[4] Vyšín, J. a kol., *Geometrie pro devátý až jedenáctý postupný ročník*, Praha, SPN, 1954.

Mgr. Václav Vlk
Integrovaná základní škola
123 45 Horní Dolní
e-mail: Vlk@dotazovna.cz

ABSTRACT

In our textbooks the proof of the volume of the pyramid is erroneous. The solution of this problem is demonstrated in connection to our school practice.

★ ★ ★

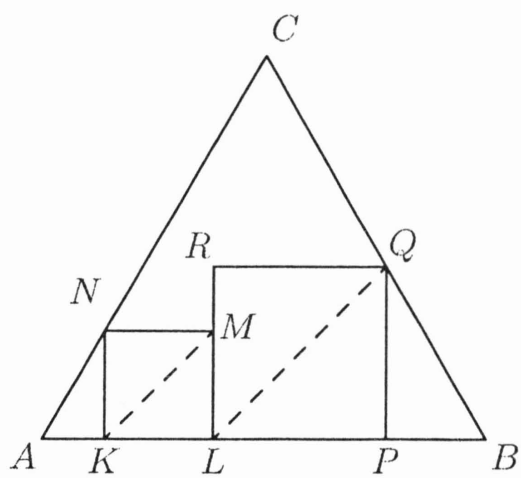
DVA ČTVERCE V ROVNOSTRANNÉM TROJÚHELNÍKU

EMIL CALDA

Nedávno jsem ve svých „lejstrech“, které pocházejí z doby, kdy jsem učil na gymnáziu, objevil úlohu, o které si myslím, že by bylo škoda, kdyby spolu s těmito „lejstry“ zanikla. Zdá se mi, že je docela zajímavá a že by pro dobré studenty mohla být užitečná.

V rovnostranném trojúhelníku ABC jsou podle obr. 1 umístěny dva čtverce. Čtverec $KLMN$ je zvolen libovolně a určuje čtverec $LPQR$, neboť vrchol Q je průsečíkem strany BC daného trojúhelníku a rovnoběžky s přímkou KM vedené bodem L. Pohled na uvedený obrázek může u zvídavého čtenáře vzbudit celou řadu otázek, ale v tomto článku se budeme zabývat pouze těmito třemi:

- Pro jakou velikost úsečky KL je součet obsahů čtverců $KLMN$ a $LPQR$ minimální?
- Jaká je hodnota tohoto minimálního součtu?
- Jak se tyto čtverce s minimálním součtem svých obsahů sestrojí?



Obr. 1

Bez újmy na obecnosti budeme přitom předpokládat, že pro strany trojúhelníku ABC je

$$|AB| = |BC| = |AC| = 1,$$

a pro velikosti stran obou čtverců zavedeme označení:

$$|KL| = |KN| = x, \qquad |LP| = |PQ| = y.$$

Z pravoúhlých trojúhelníků AKN a BPQ vyjádříme velikosti úseček AK a BP:

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{x}{|AK|}, \text{ neboli } |AK| = \frac{x}{\sqrt{3}},$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{y}{|BP|}, \text{ neboli } |BP| = \frac{y}{\sqrt{3}}$$

a po dosazení do rovnosti

$$|AB| = |AK| + |KL| + |LP| + |PB|$$

dostaneme

$$1 = \frac{x}{\sqrt{3}} + x + y + \frac{y}{\sqrt{3}},$$

odkud vypočteme

$$y = \frac{3-\sqrt{3}}{2} - x.$$

Pro součet S obsahů daných čtverců tedy platí:

$$S = x^2 + y^2 = x^2 + \left[\frac{3-\sqrt{3}}{2} - x\right]^2 =$$

$$= 2x^2 - \left(3-\sqrt{3}\right) \cdot x + \frac{\left(3-\sqrt{3}\right)^2}{4}.$$

K tomu, abychom zjistili, pro která x je součet S minimální, nepotřebujeme umět derivovat. Stačí si uvědomit, že S je kvadratická funkce proměnné x, jejímž grafem je parabola s osou rovnoběžnou s osou y; souřadnice jejího vrcholu V získáme doplněním na čtverec:

$$2x^2 - \left(3-\sqrt{3}\right) \cdot x + \left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^2 =$$

$$= 2 \cdot \left(x - \frac{3-\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \frac{\left(3-\sqrt{3}\right)^2}{8}.$$

Zjistili jsme tak, že tato parabola má vrchol v bodě $V\left[\frac{3-\sqrt{3}}{4}; \frac{\left(3-\sqrt{3}\right)^2}{8}\right]$, což znamená, že příslušná kvadratická funkce má minimum v bodě $x_0 = \frac{3-\sqrt{3}}{4}$. Tím je první otázka zodpovězena:

Součet obsahů čtverců $KLMN$ a $LPQR$ je minimální, jestliže velikost strany čtverce $KLMN$ je rovna $\frac{3-\sqrt{3}}{4}$.

Všimněme si ještě, že pro velikost y_0 strany čtverce $LPQR$, který přísluší čtverci $KLMN$, jehož strana má minimální velikost $x_0 = \dfrac{3-\sqrt{3}}{4}$, dostaneme:

$$y_0 = \frac{3-\sqrt{3}}{2} - x_0 = \frac{3-\sqrt{3}}{2} - \frac{3-\sqrt{3}}{4} = \frac{3-\sqrt{3}}{4}.$$

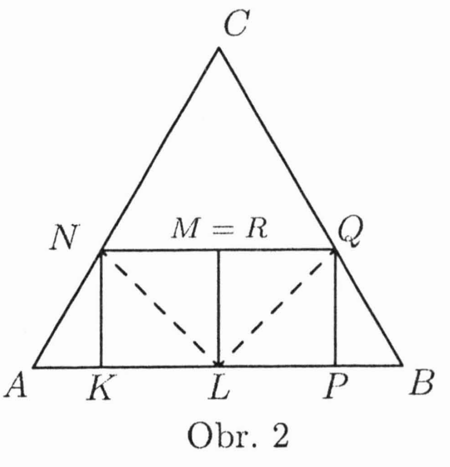
Z tohoto výsledku plyne:
Čtverce $KLMN$ a $LPQR$, pro něž je součet jejich obsahů minimální, jsou shodné.

K určení hodnoty tohoto minimálního součtu a tím i k získání odpovědi na druhou otázku si uvědomíme, že ji určuje druhá souřadnice vrcholu V výše zmíněné paraboly; znamená to, že pro minimální součet $S_{\min}$ platí:

$$S_{\min} = \frac{3-\sqrt{3}}{8}.$$

Poznamenejme ještě, že tento minimální součet můžeme získat i na základě toho, že známe velikosti x_0, y_0 stran příslušných čtverců:

$$S_{\min} = x_0^2 + y_0^2 = 2 \cdot \left[\frac{3-\sqrt{3}}{4}\right]^2 = \frac{\left(3-\sqrt{3}\right)^2}{8}.$$



Obr. 2

Na závěr ještě ukážeme, jak se tyto shodné čtverce, pro něž je součet jejich obsahů minimální, dají sestrojit. Jejich konstrukci snadno zdůvodníme (a na třetí otázku odpovíme) na základě obr. 2, na němž vrchol L je pata výšky rovnostranného trojúhelníku ABC na stranu AB a velikosti úhlů NLM a PLQ jsou 45°.

Literatura

[1] Pomykalová, E., *Planimetrie – Matematika pro gymnázia*, Prometheus, Praha, 1993.

[2] Odvárko, O., *Planimetrie – Matematika pro gymnázia*, Prometheus, Praha, 1993.

Doc. RNDr. Emil Calda, CSc.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
e-mail: Emil.Calda@mff.cuni.cz

ABSTRACT

The author presents a solution to a geometric problem concerning two squares inscribed into an equilateral triangle. It deals with finding such a position of the two squares for which the sum of areas is the smallest.