

# Učitel matematiky

---

Jan Fiala

Náměty pro práci s uzly v hodině matematiky

*Učitel matematiky*, Vol. 22 (2014), No. 3, 139–151

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/149468>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2014

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## NÁMĚTY PRO PRÁCI S UZLY V HODINĚ MATEMATIKY

JAN FIALA

### Úvod

Uzly jsou s člověkem spojeny velmi dlouho a nelze je ani dnes vyloučit z našeho života. Zavazování tkaniček u bot, přišívání knoflíku, balení dárku, uvazování psa na vodítku k zábradlí, pletení copů z vlasů, tatínkovo vázání kravaty, tkaní koberce, pletení různých tvarů preclíků nebo vánočky apod. jsou jen některé příklady situací, při kterých se žáci setkávají s uzly, a to již v raném věku. Příspěvek si neklade za cíl vyložit teorii uzlů v celé obsahové šíři i hloubce, ale jen stručně shrnuje její historii a vysvětluje její vybrané základní pojmy čtenáři přístupnou formou. Hlavním cílem článku je představit některé činnostní úlohy s uzly, které mohou být vhodným doplňkem do výuky matematiky na základní škole a v nižších ročnících víceletých gymnázií.

### Historické milníky teorie uzlů

První doklady o používání uzlů člověkem lze vystopovat již před příchodem moderního člověka. Dokládají to například mušle s provrtanými otvory a první korálky z doby před 82 000 lety sloužící k výrobě šperků ([7]; 24). Tým autor zmiňuje v souvislosti s uzly také například ilustrovaný evangeliář vytvořený keltskými mnichy kolem roku 800 s názvem *Knih z Kellsu*. Uzly se postupně staly významným prostředkem nejen technického pokroku civilizace, své místo si našly také v náboženství, připomeňme tzv. *Boromejské prsteny* (či kruhy) (obr. 13) jako symbol křesťanské svaté Trojice (*trinitas*). Významnou roli sehrály uzly v legendách, nejznámější je starořecký mýtus o gordickém uzlu.

Teorie uzlů je dnes již matematická disciplína (oblast topologie), která se zabývá matematickými uzly. Její historický vývoj

lze shrnout do dvou období: V prvním období bylo cílem vytvořit ucelenou tabulkovou klasifikaci matematických uzlů, které nelze dále „rozmotat“ na jednodušší. První zárodky matematické teorie uzlů lze vystopovat v první polovině 18. století v díle L. EULERA (1707–1783). Již v roce 1771 se začal francouzský matematik A.-TH. VANDERMONDE (1735–1796) zabývat uzly v rámci oboru geometrie polohy, přičemž pracoval pouze s polohovými vztahy a ignoroval velikosti, křivost a počítání s veličinami. Dalším impulsem se stala snaha o vysvětlení struktury hmoty, o kterou se pokoušel anglický fyzik W. THOMSON (lord KELVIN) (1824–1907), podle něhož byl atom „soustava zauzlovaných trubiček éteru“ a různorodost chemických prvků plyne z bohatého spektra různých uzlů. Tabulky uzlů až do 10 křížení sestavené Skotem P. G. TAITEM (1831–1901) a Američanem CH. N. LITTLEEM (1858–1923) jsou vyvrcholením tohoto období.

Zásadní změny v přístupu ke studiu uzlů přinesly tzv. uzlové invarianty, tedy „veličiny, pro něž jakékoli dvě odlišné podoby téhož uzlu dávají přesně stejné hodnoty“, tedy „charakteristická vlastnost, která se deformací uzlu nezmění“ ([4]; 182). K průlomů v hledání vhodných invariantů dochází v práci amerického matematika J. W. ALEXANDERA (1888–1971) v roce 1928, který objevil důležitý invariant známý jako *Alexandřův polynom* představující algebraický popis křížení uzlů. Problémem však zůstalo, že dva uzly se stejným polynomem mohou být stále rozdílné. Zpřesnění přináší novozélandský Američan V. JONES (\*1952) v podobě nového a citlivějšího *Jonesova polynomu*. Dosud nejnovější polynomy jako uzlové invarianty jsou známy polynomy pod zkratkou THOMLYP z dílny Američanů a Poláků. Historický vývoj teorie uzlů je až do dnešních dnů poznamenán mnohými nedořešenými problémy a spornými body.

### Uzly v hodině matematiky

S. SINGH ve své knize ([7], 86) uvádí, že jednou z oblastí matematiky, které v současnosti (1998, pozn. autora) nejvíce přitahují pozornost, je studium uzlů.

Představy o tom, co je matematický uzel, získají žáci z běžného uzlu na provázku, u kterého však spojí volné konce a vznikne

tzv. uzavřená smyčka. Pokud se v matematickém uzlu provázek kříží, mluvíme o tzv. *křížení*. Uzel může mít různý počet křížení. Nemá-li matematický uzel žádné křížení, mluví se o tzv. *volné smyčce* (obr. 1 vlevo), nebo také o *nulovém uzlu* nebo *neuzlu*. Při znázornění matematických uzlů do roviny využijeme rovinné čárové křivky, v nejjednodušším případě (volná smyčka) to bude kružnice. Křížení uzlu zvýrazníme přerušením té části křivky, která prochází pod jinou částí uzlu. Volné smyčky mohou být nezřetězené (obr. 1 vpravo), naopak soubor aspoň dvou volných navzájem propletených smyček nazýváme *řetěz* (obr. 2).



Obrázek 1: Volná smyčka (vlevo), nezřetězené volné smyčky (vpravo)<sup>1</sup>



Obrázek 2: Jednoduchý článkový řetěz (vlevo)<sup>2</sup>, jednoduchý řetěz (vpravo)

S matematickými uzly se dá dále různě pracovat, mluvíme o jejich transformacích nebo jednoduše úpravách do jiné podoby, aniž bychom ovšem uzel v jeho některé části přestřihli či jinak poškodili tak, že přestane být uzavřenou smyčkou. Úpravy matematického uzlu, tj. také změny jeho podoby, můžeme provádět třemi základními možnostmi, tzv. tahy: zkroucením (a opačný tah

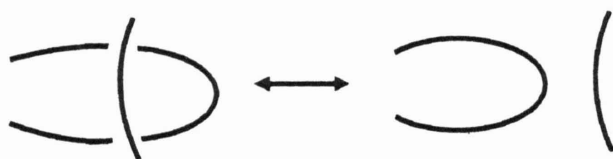
<sup>1</sup>Tzv. *planární diagram*.

<sup>2</sup>Zdroj obrázku: JDTheile, Rundgliederkette [online] 2012. [cit. 6.8.2013]. Volně dostupné na Wikimedia Commons: <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Rundgliederkette-JDT.jpg>.

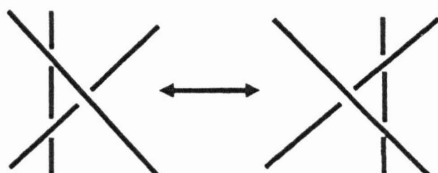
rozkroucení), prostrčením (a opačný tah vytažení) a přehozením (a opačný tah přehození v opačném směru). Jednotlivé tahy jsou na obrázcích 3, 4 a 5<sup>3</sup>.



Obrázek 3: Tah zkroucení a rozkroucení



Obrázek 4: Tah prostrčení a vytažení



Obrázek 5: Tah přehození a přehození v opačném směru

Rozmotat matematický uzel se nám však nemusí podařit vždy, o čemž se mohou žáci snadno přesvědčit. V takovém případě říkáme, že uzel je skutečně zauzlováný. Někdy se nám podaří uzel rozmotat do podoby jednodušší, jindy dokonce do podoby volné smyčky, pak jde o neuzel. Jestliže se jeden uzel upraví pomocí povolených tahů na jiný uzel, nazýváme takové uzly *ekvivalentní*. Příkladem neekvivalentních uzlů jsou pravostranný a levostranný trojlístek (obr. 9 vlevo), přičemž je jeden zrcadlovým obrazem druhého.

Hlouběji do teorie uzlů není potřeba podle našeho názoru pro potřeby žáků základních a středních škol vstupovat. Pro žáky bude jistě ještě zajímavé zmínit, že podle ([7], 24, anglické vydání z roku 2009) bylo dosud popsáno více než 1,7 milionu různých matematických uzlů do úrovně 16 křížení.

<sup>3</sup>Názvosloví pro jednotlivé tahy bylo převzato a obrázky byly zpracovány podle ([9], 170, překlad H. Nyklová, 2006). Lze diskutovat o vhodnějších názvech.

### Náměty k činnosti žáků<sup>4</sup>

Před vlastním řešením úloh doporučujeme, aby učitel žákům vysvětlil a demonstroval rozdíl mezi běžným uzlem a uzlem matematickým. Vhodné je také předvést žákům základní tahy pro úpravy uzlů. Za stěžejní část výuky o uzlech ovšem považujeme sestavování základních uzlů a jejich úpravy. Motivačně působí především takové uzly, ke kterým mají žáci blízký vztah. Základní úlohou je také zjistit, zda je daný uzel volná smyčka či nikoliv. Na závěr hodiny doporučujeme zařadit úlohu o uzlovém kouzlu. Z níže uvedených úloh doporučujeme sestavit pracovní list pro žáky, podle kterého se žáci řídí při svých činnostech, a to buď při samostatné, skupinové či kolektivní práci. Všechny úlohy se svým zpracováním a náročností osvědčily při výuce se žáky primy, sekundy i tercie tříd všeobecného gymnázia<sup>5</sup>.

**Úloha 1:** Kde a při jakých činnostech používáš uzly? Jaké znáš různé uzly? Najdi základní druhy uzlů na internetu nebo v knize a ukaž některé svým spolužákům. Umíš je vytvořit z paměti? Mají některé uzly zvláštní vlastnosti vzhledem ke svému využití?

**Poznámka k řešení:** Uceleně a přehledně jsou různé druhy (běžně chápaných, nikoliv matematických) uzlů zpracovány například na internetové stránce ([10]).

**Úloha 2:** Pomocí provázků vytvoř jednoduchý řetěz o dvou článcích (obr. 2). Kolik má tento řetěz křížení? Je možné oba články od sebe oddělit, aniž bychom nepoužili přestřižení jednoho z článků? Zakresli řetěz schematicky do sešitu.

**Poznámka k řešení:** Řetěz má dvě křížení. Bez rozstřižení není možné články oddělit.<sup>6</sup>

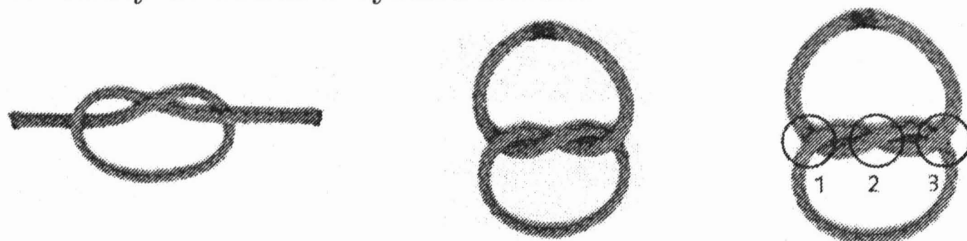
**Úloha 3:** Vezmi provázek a vytvoř uzel (Obrázek 2 vlevo). Spoj oba volné konce lepicí páskou nebo lepidlem (obr. 2 uprostřed).

<sup>4</sup>Zdroje obrázků v této části textu byly převzaty z ([1], 38, 39) a ([2], 41).

<sup>5</sup>Podrobnosti k realizované výuce a fotogalerii lze nalézt na [www.gvn.cz](http://www.gvn.cz).

<sup>6</sup>Jedno z kouzelnických čísel fakíra Rádži Kamila ve filmu *Obecná škola* je pouhý trik. Z matematického hlediska neexistuje transformace článků řetězu taková, která by je oddělila, aniž bychom nepřerušili (nepřestříhli) jeden z nich.

Vznikl jeden uzel se třemi kříženími (obr. 6 vpravo). Zakresli řetěz schematicky do sešitu a vyznač křížení.



Obrázek 6: Postup vytvoření uzlu

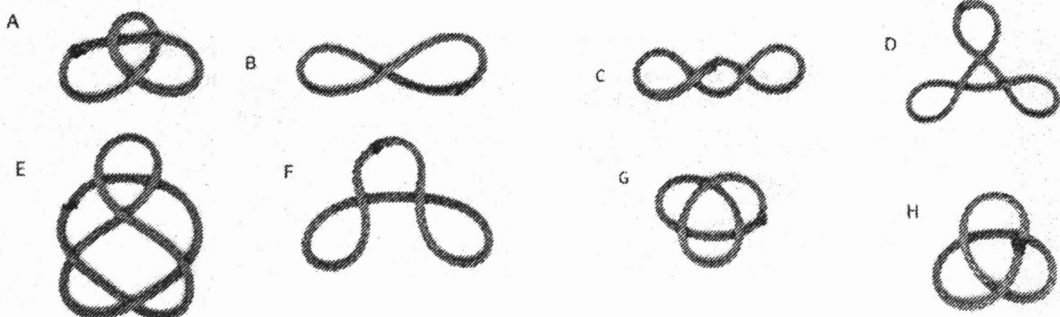
**Úloha 4:** Pomocí provázku vytvoř dva uzly na obrázku (obr. 7) Kolik křížení má každý z uzlů? Načrtni uzly do sešitu. Vyznač do obrázku všechna křížení u obou uzlů. Jeden uzlů není skutečný uzel: pomocí úprav částí uzlu jej převed' na uzel jednoduššího tvaru



Obrázek 7: Dva různé uzly?

**Poznámka k řešení:** Uzel vlevo lze změnit na volnou smyčku, nejde o skutečný uzel. Uzel vpravo má 5 křížení.

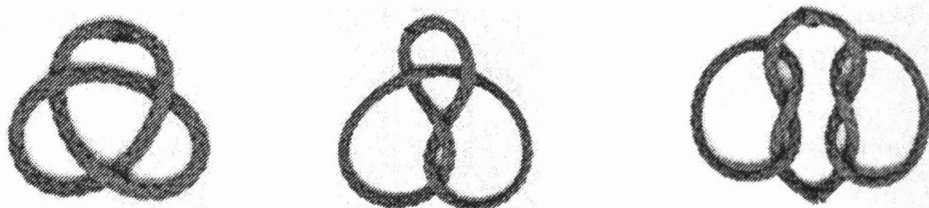
**Úloha 5:** Zkoumej další uzly pod písmeny A–H (obr. 8). Vytvoř uzly pomocí provázku. Které z nich nejsou skutečnými uzly? Načrtni uzly do sešitu. Vyber si jeden z uzlů, dobře si ho prohlédni a pak ho namaluj z paměti.



Obrázek 8: Uzly A–H

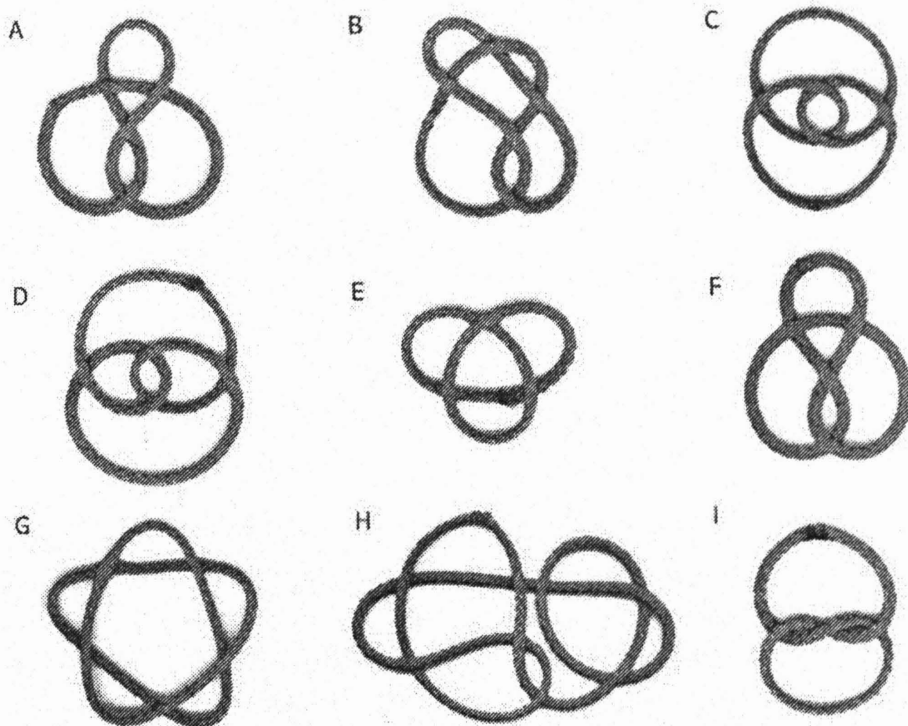
**Poznámka k řešení:** Uzly B, C, D, F, G, H nejsou skutečné uzly. Uzel A a E jsou typu trojlístku (Úloha 6).

**Úloha 6:** Zkoumej další složitější uzly: trojlístek, preclík, křížový uzel (obr. 9). Nakresli uzly do sešitu. Vyznač a spočítej křížení. Vytvoř uzly pomocí provázku. Zvládneš je vytvořit zpaměti?



Obrázek 9: Uzly zleva: trojlístek, preclík, křížový uzel

**Poznámka k řešení:** Trojlístek – 3 křížení. Preclík – 4 křížení. Křížový uzel – 6 křížení.



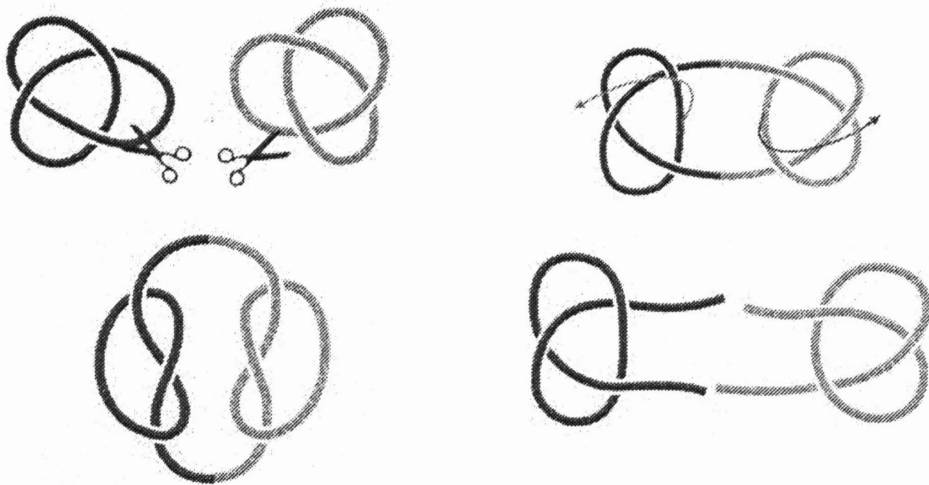
Obrázek 10: Uzly A–I



**Úloha 7:** Vytvoř dané uzly podle obrázků A–I (obr. 10). Nakresli je do sešitu. Které z nich nejsou vůbec skutečné uzly? Které z nich jsou typu „trojlístek“ a které typu „preclík“? Dokážeš je úpravami změnit na jednotlivé typy uzlů? Kolik křížení měly dané uzly před úpravami a kolik jich mají potom?

**Poznámka k řešení:** Uzly pod písmeny C, E a G nejsou skutečné uzly. Typu „trojlístek“ jsou uzly A, D, H, I. Typu „preclík“ jsou uzly B, F. Počty křížení před úpravami: A–4, B–5, C–4, D–4, E–3, F–4, G–5, H–8, I–3. Počty křížení po všech možných úpravách: A–3, B–4, C–0, D–3, E–0, F–4, G–0, H–3, I–3.

**Úloha 8:** Co vznikne „spojením“ dvou uzlů typu „trojlístek“? Postupuj podle návodu (obr. 11). Vyzkoušej pomocí provázku.



Obrázek 11: Návod na „spojení“ dvou uzlů typu „trojlístek“

**Poznámka k řešení:** Žák postupuje podle obrázků zleva doprava. Výsledným uzlem je uzel křížového typu (vpravo).

**Úloha 9:** Vytvoř si svůj vlastní uzel a zkoumej jeho vlastnosti. Kolik má tvůj uzel křížení? Podaří se ti převést uzel na nějaký jednodušší uzel?

Na základní úlohy o uzlech lze navázat dalšími úlohami, jejichž obsah může být i vhodným tématem pro projektovou výuku a samostatnou práci žáků doma.

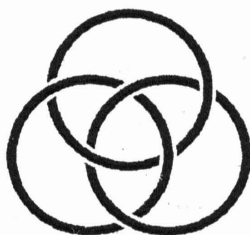
**Úloha 10:** Na olympijské kruhy lze nahlížet jako na řetěz (obr. 12). Kolik článků a křížení zde je? Načrtni do sešitu a vyzkoušej pomocí provázků.



Obrázek 12: Olympijské kruhy<sup>7</sup>

**Poznámka k řešení:** Jde o jednoduchý řetěz s 5 články a 8 kříženími.

**Úloha 11:** Zjisti podrobnosti o tzv. Boromejských prstenech (obr. 13). Jaké má toto uskupení prstenů vlastnosti? Co symbolizuje? Vytvoř Boromejské prstény pomocí provázků nebo pomocí drátů. Načrtni do sešitu.



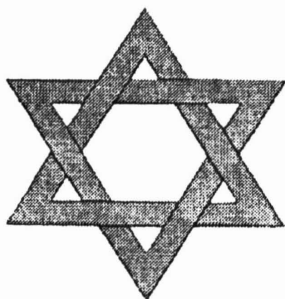
Obrázek 13: Boromejské prstény<sup>8</sup>

<sup>7</sup>Zdroj obrázku: RokerHRO, Olympic Rings black.svg [online] 2008. [cit. 6.8.2013]. Volně dostupné na Wikimedia Commons: [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Olympic\\_Rings\\_black.svg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Olympic_Rings_black.svg).

<sup>8</sup>Zdroj obrázku: AnonMoos, Borromean-rings-BW.svg [online]. 2009 [cit. 6.8.2013]. Volně dostupné na Wikimedia Commons: <http://commons.wikimedia.org/wiki/File: Borromean-rings-BW.svg?uselang=de>.

Boromejské prsteny jsou zvláštním způsobem propletené prstence. Jedna italská renesanční rodina je měla v 15. století ve svém erbu. Symbol Boromejských prstenů má také silný náboženský podtext: slovo *trinitas* symbolizuje křesťanskou svatou Trojici. Blíže k tomu a vlastnostem ([7], 86) uvádí: „Jelikož prsten může být překřížen dvěma způsoby (nad nebo pod sebou), existuje možných propletenců. Vezmeme-li v úvahu symetrii, pak se jich z geometrického hlediska liší jen 10.“ Je to uzel se 6 kříženími. Prsteny je možné sestavit i z drátů, které však musí být mírně prohnuté, obrázek je tedy vizuální klam.

**Úloha 12:** Obrázek 14 představuje tzv. Davidovu hvězdu. Zkoumej vlastnosti tohoto řetězu. Z kolika článků se tento řetěz skládá? Načrtni Davidovu hvězdu do sešitu a sestav ji pomocí provázků.



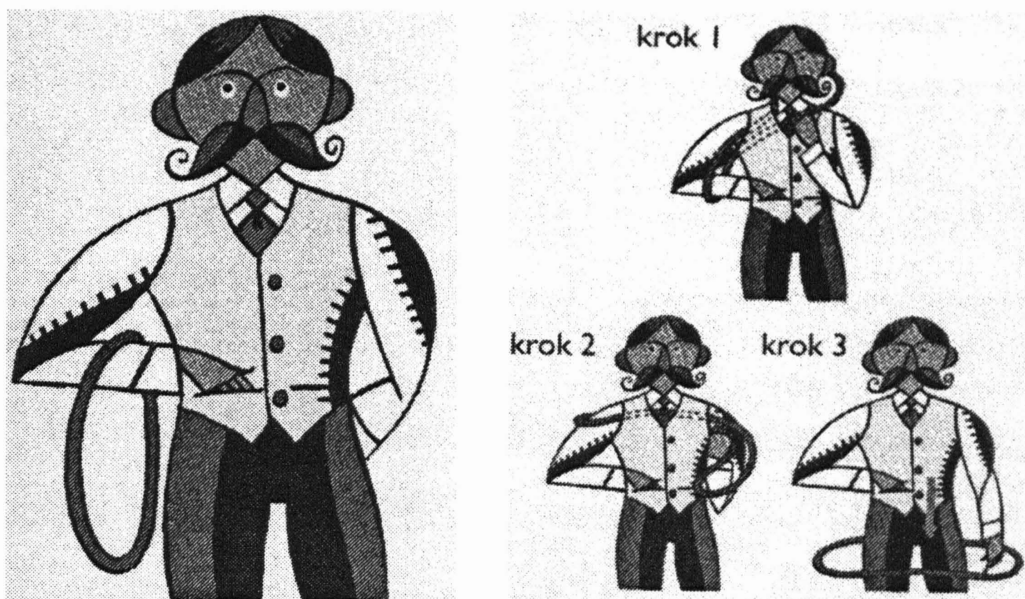
Obrázek 14: Davidova hvězda <sup>9</sup>

**Poznámka k řešení:** Davidova hvězda je řetěz o dvou člancích a 6 kříženích. Lze ji snadno sestavit z provázků, z drátů je to možné pouze za patřičného prohnutí. Také se jedná o vizuální klam.

**Úloha 13:** Nauč se uzlové kouzlo<sup>10</sup>. Chlapík na obrázku 15 se chce zbavit smyčky na své pravé paži, není však ochoten vytáhnout ruku z kapsy, vysvléct se z vesty ani dát smyčku do kapsy. Zjistí, jak to může udělat.

<sup>9</sup>Zdroj obrázku: AnonMoos, Borromean-rings-BW.svg [online]. 2009 [cit. 6.8.2013]. Volně dostupné na Wikimedia Commons: <http://commons.wikimedia.org/wiki/File: Borromean-rings-BW.svg?uselang=de>.

<sup>10</sup>Podle ([6]; 100).



Obrázek 15: Motivační obrázek k uzlovému kouzlu (vlevo) a řešení úlohy (vpravo)<sup>11</sup>

**Poznámka k řešení:** Řešení ukazuje obrázek 15 vpravo. Žáci si kouzlo v předstihu nacvičí a pak předvedou ostatním spolužákům při hodině. Provedení kouzla se usnadní volnějším vestou.

**Úloha 14:** Dobrým příkladem využití uzlů v běžném životě žáků je kolektivní hra s názvem *Gordický uzel*, hojně užívaná při seznamovacích aktivitách a jako tzv. „icebreaker“. Hráči se postaví do kolečka čelem k sobě, zavřou oči a v daném okamžiku dají levou ruku dovnitř kruhu a snaží se někoho jiného chytnout za ruku. Totéž udělají s pravou rukou. Poté otevřou oči a zjistí, že jsou se svými spoluhráči beznadějně zapleteni. Cílem je rozplést tento živý uzel, aniž by se ruce rozpojily.

## Závěr

Teorie uzlů není pro svou obtížnost zahrnuta do základního ani rozšiřujícího učiva matematiky na základních a středních školách. Přesto považujeme základní úlohy z teorie uzlů za vhodný doplněk výuky matematiky již v nižších ročnících víceletého gymnázia, neboť jsou další příležitostí pro velmi žádoucí rozvoj manipulativních

<sup>11</sup>Zdroje obrázků: ([6]; 100), ([6]; 133).

dovedností žáků a jejich prostorové představivosti. Vzorem mohou být úlohy v německých učebnicích (například [1], [2]), nové publikace k teorii uzlů (například [3]) a články v německém denním tisku (například [5]). Doporučujeme zařadit podobné netradiční úlohy zvláště do hodin cvičení z matematiky, kde se žáci snaží hlouběji proniknout do tajů matematiky. Kromě nesporné motivační povahy, silného vztahu k běžnému životu žáků a zjevné experimentální povahy jsou tyto úlohy také příkladným vzorem činnostního učení žáků.

## Literatura

- [1] Affolter, W. et al., *Das Mathematikbuch 1.*, Lernumgebungen Stuttgart – Leipzig: Ernst Klett Verlag, 2009, s. 38–39.
- [2] Affolter, W. et al., *Das Mathematikbuch 1.*, Arbeitsheft Stuttgart – Leipzig: Ernst Klett Verlag, 2009, s. 41.
- [3] Akveld, M., *Knoten in der Mathematik.*, Ein Spiel mit Schnüren, Bildern und Formeln. Themenheft Topologie. DMK Deutschschweizerische Mathematikkommission: Orell Füssli, 2007.
- [4] Livio, M., *Je Bůh matematik?*, 1. vyd. Praha: Dokořán, 2010, s. 177–195.
- [5] Loos, A., *Ist der Knoten geplatzt?*, [online]. 2012 [cit. 9.8.2013]. Volně dostupné na Zeit Online, Wissen: <http://www.zeit.de/2012/47/Knoten-Theorie-Mathematik>.
- [6] Mosovich, I., *Nová kniha hlavolamů*, Bratislava, PERFEKT, 2009, 140 s.
- [7] Pickover, C. A., *Matematická kniha.*, Qd Pythagora po 57. Dimenzi: 250 milníků v dějinách matematiky 1. vyd. Praha: Dokořán, 2012, s. 24–25, 458–459, 490–491.
- [8] Singh, S., *Velká Fermatova věta.*, 2. vyd. Praha: Akademia, 2002, s. 86.

- [9] Stewart, I., *Odsud až do nekonečna.*, Průvodce moderní matematikou, 1. vyd. Praha: Dokořán, 2006, s. 142–143.
- [10] Stránka věnovaná uzlům [online]. [cit. 7.8.2013]. Dostupné na: <http://samurai.bondage.cz/soubory/uzly/uzly.html>.

*PhDr. Jan Fiala, Ph.D.*

*Gymnázium V. Nováka Jindřichův Hradec*

*Husova 333*

*377 01 Jindřichův Hradec*

*e-mail: fjjh@post.cz*

#### ABSTRACT

First, the contribution describes the most significant turning points of the gradual development of recognition in knot theory, then it provides examples of the use of classical knots in history, mentions some pictorial forms of motivation for the inclusion of knot theory in teaching mathematics, presents basic concepts of knot theory suitable for mathematics teaching in the lower years of 8-year secondary grammar school and offers a set of simple tasks in this interesting field of mathematics which correspond with the activity-concept of teaching of mathematics. Moreover, some experience with the tasks is summarized together with recommendations for the inclusion of knot theory tasks in the lower classes of the 8-year secondary grammar school.