

Učitel matematiky

Šárka Gergelitsová; Tomáš Holan
Konstrukční geometrie jinak

Učitel matematiky, Vol. 22 (2014), No. 3, 129–138

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/149466>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2014

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

KONSTRUKČNÍ GEOMETRIE JINAK

ŠÁRKA GERGELITSOVÁ, TOMÁŠ HOLAN

Úvod

Planimetrické konstrukční úlohy nebývají příliš oblíbeným tématem školské matematiky. Jedním z důvodů může být – kromě nesporné pracnosti řešení zadaných úloh – příliš velké množství úkonů a úvah spojených s řešením a různé požadované dovednosti.

Dvojí pohled na konstrukční úlohu:

řešení problému nebo praktická manuální činnost?

Co očekáváme od žáků jako výsledek řešení konstrukční úlohy?

Přístup první: Rýsování

Ke konstrukční úloze přistupujeme jako k praktickému problému, při němž záleží na manuální dovednosti a obratnosti při rýsování. Žáci se učí používat rýsovací pomůcky a cvičí důležité jemné motorické schopnosti. Výsledkem je rys – tedy obrázek. Při jeho hodnocení bereme v úvahu nejen logickou správnost, ale také jeho estetickou úroveň.

Dalším krokem uvedeného přístupu mohou být práce v terénu, kdy žák nějak vyznačí požadovaný geometrický útvar, získá požadovaný rozměr a podobně.

Vstupní parametry takto řešených úloh jsou pevně (numericky) dané, úkolem žáka je sestrojít správný výsledný útvar.

Přístup druhý:

Řešení problému, hledání postupu (algoritmu) řešení

Při řešení problému hledáme logicky správné a zdůvodněné postupy, které vedou od daných vstupních parametrů k získání požadovaných výstupních hodnot či geometrických útvarů. Požadovaným výstupem tedy není ani tak konkrétní hodnota, jako spíš

postup sám. Takto musíme řešit úlohy zadané parametricky, součástí řešení pak bývá i diskuse úlohy.

Při řešení úlohy musí brát žák v úvahu dostupné nástroje, tj. konstrukční postupy, které považujeme za základní a blíže je nepopisujeme (typicky to bývají konstrukce proveditelné pomocí běžných rýsovacích pomůcek, zejména pravítka a kružítka – tedy sestrojení přímký, kružnice, kolmice, vedení rovnoběžky...). Sadu dostupných nástrojů však můžeme zúžit či naopak rozšířit.

Úspěch žáka při řešení takto formulované úlohy nesouvisí s jeho manuálními dovednostmi.

Přístup školní:

Oba pohledy spolu souvisí, při řešení konstrukčních úloh děláme obojí

Spojení obou přístupů je zřejmé. K tomu, abychom byli schopni narýsovat požadovaný geometrický útvar (přístup první), musíme nejprve znát postup, správně a ve správném pořadí provést potřebné úkony, kroky konstrukce. Takový postup očekáváme i od žáků.

Naopak: vymyslíme-li nějaký postup, „zviditelníme“ výsledek našeho úsilí narýsováním výsledku pro nějaké (vhodně či náhodně zvolené) hodnoty vstupních parametrů. Uvedený přístup však naráží na několik úskalí.

Rýsování a hledání postupu u konstrukční úlohy jsou dvě odlišné dovednosti. Jejich oddělením můžeme některým žákům pomoci odhalit příčinu neúspěchu, některým usnadnit práci, ozřejmit význam formulace postupu konstrukce a výrazně eliminovat vliv neobratnosti na výsledek.

Úskalí na straně žáka – je až příliš manuálně zdatný a rychlý / je nešikovný

Dostanou-li žáci za úkol sestrojit trojúhelník, postupují mnozí z nich zcela jinak (bez hledání postupu konstrukce) – často zdatně obkreslí výsledek podle obrázku spolužáka nebo naleznou věrohodný výsledek „zkusmo“.

Obráceně – logicky bezchybný postup konstrukce může vinou neobratnosti žáka vést k natolik neestetickému a nepřesnému rysu, že má k požadovanému výsledku daleko.

Úskalí na straně učitele – problematické hodnocení správnosti odevzdaného řešení

Má-li učitel správně hodnotit odevzdaný úkol, je v nelehké situaci. Nejenže je to práce časově náročná, ale mnohdy je velmi obtížné poznat, je-li odevzdaný rys výsledkem správného postupu. Z rozboru to nebývá vidět, mnohé čáry v rysu žáci gumují či překreslují a formulace zápisu postupu konstrukce je sama o sobě obtížným úkolem, mnohdy obtížnějším než konstrukce sama.

Pomohou interaktivní systémy tzv. dynamické geometrie?

Chceme-li zdůraznit první z výše uvedených přístupů (rýsování) klademe důraz na manuální zručnost žáka. Estetický obrázek je cílem, podstatnější však je samotný nácvik potřebných dovedností.

Navíc, narýsovat úsečku mohu pomocí prostých nástrojů, proč tedy kvůli tak jednoduchému úkonu využívat složitý systém? Kvůli rýsování samému ho nepotřebujeme.

Dynamický systém však dokáže rychle odhalit chybu, například výše zmíněný postup konstrukce „zkusmo“, tedy logiku provedené konstrukce.

Klademe-li důraz na hledání logicky správného postupu – algoritmu – konstrukční úlohy, je pomoc systému dynamické geometrie důležitá. Zde bychom chtěli zdůraznit pouze některé aspekty jeho využití:

- Při modelování problému v systému můžeme snáze experimentovat a získat lepší představu o samotném zadání úlohy.
- Dynamický model umožní provést konstrukci pro dané hodnoty vstupních parametrů a zároveň dovoluje interaktivní změnu daných hodnot. Tím vizualizujeme řešení parametricky zadané úlohy a získáme názornou podporu pro diskusi počtu řešení.
- Při konstrukci je nutno vybírat z dostupných konstrukčních nástrojů systému. To může mít vliv na postup konstrukce.

- Konstrukci není možné provádět „ve špatném pořadí kroků“. Systém vyžaduje logicky přesný postup správně provedených kroků konstrukce.
- Výsledek je čitelný a nezatížený manuální neobratností žáka.

Co nám chybí...

I při využití systému dynamické geometrie přetrvává pro učitele problém s hodnocením odevzdaných žákovských řešení.

Zmíněná pracnost způsobuje, že hodnocení přichází pozdě, a tím pádem má i malý dopad. Navíc, sdělením hodnocení žákovi celý proces velmi často končí, v lepším případě se jednou opakuje po učitelem vyžádaném přepracování.

Pro žáka je také obtížné přesvědčit se o správnosti provedeného postupu. Zejména v případě parametricky zadaných úloh řešených „na papíře“, kdy případná konstrukce pro jedno konkrétní zadání má pouze ilustrativní význam.

Automatické vyhodnocování konstrukčních úloh

Pokud bude žák pracovat v systému, který je schopen správnost jeho řešení vyhodnocovat automaticky a okamžitě, výše uvedené obtíže odstraníme. Problém pak zůstane už jen ve schopnostech žáka vyřešit zadaný úkol.

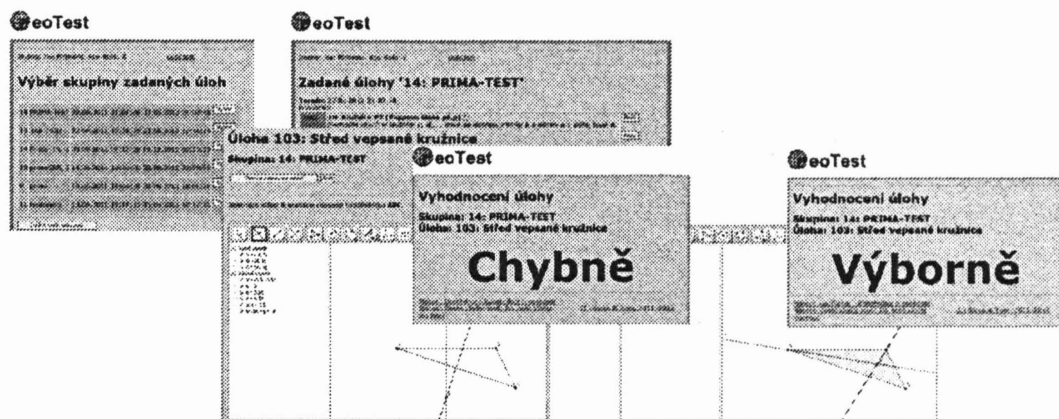
Takový systém jsme připravili, již třetím rokem úspěšně funguje a nabízíme ho k volnému využití dalším kolegům.

GeoTest – co je to

GeoTest [2], [7] je online prostředí, webová aplikace, poskytující prostředí pro řešení konstrukčních úloh a nástroje k vyhodnocení správnosti provedeného řešení. Aplikace nabízí dvě odlišná prostředí, která se liší podpůrnými funkcemi – prostředí zvlášť pro učitele a zvlášť pro žáky. Podrobný popis prostředí je k dispozici na doprovodném webu [3].

Prostředí pro žáky

Žáci v GeoTestu řeší zadané planimetrické konstrukční úlohy. Svě řešení (provedené ve vnořeném GeoGebra [1] appletu 4i HTML5) pak mohou odeslat na server k vyhodnocení. Vzápětí dostanou informaci, je-li jejich řešení správné, nebo chybné (obrázek 1). Kdykoliv se mohou pokusit chybu opravit a řešení opakovaně odeslat, nebo mohou přejít k řešení jiné úlohy, nebo práci ukončit a pokračovat v ní kdykoliv – po přihlášení do aplikace – později. Při řešení úkolu mohou postupovat zcela individuálně, podle svých schopností, tempem, které jim vyhovuje. V přehledných tabulkách vidí každý žák všechny jemu zadané úkoly, seznamy úloh v každém z úkolů a svou dosavadní úspěšnost při jejich řešení.



Obr. 1

Prostředí pro učitele

V systému si učitelé nejprve připraví seznamy žáků. Poté pro žáky (libovolné skupiny žáků) sestavují jednotlivé úkoly (domácí úkoly, testy, ...). U každého úkolu zvolí potřebné vlastnosti (časový limit, poznámky k řešení, ...) a vyberou jednotlivé úlohy. Úlohy vybírají ze seznamu připravených úloh. Všechny úlohy si mohou předem prohlédnout tak, jak je při řešení uvidí žáci, a mohou také vyzkoušet řešení a vyhodnocování odpovědí.

Podobně, jako vidí každý žák svůj vlastní stav řešení jednotlivých úkolů, vidí učitel tyto údaje v přehledných tabulkách pro všechny žáky skupiny a v grafech pro všechny své žáky.

Sbírka úloh

V systému jsou zatím připravena zadání 600 úloh. Z nich jsou téměř dvě stovky různě obtížných konstrukčních úloh z planimetrie. Ve sbírce jsou jak úlohy volné, tak vázané, a v zadání každé úlohy je výslovně uvedeno, co je požadovaným výsledkem konstrukce. Může to být chybějící vrchol trojúhelníku, kružnice, úsečka ...

System je možné využít i k nácviku rutinních konstrukcí z deskriptivní geometrie, zbývající tři stovky úloh jsou právě tyto úlohy.

Varianty úloh podle preciznosti požadovaného řešení

Při řešení připravených úloh se stává, že řešitel zvolí postup, který by byl při rýsování „na papíře“ zcela vyhovující, ale systém řešení zamítne. Rýsujeme totiž vždy výsledný objekt pro konkrétní hodnoty zadaných parametrů úlohy. A v rysu ani v postupu konstrukce většinou nezdůvodňujeme, proč například jeden (a který) z průsečíků dvou čar vede k sestrojení požadovaného řešení a druhý ne. Prostě využijeme ten „správný“.

Při řešení v parametrickém systému ale můžeme interaktivně měnit hodnoty vstupních parametrů, a tudíž je třeba přesně (nějakou konstrukcí) určit, který výsledný prvek dílčího postupu vede pro tu kterou vstupní konfiguraci ke správnému řešení.

System tedy může zamítnout například postup, který není dostatečně obecný, nebo není zcela jednoznačný, obsahuje nějakou nenápadnou heuristiku, třeba právě volbu jednoho ze dvou průsečíků „od oka“. Na nejobvyklejší nedorozumění upozorňujeme na podpurných stránkách k systému v manuálu „Návod: Časté chyby aneb Jak řešit úlohy správně“ [4].

Řešení úloh v jejich vyšší obtížnosti tedy vyžaduje kromě hledání algoritmu řešení i úvahu o preciznosti zvoleného postupu, což může nadané žáky motivovat, ale pro mnoho žáků to může být těžko překonatelná překážka a komplikace.

Proto jsme ke všem úlohám, kde jsme to považovali za potřebné, doplnili varianty s mírnějším vyhodnocováním. Označujeme je Z-varianty a od původní úlohy se liší většinou jen přesností hodnocení postupu. Učitel si pro své žáky může vybrat (třeba

i individuálně) takovou variantu úlohy, která lépe vyhovuje jeho záměrům a schopnostem žáků. V seznamu úloh jsou obě varianty odlišené i barevně.

Pro ilustraci uvádíme dva příklady úloh a jejich variant (tyto a podobné příklady najdete i na webu na stránkách s nápovědou a tutoriálem k systému [3], [4], [5]).

Příklady úloh s oběma variantami

1. Sestrojte osu o úsečky AB .

Z-varianta úlohy přijme například řešení:

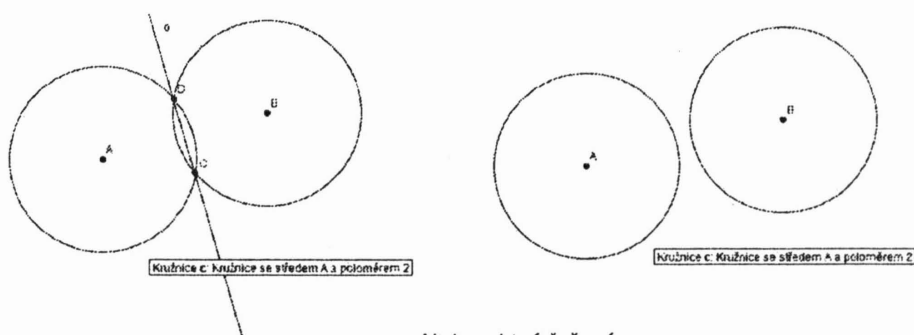
Sestrojíme kružnice se středy v daných bodech, s dostatečně velkým poloměrem – například $r = 2$ (jednotky). Průsečíky obou kružnic vedeme přímkou o (obrázek 2).

Původní úloha vyhodnotí uvedené řešení takto:

Takové řešení není správné, není jisté, že se kružnice o poloměru 2 protnou, stačí posunout (oddálit pomocí myši) jeden krajní bod úsečky AB a řešení nemáme, i když určitě existuje.

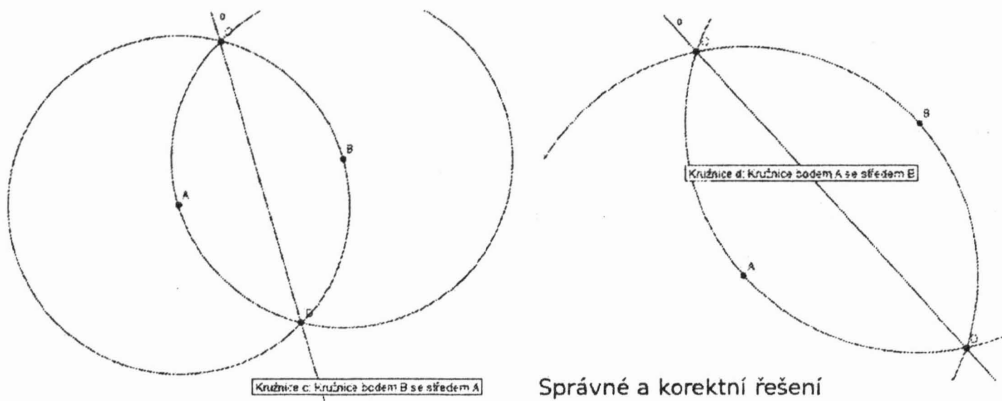
Příklad správného řešení:

Dvě kružnice, každá se středem v jednom z krajních bodů a procházející druhým z krajních bodů úsečky, se protnou vždy (obrázek 3).



Nekorektní řešení

Obr. 2



Obr. 3

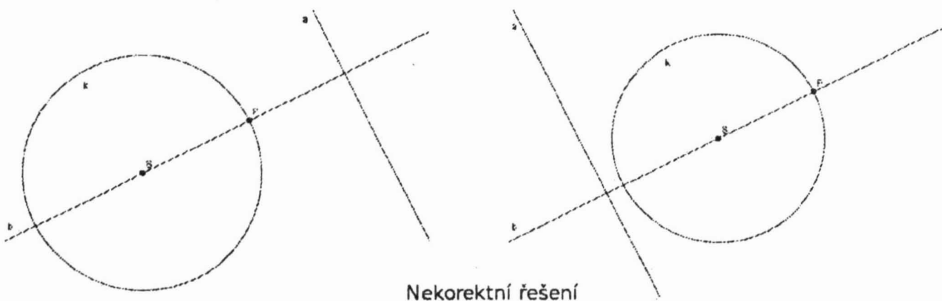
2. Na dané kružnici k určete bod P , který je nejbližším bodem kružnice od přímky a (která danou kružnici neprotíná).

Z-varianta úlohy přijme například řešení:

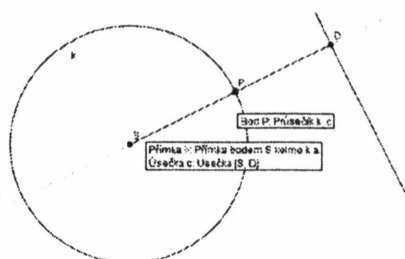
Středem dané kružnice vedeme kolmici k dané přímce a jako bod P označíme ten průsečík kolmice s danou kružnicí, který se na monitoru jeví jako bližší ke kružnici (obrázek 4).

Původní úloha vyhodnotí uvedené řešení takto:

Uvedené řešení není korektní, není (v postupu konstrukce) řečeno, který ze dvou průsečíků přímky s kružnicí je ten správný, jeden jsme „podle oka“ vybrali. Hodnocení: *Chyba*.



Obr. 4



Správné a korektní řešení

Obr. 5

Příklad správného řešení:

Pokud sestrojíme úsečku SD (D je zde průsečík kolmice s danou přímkou, v konstrukci se může jmenovat jakkoliv), je bod P jediný a tudíž jednoznačně určený průsečík úsečky SD s danou kružnicí (obrázek 5).

Zkušenosti z používání

Zkušenosti, které jsme získali po roce fungování GeoTestu, jsme popsali v [6]. Do těchto dnů (jaro 2014) systém aktivně využívá asi 80 učitelů z různých škol a zkušenosti s ním má už více než 3 000 žáků.

Literatura a zdroje

- [1] GeoGebra [online]. [cit. 2013-03-21]. Dostupné z: <http://www.geogebra.org/>
- [2] GeoTest [online]. [cit. 2013-03-25]. Dostupné z: <http://geotest.geometry.cz/>
- [3] GeoTest! [online]. [cit. 2013-03-25]. Dostupné z: <http://drupal.geometry.cz/geotest>
- [4] GeoTest – Časté chyby aneb Jak řešit úlohy správně [online]. [cit. 2013-03-25]. Dostupné z: <http://geotest.geometry.cz/chyby.html>
- [5] Úlohy a jejich Z-varianty [online]. [cit. 2013-03-25]. Dostupné z: <http://drupal.geometry.cz/geotest-z-varianty>

- [6] Gergelitsová, Š., Holan, T., Řešení konstrukční úlohy – obrázek nebo algoritmus?, In: Sborník příspěvků 32. konference o geometrii a grafice, Vydavatelský servis, Plzeň s. 103–109.
- [7] Gergelitsová, Š., Holan, T. Pomocník pro učitele geometrie – automatické vyhodnocování konstrukčních úloh, In: Matematika-fyzika-informatika, Prometheus, Praha: 2012 s. 584–593.

RNDr. Šárka Gergelitsová, Ph.D.

RNDr. Tomáš Holan, Ph.D.

Kabinet software a výuky informatiky,

Matematicko-fyzikální fakulta

Univerzita Karlova v Praze

Malostranské nám. 25, 118 00 Praha 1

e-mail: sarka@gbn.cz

e-mail: Tomas.Holan@mff.cuni.cz

ABSTRACT

The paper analyzes school approaches to solving plane geometry problems and the requirements students should meet in solving them. Further, it presents a new utility, the GeoTest system, that provides users with an on-line environment for solving such problems and also with an instant automatic evaluation of the solutions of given tasks.

Elementary geometry tasks require students to deal with several processes at the same time. The evaluation of the correctness of students' answers makes high demands on teachers. Moreover, because drawing and problem solving (searching for a construction algorithm) are two different skills, their separation may help to improve students' success.

A Dynamic Geometry System helps to separate two sides of the solving process but it neither gives the student a satisfactory feedback including the evaluation of the correctness of the solution, nor facilitates a teacher's evaluation procedures. The system described in the article makes up for both these deficiencies.