuk šířit kapalinami nebo pevnými látkami, uvažovat nebudeme.

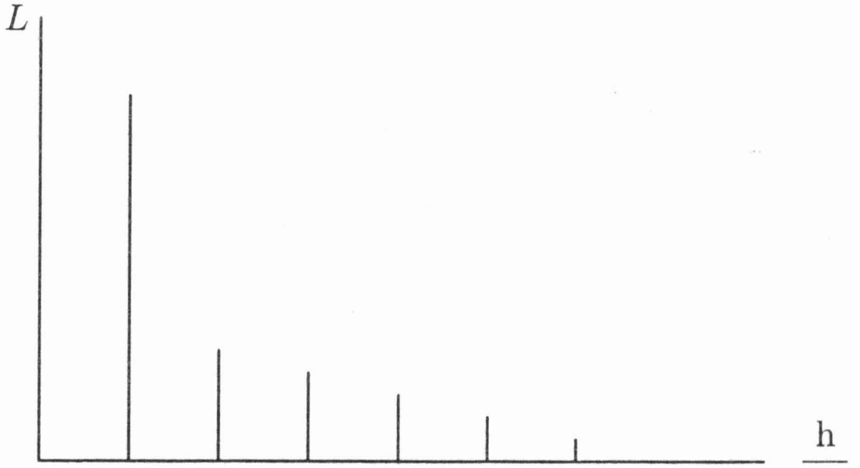
Vzduch je plyn a v plynném prostředí jsou molekuly vůči sobě vzdálenější než v látkovém prostředí kapalném nebo pevném. Rychlosti molekul v navzájem různém látkovém prostředí jsou nesrovnatelné, protože látkové prostředí určuje mimo vzdálenosti molekul i druh jejich pohybu. Rychlost molekul v daném prostředí zůstává konstantní a jejich vysoká rychlost současně s nízkou hmotností působí to, že jejich pohyb není ovlivňován tíhovou silou a každá molekula se pohybuje pouze ve svém okolí, jehož velikost závisí od vzájemné vzdálenosti molekul. Průměrná rychlost molekul vzduchu při pokojové teplotě za normálních podmínek je asi 450–500 metrů za sekundu. Vliv gravitace je pozorovatelný jen při stupňování tlaku vzduchu. S nižší nadmořskou výškou roste počet molekul, jejichž častější srážky způsobují vyšší tlak vzduchu. Když objekt vibruje, způsobuje větší vlny a tím tlak vzduchu snižuje. Zvukové vlny se ve vzduchu šíří podélně (v jiném látkovém prostředí je vlnění kombinací podélného i příčného). Zvuk prochází vzduchem rychlostí asi 340 metrů za sekundu, což znamená rychlost šíření lokální poruchy tlaku vzduchu.

Zvukové vlny mají čtyři hlavní atributy, které mají vliv na způsob, jakým jsou vnímány. Prvním z nich je **amplituda**, což znamená velikost vibrací, a je vnímána jako hlasitost. Amplituda typického každodenního zvuku je velmi pomíjena z hlediska fyzického posunutí, obvykle se jedná jen malý zlomek milimetr. Druhým atributem je **frekvence kmitání**, která odpovídá výšce zvuku. Třetím je **tvar frekvenčního spektra**, který udává barvu zvuku, a čtvrtým atributem je **délka trvání zvukového vlnění**.

V dalším budeme označovat písmeny f (resp. c) frekvenci kmitání (resp. amplitudu). Pak platí, že frekvence nejnižšího tónu je nejmenší a amplituda je u téhož tónu největší, tedy

$$f_1 < f_2 < f_3 < \dots,$$
$$c_1 > c_2 > c_3 > \dots.$$

Na obrázku je znázorněno frekvenční spektrum složeného tónu (tónu, jak jej slyšíme, tj. základního tónu s příslušnou řadou alikvotů), které ilustruje tyto vlastnosti.



Specifická barva tónu každého jednotlivého nástroje je pak určena různě intenzivním zastoupením jednotlivých tzv. alikvotních tónů v jeho zvuku. Například nástroje s ostřejším zvukem (trubka, pozoun) mají silnější liché alikvotní tóny, protože sudé alikvotní tóny dávají zvuku spíš teplo a měkkost. Každý tón je vlastně zvuk, kde se k jeho základní frekvenci přidružuje celá řada velmi tichých alikvotů. Uvedeme například počátek řady alikvotních tónů tónu C:

$$\mathrm{C},\ \mathrm{c},\ \mathrm{g},\ \mathrm{c}^1,\ \mathrm{e}^1,\ \mathrm{g}^1,\ \mathrm{b}^1,\ \mathrm{c}^2,\ \mathrm{d}^2,\ \mathrm{e}^2;\ \mathrm{fis}^2,\ \mathrm{g}^2,\ \mathrm{as}^2,\ \mathrm{b}^2,\ \mathrm{h}^2,\ \mathrm{c}^3.$$

Kmitočty jednotlivých tónů každé takové řady jsou dány poměrem celých čísel a vytvářejí tzv. *harmonickou řadu.* Člověk tedy nevnímá základní tón s jeho alikvotními tóny jako souzvuk, pouze na základě příslušného míšení alikvotních tónů rozezná barvu výsledného tónu. Pokaždé, když zní nějaký tón, je to proto, že rovnoměrně vibruje hmota nástroje (ozvučná deska, hlasivky atd). Výjimkou mezi nástroji je elektronický tónový generátor, který vibruje pouze na základní frekvenci, tedy na frekvenci tónu, který slyšíme. U ostatních nástrojů je tedy jejich korpus rozezníván ještě v celočíselných násobcích základní frekvence. Tyto násobky jsou frekvenční hodnoty alikvotních tónů. První alikvótní tón má dvojnásobnou frekvenci než základní tón, druhý trojnásobnou atd. Alikvotní tóny vytváří řadu, ve které jsou intervaly mezi jednotlivými tóny stále menší a menší (v hudebním názvosloví se jedná o intervaly: oktáva, kvinta, kvarta, velká tercie, malá tercie atd. až k sekundám a ještě menším intervalům) a postupují teoreticky do nekonečna. To je důsledek faktu, že lidské ucho vnímá zvuk v podstatě logaritmicky.

Každá další oktáva má dvojnásobnou frekvenci. Řekneme-li, že dva tóny jsou od sebe vzdáleny n oktáv, číslo které tuto vzdálenost vyjadřuje, je 2^n. Frekvence oktáv tedy rostou exponenciálně (v mocninách), kdežto frekvence alikvotních tónů rostou pouze lineárně (v násobcích). Aritmetika hudebních intervalů zahrnuje velmi přirozenou cestu k teorii logaritmů. Hudební teoretici intuitivně pracovali s logaritmy dlouho předtím, než byl logaritmus definován jako abstraktní matematický pojem. (V sedmnáctém století uvedl do hudební teorie logaritmy formálně Isaac Newton, poté Leonhard Euler a Jacques Lambert.) Pythagoras definoval celý tón jako rozdíl mezi intervaly kvintou a kvartou. Velikost celého tónu však není rozdíl $\frac{3}{2} - \frac{4}{3}$, ale podíl $\frac{3}{2} : \frac{4}{3} = \frac{9}{8}$. Teorie hudebních intervalů je příkladem praktického využití logaritmů a je snadno vysvětlována i dětem.

Pojmy hlasitost, výška zvuku, barva a délka nejsou z různých důvodů přesné. Definice frekvence se ztíží díky tomu, že se většina vibrací neskládá pouze z jediné frekvence. Dále by všechny výše uvedené atributy měly být definovány ve vztahu k vnímání zvuku a ne z hlediska zvuku. Tak například vnímaná výška zvuku může představovat frekvenci, která ve tvaru vlny ve skutečnosti přítomna není. Tento jev je součástí předmětu nazývaného **psychoakustika.**

Nyní se budeme zabývat, jaký je význam sinových vln při vnímání výšky zvuku. Odpověď dává diferenciální rovnice pro jednoduchý harmonický pohyb, kterou budeme diskutovat dále.

Uvažme předmět o hmotnosti m podřízený síle F směrem k rovnovážné poloze, $y = 0$, jehož velikost je úměrná vzdálenosti y od rovnovážné polohy,

$$F = -ky,$$

kde k je konstanta. Z Newtonových pohybových zákonů získáme rovnici

$$F = m \cdot a,$$

kde

$$a = \frac{d^2y}{dt^2}$$

je zrychlení předmětu a t představuje čas. Sloučením těchto rovnic obdržíme diferenciální rovnici druhého řádu

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{ky}{m} = 0$$

Nahradíme-li zlomek $\dfrac{d^2y}{dt^2}$ výrazem y'', dostáváme

$$y'' + \frac{ky}{m} = 0$$

Řešením této rovnice je funkce

$$y = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$$

Skutečnost, že právě tato funkce je řešením dané diferenciální rovnice, vysvětluje, proč jsou základem harmonické analýzy periodických vln vlny sinové a ne jiné pravidelně oscilující vlnění. Představme si napnutou strunu upevněnou za oba konce. Rozechvějeme-li ji, pak každý nestacionární bod lze popsat právě výše uvedenou rovnicí

$$y = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right).$$

Upevníme-li strunu ve středu (resp. v jedné třetině), budou poloviny (resp. třetiny) struny kmitat vždy navzájem v opačném směru a podobně bude nestacionární body určovat rovnice

$$y = A\cos\left(2\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + B\sin\left(2\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$$

$$\left(\text{resp. } y = A\cos\left(3\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + B\sin\left(3\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)\right).$$

Obecně bude každá rozechvěná struna kmitat současně všemi násobky přirozené frekvence s různými amplitudami (stupni hlasitosti) a rovnice pohybu bodu na struně je

$$y = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\left(n\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + B_n\sin\left(n\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)\right).$$

Jak je možné, že struna vibruje současně s vícero frekvencemi, vysvětlují Fourierovy řady a rovnice vlnění.

V závislosti na frekvenci f, maximální amplitudě c a fázi vlnění φ obdržíme sinus ve tvaru

$$\cos x = \sin(2\pi f\,t + \varphi).$$

Veličina $\omega = 2\pi f$ se nazývá *úhlová rychlost.* Počáteční úhel φ slouží k určení průsečíků sinusové vlny s časovou osou. Protože

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

je kosinová vlna rovna vlně sinové s odlišnou fází. Tento tvar sinové vlny lze upravit na lineární kombinaci sinů a kosinů pomocí standardních vzorců, tedy

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$
$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

Odtud dostáváme

$$c \cdot (\omega t + \varphi) = a \cos \omega t + b \sin \omega t,$$

kde

$$a = c \sin \varphi, \qquad b = c \cos \varphi.$$

Z výše uvedených rovností lze dospět k zápisu průběhu zvuku v podobě, která se používá ve fyzice, tj.

$$y = c_1 \sin(2\pi f_1 t) + c_2 \sin(2\pi f_2 t) + \cdots + c_n \sin(2\pi f_n t).$$

Ve fyzice mají značný význam periodické funkce. Jejich vyjádření však není příliš vhodné pro další použití. Jedná se např. o časový průběh napětí ve tvaru obdélníku, který lze popsat výše uvedeným předpisem. Takový graf z hlediska matematiky ani není funkcí, neboť v bodech, kde je funkce vytvořena kolmicemi k ose x, má nekonečně mnoho funkčních hodnot.

Výpočet koeficientů c_i pro $i = 1, 2, \ldots, n$ vychází z matematické metody, kterou objevil francouzský matematik a fyzik Jean-Baptiste Joseph Fourier. Metoda se nazývá Fourierova analýza. Její pomocí lze zapsat libovolnou periodickou funkci právě ve tvaru

$$y = c_1 \sin(2\pi f_1 t) + c_2 \sin(2\pi f_2 t) + \ldots .$$

Jednotlivé koeficienty lze spočítat pomocí integrálního počtu nebo numericky.

Dále nás bude zajímat, co bude znít, když bude současně znít sinová i kosinová vlna. Budou-li tedy například dva tóny ležící velmi blízko u sebe znít současně, uslyšíme pulzace. Odpověď se nachází v rovnostech

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$
$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B.$$

Hodnoty $\sin(A-B)$ a $\cos(A-B)$ lze získat z těchto rovnic dosazením $-B$ za B, přičemž platí $\sin(-B) = -\sin B$, $\cos(-B) = \cos B$, odkud dostáváme

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$
$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B.$$

Sečteme rovnice pro výpočet $\sin(A+B)$ a $\sin(A-B)$, tedy

$$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2 \sin A \cos B,$$

což lze přepsat do tvaru

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2} \cdot (\sin(A+B) + \sin(A-B)).$$

Podobně získáme součet a rozdíl hodnot $\cos(A+B)$ a $\cos(A-B)$, tj.

$$\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2 \cos A \cos B$$
$$\cos(A-B) - \cos(A+B) = 2 \sin A \sin B,$$

neboli

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} (\cos(A+B) + \cos(A-B))$$
$$\sin A \sin B = \frac{1}{2} (\cos(A-B) - \cos(A+B))$$

Toto nám umožňuje napsat každý součin sinů a kosinů jako součet nebo rozdíl sinů a kosinů.

Nás však právě zajímá opačný proces, položme tedy $u = A+B$ a $v = A - B$ a vyřešíme tyto rovnice pro A a B, tj.

$$A = \frac{1}{2} \cdot (u + v)$$
$$B = \frac{1}{2} \cdot (u - v)$$

Dosazením do výše uvedených rovnic pro výpočet $\sin(A + B) + \sin(A - B)$, $\cos(A + B) + \cos(A - B)$ a $\cos(A - B) - \cos(A + B)$ obdržíme

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{1}{2}(u + v) \cos \frac{1}{2}(u - v)$$
$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{1}{2}(u + v) \cos \frac{1}{2}(u - v)$$
$$\cos v - \cos u = 2 \sin \frac{1}{2}(u + v) \sin \frac{1}{2}(u - v)$$

Znějí-li současně dva tóny ve výškách 440 Hz a 436 Hz, pak bez ohledu na fázi a amplitudu bude zvuk reprezentován tvarem

$$\sin(880\pi\, t) + \sin(872\pi\, t),$$

který užitím předchozí rovnosti pro $\sin u + \sin v$ přepíšeme na tvar

$$2 \sin(876\pi\, t) \cdot \cos(4\pi\, t).$$

To znamená, že vnímáme kombinovaný zvuk, který je zastoupen sinovou vlnou s frekvencí 438 Hz určenou jako průměr dvou frekvencí s amplitudou řízenou kosinovou vlnou s frekvencí 2 Hz (tj. polovina rozdílu frekvencí), která nabude v rámci cyklu dvakrát svého maxima, je tedy počet pulzací za sekundu roven čtyřem.

Pokud by amplitudy byly různé, pak by pulzace nebyla tak zřetelná.

Literatura

[1] Papadopoulos, A., Mathematics and music theory: from Pythagoras to Rameau, *Math. Intell.* **24**(2002) No.1, 65–73.

[2] Siki, Z., Mathematics, physics and music: a case study., In: Boniolo, G. (ed.) et al.: The role of mathematics in physical sciences. Interdisciplinary and philosophical aspects. Dordrecht: Springer, 179–196, 2005.

[3] Haluška, J. (ed.), Harmonic Analysis and Tone Systems, *Tatra Mountains Mathematical Publications* **23**(2000) Polygrafia, Bratislava,

[4] Benson, D., *Music: a mathematical offering*, Cambridge: Cambridge University Press., 2007, xiii, 411 p.

[5] Wardhaugh, B., The logarithmic ear: Pietro Mengoli's mathematics of music, *Ann. of Sci.* Vol. 64, No. **3**(2007), pp. 327-348.

Mgr. Judita Piknerová
Ústav matematiky a statistiky, PřF MU
Kotlářská 2, 611 37 Brno
e-mail: 151356@mail.muni.cz