Emil Calda
O jedné vlastnosti polynomů

Učitel matematiky, Vol. 21 (2013), No. 4, 202–205

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149513

O JEDNÉ VLASTNOSTI POLYNOMŮ

EMIL CALDA

V článku ukážeme, jakým způsobem lze řešit některé úlohy na zjednodušování algebraických výrazů a na dokazování identit, v nichž vystupují mnohočleny. Tento způsob je založen na jednoduché, ale na střední škole málo známé vlastnosti polynomů.

Uvažujme nejprve polynom prvního stupně v proměnné x, tj. polynom $p(x) = ax + b$, a předpokládejme, že pro dvě navzájem různá čísla x_1, x_2 platí $p(x_1) = p(x_2) = 0$. Snadno se dokáže, že tento polynom je identicky roven nule, tj. že platí $a = b = 0$:

Z rovností $ax_1 + b = 0$, $ax_2 + b = 0$ dostaneme $a \cdot (x_1 - x_2) = 0$, a protože je $x_1 \neq x_2$, platí $a = 0$; z toho pak vyplývá, že také $b = 0$.

Stejným způsobem dokážeme, že podobná věta platí i pro polynom stupně druhého: Jestliže pro polynom druhého stupně $p(x) = ax^2 + bx + c$ platí $p(x_1) = p(x_2) = p(x_3) = 0$, kde čísla x_1, x_2, x_3 jsou po dvou různá, potom je tento polynom identicky roven nule, tj. $a = b = c = 0$.

Z rovností

$$ax_1^2 + bx_1 + c = 0,$$
$$ax_2^2 + bx_2 + c = 0,$$
$$ax_3^2 + bx_3 + c = 0$$

dostaneme

$$a \cdot \left(x_1^2 - x_2^2\right) + b \cdot (x_1 - x_2) = 0,$$
$$a \cdot \left(x_1^2 - x_3^2\right) + b \cdot (x_1 - x_3) = 0$$

vzhledem k předpokladu $x_1 \neq x_2$, $x_1 \neq x_3$ je dále

$$a \cdot (x_1 + x_2) + b = 0, \qquad a \cdot (x_1 + x_3) + b = 0,$$

takže je

$$a \cdot (x_2 - x_3) = 0$$

a tedy $a = 0$, neboť je $x_2 \neq x_3$.

Podobně dostaneme, že je také $b = c = 0$.

Uvedené výsledky pro mnohočleny prvního a druhého stupně je možné zobecnit; lze dokázat, že pro polynom stupně aspoň prvního platí:

Jestliže polynom n-tého stupně v proměnné x nabývá nulové hodnoty pro $n + 1$ vzájemně různých čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$, potom jsou všechny jeho koeficienty rovny nule.

Užití této věty pro polynom druhého stupně si ukážeme v následujících dvou příkladech.

Příklad 1. Dokažte, že pro každé reálné číslo x a pro všechna reálná a, b, c taková, že $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$, platí:

$$\frac{(x-a)\cdot(x-b)}{(c-a)\cdot(c-b)} + \frac{(x-b)\cdot(x-c)}{(a-b)\cdot(a-c)} + \frac{(x-c)\cdot(x-a)}{(b-c)\cdot(b-a)} = 1$$

Požadovaný důkaz můžeme provést tak, že dané zlomky převedeme na společného jmenovatele, sečteme a přesvědčíme se, že tento součet je roven jedné. Uvedená věta však umožňuje postup mnohem elegantnější.

Od obou stran této rovnosti odečteme číslo jedna a uvědomíme si, že na levé straně vznikne polynom druhého stupně v proměnné x; dokážeme o něm, že je identicky roven nule. Jak víme, stačí ukázat, že je roven nule pro tři různé hodnoty proměnné x. Všimněme si, že jedna z těchto hodnot je $x = a$: oba zlomky s dvojčlenem $x - a$ jsou rovny nule a zbývající zlomek $\dfrac{(a-b)\cdot(a-c)}{(a-b)\cdot(a-c)}$ je roven jedné, takže na levé straně rovnosti vznikne rozdíl $1 - 1$, který je roven nule. Stejný výsledek dostaneme, položíme-li $x = b$ a dále $x = c$. Protože dosazovaná čísla a, b, c jsou po dvou různá, je tím daná identita dokázána.

S potěšením můžeme konstatovat, že jsme přitom nemuseli „v potu tváře“ sčítat zlomky a násobit dvojčleny na levé straně dané rovnosti.

Příklad 2. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla a, b, c taková, že $a+b \neq 0$, $b+c \neq 0$, $c+a \neq 0$, platí:

$$\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}+\frac{(a-b)\cdot(b-c)\cdot(c-a)}{(a+b)\cdot(b+c)\cdot(c+a)}=0$$

Abychom mohli použít uvedenou větu, převedeme levou stranu dané rovnosti na společného jmenovatele; čitatel takto vzniklého zlomku je součet

$$\begin{gathered}(a-b)\cdot(b+c)\cdot(c+a)+(b-c)\cdot(a+b)\cdot(c+a)+\\ +(c-a)\cdot(a+b)\cdot(b+c)+(a-b)\cdot(b-c)\cdot(c-a),\end{gathered}$$

který budeme považovat za polynom druhého stupně v proměnné a. Dokážeme, že je roven nule pro tři různé hodnoty proměnné a: $a=b$, $a=c$, $a=0$; protože dosazovaná čísla b, c, 0 musí být po dvou různá, je nutno předpokládat $b \neq c$, $b \neq 0$, $c \neq 0$. Dosazením čísel b, c, 0 za proměnnou a dostaneme:

$$\begin{aligned}&\text{pro } a=b\text{:} && (b-c)\cdot 2b\cdot(c+b)+(c-b)\cdot 2b\cdot(b+c)=0\\ &\text{pro } a=c\text{:} && (c-b)\cdot(b+c)\cdot 2c+(b-c)\cdot(c+b)\cdot 2c=0\\ &\text{pro } a=0\text{:} && b\cdot(b+c)\cdot c+(b-c)\cdot b\cdot c+b\cdot c\cdot(b+c)-\\ & && -b\cdot(b-c)\cdot c=0.\end{aligned}$$

Tím je dokázáno, že daný polynom je pro $a+b \neq 0$, $b+c \neq 0$, $c+a \neq 0$, $b \neq c$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ roven nule, což znamená, že za těchto předpokladů daná rovnost platí. Zbývá ještě ukázat, že platí i pro $b=c$, $b=0$ a $c=0$, což ověříme snadno:

$$\begin{aligned}&\text{pro } b=c\text{:} && \frac{a-c}{a+c}+\frac{c-a}{c+a}=0,\\ &\text{pro } b=0\text{:} && \frac{a}{a}+\frac{-c}{c}+\frac{c-a}{c+a}+\frac{a\cdot(-c)\cdot(c-a)}{a\cdot c\cdot(c+a)}=0,\\ &\text{pro } c=0\text{:} && \frac{a-b}{a+b}+\frac{b}{b}+\frac{-a}{a}+\frac{(a-b)\cdot b\cdot(-a)}{(a+b)\cdot b\cdot a}=0.\end{aligned}$$

Tím je daná rovnost dokázána.

Pocítí-li čtenář touhu ověřit si tento postup na dalším příkladu, může tak učinit při důkazu identity

$$\frac{a^2 - bc}{(a+b)\cdot(a+c)} + \frac{b^2 - ac}{(b+c)\cdot(b+a)} + \frac{c^2 - ab}{(c+a)\cdot(c+b)} = 0,$$

která platí pro všechna reálná čísla a, b, c taková, že každý ze součtů $a+b$, $a+c$, $b+c$ je různý od nuly.

Literatura

[1] Krečmar, V. A., *Zadačnik po algebre*, Izdatělstvo Nauka, Moskva, 1968.

Doc. RNDr. Emil Calda, CSc.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
e-mail: Emil.Calda@mff.cuni.cz

ABSTRACT

The article presents a way to solve some types of problems on simplifying algebraic expressions and proving identities in which polynomials are used. This way is based on a simple property of polynomials which is, however, not known at secondary schools.