Dag Hrubý

Kružnice dotýkající se stran trojúhelníku

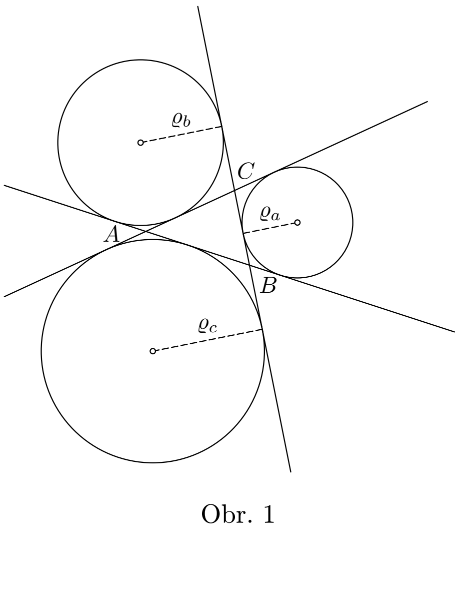
Učitel matematiky, Vol. 24 (2016), No. 4, 231–237

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/149407`

KRUŽNICE DOTÝKAJÍCÍ SE STRAN TROJÚHELNÍKU

Dag Hrubý

Úvodem poznamenejme, že kružnicí dotýkající se stran trojúhelníku ABC rozumíme kružnici, která se dotýká přímek AB, BC, AC. V publikaci [1] jsou kružnice dotýkající se stran trojúhelníku rozděleny podle toho, zda jsou nebo nejsou částí trojúhelníku. Kružnici, která se dotýká přímek AB, BC, AC a je částí trojúhelníku ABC, nazýváme kružnicí trojúhelníku vepsanou. Taková kružnice je jen jedna. Kružnici, která se dotýká přímek AB, BC, AC a není částí trojúhelníku ABC, nazýváme kružnicí trojúhelníku připsanou. Takové kružnice jsou tři.



Obr. 1

Zatímco s kružnicí trojúhelníku vepsanou se setkáme ve většině učebnic planimetrie (goniometrie, trigonometrie), je pojem kružnice trojúhelníku připsané, v současných učebnicích geometrie pro střední školy, zmíněn jen okrajově. Cílem tohoto článku je nejen připomenout pojem kružnice trojúhelníku připsané, ale také ukázat na konkrétních příkladech některé zajímavé vlastnosti kružnic trojúhelníku připsaných. Dříve než tak učiníme, vyřešíme tři úlohy týkající se kružnice trojúhelníku vepsané. Připomeňme si, že obvod trojúhelníku značíme $2s$, poloviční obvod pak s.

$$2s = a + b + c \qquad s = \frac{a+b+c}{2}$$

Příklad 1. Pro obsah S trojúhelníku platí: $S = \varrho \cdot s$. Dokažte. (ϱ značí poloměr kružnice trojúhelníku vepsané)

Řešení. Pro obsah trojúhelníku ABC platí: $S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COA}$, kde O je střed kružnice trojúhelníku vepsané. Po dosazení dostáváme

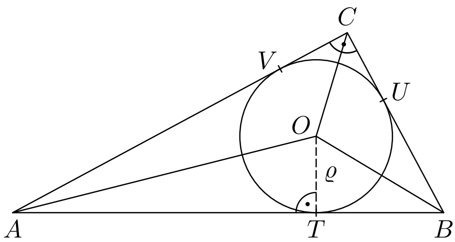
$$S_{ABC} = \frac{1}{2}c\varrho + \frac{1}{2}a\varrho + \frac{1}{2}b\varrho = \frac{1}{2}\varrho(a+b+c) = \frac{1}{2}\varrho\, 2s = \varrho s.$$

Příklad 2. Kružnice vepsaná pravoúhlému trojúhelníku ABC se dotýká přepony v bodě T. Pro obsah trojúhelníku ABC pak platí: $\mathcal{S} = |AT| \cdot |TB|$. Dokažte.

Řešení. Body dotyku kružnice vepsané se stranami BC, AC označme po řadě U, V. Střed kružnice vepsané označíme O. Položme $|AT| = x, |BT| = y$. Máme dokázat, že platí $S = xy$. Je-li ϱ poloměr kružnice vepsané, pak platí

$$a = \varrho + y; \qquad b = \varrho + x.$$

Nyní vyjádříme dvojím způsobem obsah trojúhelníku ABC.



Obr. 2

$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}(\varrho + y)(\varrho + x) = \frac{1}{2}(\varrho^2 + x\varrho + y\varrho + xy)$$

Druhý vztah pro obsah trojúhelníku získáme ze vztahu

$$S_{ABC} = S_{ATOV} + S_{BTOU} + S_{OUCV}.$$

Obsah trojúhelníku je roven součtu obsahů deltoidů $ATOV$, $BTOU$ a čtverce $OUCV$. Po dosazení dostáváme

$$S = x\varrho + y\varrho + \varrho^2.$$

Z porovnání obou vztahů pro obsah trojúhleníku plyne

$$S = \frac{1}{2}(\varrho^2 + x\varrho + y\varrho + xy);$$
$$S = \frac{1}{2}(S + xy);$$
$$S = xy.$$

Příklad 3. Rozhodněte, zda existuje pravoúhlý trojúhelník, jehož délky stran v centimetrech jsou vyjádřeny celými čísly a poloměr kružnice trojúhelníku vepsané je $\varrho = 6\,\mathrm{cm}$.

Řešení. Snadno nahlédneme, že platí

$$c^2 = a^2 + b^2;$$
$$c = a + b - 12.$$

Eliminací c dostaneme rovnici

$$72 + ab - 12a - 12b = 0,$$

kterou lze zapsat ve tvaru

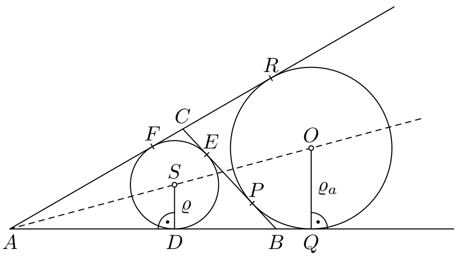
$$a = \frac{12b - 72}{b - 12} = 12 + \frac{72}{b - 12}.$$

Vzhledem k podmínce $a > 12, b > 12$ (zdůvodněte) a dále, že číslo $b - 12$ je dělitelem 72, dostáváme následující dvojice (a, b):

$$(13, 84); (14, 48); (15, 36); (16, 30); (18, 24); (20, 21);$$

$$(21, 20); (24, 18); (30, 16); (36, 15); (48, 14); (84, 13).$$

Existuje tedy 6 pravoúhlých pravoúhlých trojúhelníků, které mají požadovanou vlastnost.



Obr. 3

Uvažujme nyní kružnici $l(O, \varrho_a)$ připsanou trojúhelníku ABC, která se dotýká strany BC v bodě P a polopřímek AB, AC po řadě v bodech Q, R. Kružnice trojúhelníku vepsaná $k(S, \varrho)$ a která se dotýká stran AB, BC, AC po řadě v bodech D, E, F. Zavedeme-li nyní označení

$$|AD| = x; \qquad |CR| = y; \qquad |BQ| = z,$$

pak dostáváme následující soustavu rovnic

$$\begin{aligned} a &= b - x + c - x; \\ a &= y + z; \\ c + z &= b + y, \end{aligned}$$

která je ekvivalentní se soustavou

$$\begin{aligned} 2x &= b + c - a; \\ 2y &= a + c - b; \\ 2z &= a + b - c. \end{aligned}$$

Odtud již snadno plyne

$$x + y + z = \frac{a + b + c}{2} = s.$$

S využitím polovičního obvodu s můžeme vyjádřit x, y, z následovně

$$x = s - a; \qquad y = s - b; \qquad z = s - c.$$

Naším dalším úkolem bude určit vztah mezi poloměrem ϱ kružnice vepsané a poloměrem ϱ_a kružnice připsané. Z podobnosti trojúhelníků ADS a AQO plyne

$$\frac{\varrho_a}{\varrho} = \frac{|AQ|}{|AD|} = \frac{c + z}{x} = \frac{s}{s - a}.$$

Podobnou úvahou můžeme odvodit vztah mezi ϱ_b a ϱ a mezi ϱ_c a ϱ. Celkem dostáváme

$$\frac{\varrho_a}{\varrho} = \frac{s}{s - a}; \qquad \frac{\varrho_b}{\varrho} = \frac{s}{s - b}; \qquad \frac{\varrho_c}{\varrho} = \frac{s}{s - c},$$

resp.

$$S = \varrho_a(s - a); \qquad S = \varrho_b(s - b); \qquad S = \varrho_c(s - c).$$

Příklad 4. Pro obsah trojúhelníku platí $S = \sqrt{\varrho\varrho_a\varrho_b\varrho_c}$. Dokažte.

Řešení. V úvodu řešení si připomeňme Heronův vzorec pro obsah trojúhelníku:

$$S = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$$

Pro součin $\varrho\varrho_a\varrho_b\varrho_c$ dostáváme

$$\varrho\varrho_a\varrho_b\varrho_c = \varrho \cdot \frac{S}{s-a} \cdot \frac{S}{s-b} \cdot \frac{S}{s-c} = \frac{\varrho S^3}{(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Jmenovatele vyjádříme využitím Heronova vzorce a obdržíme

$$\varrho\varrho_a\varrho_b\varrho_c = \frac{\varrho S^3}{\frac{S^2}{s}} = \varrho s S = S^2.$$

Odtud již snadno plyne dokazovaný vztah $S = \sqrt{\varrho\varrho_a\varrho_b\varrho_c}$.

Příklad 5. Dokažte, že pro poloměry $\varrho_a, \varrho_b, \varrho_c$ kružnic připsaných trojúhelníku ABC a poloměr ϱ kružnice trojúhelníku ABC vepsané platí

$$\frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c} = \frac{1}{\varrho}.$$

Řešení. Vyjdeme ze vztahů $S = \varrho_a(s-a) = \varrho_a(s-b) = \varrho_a(s-c)$, které jsme odvodili výše. Zřejmě je

$$\frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c} = \frac{s-a}{S} + \frac{s-b}{S} + \frac{s-c}{S} = \frac{3s-(a+b+c)}{S} =$$
$$= \frac{3s-2s}{S} = \frac{s}{S} = \frac{1}{\varrho}.$$

Příklad 6. Dokažte, že pro poloměry $\varrho_a, \varrho_b, \varrho_c$ kružnic připsaných trojúhelníku ABC, poloměr ϱ kružnice trojúhelníku ABC vepsané a poloměr r trojúhelníku ABC opsané platí

$$\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c - \varrho = 4r.$$

Řešení. Vyjdeme opět ze vztahů $S = \varrho_a(s-a) = \varrho_a(s-b) = \varrho_a(s-c)$. Platí

$$\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c - \varrho = \frac{S}{s-a} + \frac{S}{s-b} + \frac{S}{s-c} - \frac{S}{s} =$$

$$= \frac{S(2s^3 - s^2b - s^2c - s^2a + abc)}{S^2} =$$
$$= \frac{1}{S}[2s^3 - s^2(a+b+c) + abc] = \frac{abc}{S} = 4r.$$

Zkuste si nyní sami dokázat následující vzorce.

$$S = \varrho^2 \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}$$
$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{v_a} + \frac{1}{v_b} + \frac{1}{v_c}$$

Literatura

[1] Sedláček, J. a kol. (1981). *Slovník školské matematiky*. Praha: SPN.

[2] Schuster, M. (1911). *Trigonometrie*. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner.

[3] Sivák, B. (1991). Úlohy pre prácu matematických krúžkov. *Matematické obzory*, zväzok 36, str. 52.

Abstract

The goal of the article is to point out the concept of the escribed circle of the triangle which is only touched on in present secondary mathematics textbooks. Interesting properties of escribed circles of the triangle are shown on three examples.

Dag Hrubý
K. H. Borovského 476
569 43 Jevíčko
e-mail: hruby@gymjev.cz