Šárka Pěchoučková

Armáda v Kocourkově a Čínská věta

Učitel matematiky, Vol. 24 (2016), No. 3, 174–181

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149400

ARMÁDA V KOCOURKOVĚ A ČÍNSKÁ VĚTA

Šárka Pěchoučková

Na základní škole se při probírání elementárních poznatků o dělitelnosti často řeší příklady, které mají procvičit nalezení nejmenšího společného násobku přirozených čísel. Do učebnic matematiky jsou obvykle zařazovány úlohy následujícího typu:

Úloha 1. Vrchní velitel královské armády v Kocourkově nechal své vojáky nastoupit nejprve do dvojstupu, pak do trojstupu, do čtyřstupu, do pětistupu a konečně do šestistupu. Pokaždé zbyl jeden voják. Teprve když je nechal nastoupit do sedmistupu, nezbyl žádný. Kolik muselo být v armádě nejméně vojáků?

Podobné úlohy jsou speciálním případem jednoho slavného problému, který se objevil ve 4. st. n. l. v Matematickém traktátu. Jeho autorem je staročínský matematik Sun-c':

Úloha 2. Je dán neznámý počet věcí. Jsou-li počítány po trojicích, zbývají dvě; jsou-li počítány po pěticích, zbývají tři; jsou-li počítány po sedmi, zbývají dvě. Urči nejmenší možný počet těchto věcí. Najdeš ještě další řešení?

I tato úloha se dá vyřešit se žáky základní školy a necháme na čtenáři, aby sám dospěl k výsledku.

Teoretický základ řešení obou úloh spočívá ve známé Čínské větě o zbytcích. Než ji vyslovíme, připomeneme si několik algebraických pojmů.

Definice. Nechť a, b jsou celá čísla a m je přirozené číslo větší než jedna. Jestliže číslo m dělí $a - b$ ($m \mid a - b$), pak říkáme, že číslo a je kongruentní s číslem b podle modulu m.
Zapisujeme: $a \equiv b \pmod{m}$.

Relace „býti kongruentní podle modulu m“ je reflexivní, symetrická a tranzitivní. Jedná se tedy o relaci ekvivalence. Dále platí:

Jestliže $a \equiv b \pmod{m}$ a z je libovolné celé číslo, pak

$$a + z \equiv b + z \pmod{m},$$
$$a \cdot z \equiv b \cdot z \pmod{m}.$$

Jestliže $a \equiv b \pmod{m}$ a $c \equiv d \pmod{m}$, pak

$$a + c \equiv b + d \pmod{m},$$
$$a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}.$$

Připomněli jsme si základní algebraické pojmy a můžeme vyslovit větu.

Věta (Čínská věta o zbytcích)**.** *Nechť r, s jsou nesoudělná celá čísla větší než jedna. Nechť u, v jsou libovolná celá čísla. Potom existuje takové číslo a, pro které platí:*

$$a \equiv u \pmod{r},$$
$$a \equiv v \pmod{s}.$$

Obecně: *Nechť $m_1, m_2, \dots, m_n$ jsou celá čísla větší než jedna, která jsou po dvou nesoudělná. Nechť $u_1, u_2, \dots, u_n$ jsou libovolná celá čísla. Pak existuje celé číslo a, pro které platí:*

$$a \equiv u_i \pmod{m_i} \quad \textit{pro } i = 1, 2, \dots, n.$$

Důkaz. Uvažujme s čísel $u, u + r, u + 2r, \dots, u + (s - 1)r$. Každé z nich je kongruentní s číslem u podle modulu r a žádná dvě z nich nejsou kongruentní podle modulu s. Kdyby platilo

$$u + ir \equiv u + jr \pmod{s} \quad \text{pro } 0 \le i < j < n.$$

potom

$$u + ir - u - jr \equiv 0 \pmod{s},$$
$$r(i - j) \equiv 0 \pmod{s}.$$

Protože čísla r, s jsou nesoudělná, vztah platí za předpokladu, že $s \mid i - j$. Protože $0 \le i < j < n$, musí být $i = j$. Tedy čísla $u, u + r, u + 2r, \dots, u + (s - 1)r$ jsou kongruentní s čísly $0, 1, 2, \dots, s - 1$ podle modulu s v nějakém pořadí s. Proto pro některé i platí $u + ri \equiv v \pmod{s}$. Stačí tedy položit $a = u + ri$.

Obecnou větu dokážeme pomocí matematické indukce podle k. Nechť $c = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_{k-1}$. Zvolíme číslo u tak, aby platilo $u \equiv u_i \pmod{m_i}$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Vytvoříme čísla $u, u+c, u+ + 2c, \ldots, u + (m_k - 1)\,c$. Potom platí $u + ic \equiv u_i \pmod{m_i}$, $i = = 1, 2, \ldots, k-1$ a žádné dvě z uvedených čísel nejsou kongruentní podle modulu m_k. □

Čínskou větu o zbytcích můžeme použít při řešení následujících problémů.

Úloha 3.

a) Existuje takových n za sebou jdoucích celých čísel, že j-té číslo, $1 \le j \le n$, má dělitele, který nedělí žádné jiné číslo této posloupnosti?

b) Existuje n za sebou jdoucích celých čísel tak, že j-té číslo, $1 \le j \le n$, má aspoň j dělitelů, ze kterých žádný nedělí jiné číslo uvedené posloupnosti?

([2], s. 129)

Podívejme se nyní na zadání obou úloh, které je trochu zavádějící. Z textu totiž není patrné, zda se jedná o prvočíselné dělitele nebo o všechny možné dělitele. Pokud bychom uvažovali pouze prvočíselné dělitele, pak by hodnota n byla omezená – v úloze a) by n mohlo být pouze číslo 2, v úloze b) pouze čísla 2 a 3. Zkusíme tedy úlohy přeformulovat tak, aby bylo jasné, že uvažujeme všechny dělitele čísla.

a) Existuje takových n za sebou jdoucích celých čísel, že v množině dělitelů j-tého čísla, $1 \le j \le n$, najdeme takového dělitele, který nedělí žádné jiné číslo této posloupnosti?

b) Existuje n za sebou jdoucích celých čísel tak, že j-té číslo, $1 \le j \le n$, má aspoň j dělitelů takových, že žádný z těchto j dělitelů nedělí žádné jiné číslo uvedené posloupnosti?

Řešení. Nechť je dáno n. Symbolem p_1 označíme prvočíslo větší než n, p_2 bude prvočíslo větší než p_1, p_3 prvočíslo větší než p_2 atd. Platí tedy $n < p_1 < p_2 < p_3 < \ldots$

Položme nyní:

$$
\begin{aligned}
q_1 &= p_1 \\
q_2 &= p_2 \cdot p_3 \\
q_3 &= p_4 \cdot p_5 \cdot p_6 \\
&\vdots \\
q_k &= p_{n_k+1} \cdot \ldots \cdot p_{n_{k+1}}, \text{ kde } n_k = \frac{k(k-1)}{2}
\end{aligned}
$$

Podle Čínské zbytkové věty existuje takové číslo a, pro které platí

$$a + i \equiv 0 \pmod{q_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Posloupnost $a+1, a+2, \ldots, a+n$ je posloupností s požadovanou vlastností, neboť platí

$$
\begin{aligned}
q_1 &\mid a+1 \\
q_2 &\mid a+2 \\
&\vdots \\
q_n &\mid a+n
\end{aligned}
$$

Tedy číslo $a+j$ je dělitelné číslem q_j. Z konstrukce čísla q_j vyplývá, že je to dělitel pouze čísla $a+j$.

Našli jsme tedy posloupnost $a+1, a+2, \ldots, a+n$, která obsahuje n za sebou jdoucích celých čísel tak, že množina dělitelů j-tého čísla $a+j$, $1 \leq j \leq n$, obsahuje takového dělitele q_j, který nedělí žádné jiné číslo této posloupnosti.

Protože číslo $q_j = p_{n_j+1} \cdot \ldots \cdot p_{n_{j+1}}$, kde $n_j = \frac{j(j-1)}{2}$, je číslo $a+j$ dělitelné každým z j prvočísel, a protože každé p_i je větší než n, je to dělitel pouze jednoho členu posloupnosti.

Našli jsme tedy n za sebou jdoucích čísel $a+1, a+2, \ldots, a+n$ tak, že j-té číslo, $1 \leq j \leq n$, má j dělitelů, ze kterých žádný nedělí žádné jiné číslo této posloupnosti. Tvrzení tedy platí pro všechna n.

Pro demonstraci úlohy 3 můžeme použít konkrétní příklady:

a) Vybereme posloupnost devíti po sobě následujících celých čísel, např. 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29. Množina dělitelů čísla 25 obsahuje čísla 1, 5, 25. Platí přitom, že číslo 5 nedělí žádné další číslo z uvedené posloupnosti. Pokud u každého z dalších čísel této posloupnosti vybereme z množiny dělitelů těchto čísel největšího dělitele, což je číslo samo, pak tento největší dělitel nedělí žádné další číslo z uvedené posloupnosti. Např. největším dělitelem čísla 22 je právě číslo 22 a to nedělí žádné z čísel 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29. Podobně to platí i pro zbylá čísla posloupnosti.
b) Vezmeme nyní posloupnost celých čísel 37, 38, 39, 40. Vypíšeme si množiny dělitelů těchto čísel a budeme sledovat uvedenou vlastnost:
$D(37) = \{1, 37\}$ Číslo 37 nedělí žádné jiné číslo uvedené posloupnosti.
$D(38) = \{1, 2, 19, 38\}$ Čísla 19 a 38 nedělí žádné jiné číslo uvedené posloupnosti.
$D(39) = \{1, 3, 13, 39\}$ Čísla 3, 13 a 39 nedělí žádné jiné číslo uvedené posloupnosti.
$D(40) = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$ Čísla 4, 5, 10, 20, 40 nedělí žádné jiné číslo uvedené posloupnosti.

Vraťme se nyní k matematice na základní škole. Učivo o dělitelnosti přirozených čísel nejen vyžaduje od žáků osvojit si určité matematické poznatky, ale také jim poskytuje prostor pro rozvíjení logického myšlení a schopnosti správně usuzovat. Zároveň formuje kombinační myšlení dětí. Slovní úlohy na dělitelnost jsou buď matematické úlohy, nebo rozmanité úlohy z praxe. Některé z nich můžeme zařadit mezi úlohy zajímavé.

Následující sada úloh je určena pro žáky šestých a sedmých ročníků základní školy. Obsahuje úlohy, jejichž teoretickým základem je Čínská věta o zbytcích, ale i další typy příkladů, které využívají poznatky o dělitelnosti přirozených čísel. Jejich obtížnost postupně vzrůstá od nejjednodušších, které by měli zvládnout všichni žáci, až po náročnější, věnované především těm, kteří se o matematiku zajímají hlouběji.

Úloha 4. Kterými z čísel 2, 3, 4, 5, 9, 10 jsou dělitelná čísla 456; 18 540; 457 395?

Úloha 5. Vypište všechna čtyřciferná sudá čísla menší než 6 000, která lze vytvořit z číslic 5, 2, 6, 3. Každou číslici můžete použít jen jednou.

Úloha 6. Doplňte číslice tak, aby čísla 28 54_; 19_276; 6_28 byla dělitelná
a) čtyřmi; b) třemi; c) devíti; d) šesti.
Najděte všechny možnosti.

Úloha 7. Najděte všechna čísla x dělitelná čtyřmi, pro která platí:
a) x je dvojciferné číslo větší než 78;
b) x je trojciferné číslo menší než 134.

Úloha 8. Najděte
a) tři dvojciferná přirozená čísla, mezi jejichž dělitele patří i prvočísla 2 a 5;
b) dvě trojciferná přirozená čísla, mezi jejichž dělitele patří i prvočísla 3, 5 a 11;
c) dvě čtyřciferná přirozená čísla, mezi jejichž dělitele patří i prvočísla 7 a 13.

Úloha 9. Aleš se chlubí kamarádům: „Částka, kterou jsem si vydělal na brigádě, je nejmenší číslo, které je beze zbytku dělitelné čísly od jedné do deseti." Kolik korun si Aleš vydělal?

Úloha 10. Hradní stráž neměla více než 60 vojáků. Když šli všichni v trojstupu, zbýval jeden, ve čtyřstupu zbývali dva. V pětistupu zbývali tři vojáci, v šestistupu čtyři. Kolik vojáků měla hradní stráž?

Úloha 11. Najděte všechna čísla menší než 40, která mají ve svém prvočíselném rozkladu právě tři prvočísla (tato prvočísla nemusí být různá).

Úloha 12. Která dvě čísla mají největšího společného dělitele číslo 12 a nejmenší společný násobek číslo 72? Žádné z hledaných čísel není dělitelem druhého čísla.

Úloha 13. Není to více než dvanáct let, co Vítkův dědeček oslavil sedmdesáté narozeniny. Všechna čísla v jeho datu narození (den, měsíc a rok) jsou dělitelná číslem 6. Určete všechny možnosti, kdy se mohl Vítkův dědeček narodit.

Úloha 14. Libor a Ríša pozorovali světelné nápisy na mrakodrapu. Zjistili, že nápisy se rozsvěcují a zhasínají v pravidelných intervalech. Červený nápis se rozsvítí vždy po půl minutě, žlutý každých 20 sekund a zelený v intervalu 1,5 minuty. V jednom okamžiku se rozsvítily všechny nápisy současně. Libor tvrdil, že současně svítit všechny nápisy uvidí nejdříve za deset minut. Měl pravdu?

Úloha 15. K otevření sejfu je zapotřebí zjistit tři čísla. První číslo je menší než 25 a dělitelné šesti. Druhé číslo je liché, větší než 19 a menší než 25. Třetí číslo je součtem prvních dvou čísel zvětšeným o 1. Součet všech tří čísel je 83. Dovedli byste sejf otevřít, jestliže žádné z čísel se neopakuje?

Úloha 16. Ohýbáním drátu se může vytvarovat jeden čtverec nebo postupně osm různých obdélníků. (Když obrazec vytvarujeme, drát natáhneme a tvoříme další obrazec.) Jak dlouhý musí být drát, jestliže délky stran všech obrazců v centimetrech jsou přirozená čísla? Určete rozměry všech obrazců.

Úloha 17. Dvě stěny kvádru mají obsah $140\,\mathrm{cm}^2$ a $308\,\mathrm{cm}^2$. Délky hran v centimetrech jsou přirozená čísla. Jaký objem může mít kvádr?

Úloha 18. Šestidenní schůzky mágů na Čarodějnické univerzitě ve městě Vanku se zúčastnili tři hosté: mág Belánius ze Solat, čaroděj Valibus z Iberie a čarodějka Daráta z Larie. Každý z nich cestuje dostavníkem. Do Solat odjíždí dostavník každý pátý den. Dostavník do Iberie jezdí každých sedm dní. Jednou za tři dny můžete dostavníkem vyjet do Larie. Všichni mágové odjížděli ze schůzky dostavníky 7. února. Kolikrát se mohou během tohoto roku ještě setkat?

Dělitelnost přirozených čísel je zajímavé téma. Snad k jeho oblíbenosti přispěje i sada uvedených úloh.

Literatura

[1] Juškevič, A. P. (1977). *Dějiny matematiky ve středověku.* Praha: Akademia.

[2] Larson, L. C. (1990). *Metódy riešenia matematických problémov.* Bratislava: Alfa.

[3] *Mathematics Magazine*, Vol. 54, No. 5 (1981), 272–284.

Výsledky některých úloh
U1: 301 vojáků **U2**: nejméně 23, pak vždy o 105 více **U5**: celkem 10 čísel **U9**: 2 520 Kč **U10**: 58 vojáků **U11**: 8, 12, 18, 20, 27, 28, 30 **U12**: 24 a 36 **U13**: Den: 6, 12, 18, 24, 30; Měsíc: 6, 12; Rok (závisí na roce, kdy je úloha řešitelům zadána): např. při zadání nejpozději v roce 2020 jsou řešením roky 1938 a 1944 **U14**: ne, uvidí je za 3 minuty **U15**: 18 23 42 **U16**: délka drátu 36 cm, čtverec $a = 9$ cm, obdélníky 1 cm a 17 cm, 2 cm a 16 cm, 3 cm a 15 cm, 4 cm a 14 cm, 5 cm a 13 cm, 6 cm a 12 cm, 7 cm a 11 cm, 8 cm a 10 cm **U17**: 21,56 dm^3; 10,78 dm^3; 6,16 dm^3; 1,54 dm^3; 3,08 dm^3; 43,12 dm^3 **U18**: mohou se sejít ještě třikrát (za 105 dní, za 210 dní, za 315 dní).

Abstract

When elementary knowledge about divisibility of natural numbers is being taught at elementary schools, word problems are dealt with, whose theoretical base is the Chinese remainder theorem. This theorem can also be used for the solution of more difficult problems. One of them is quoted in this article and is intended mainly for teachers. A set of word problems for sixth- and seventh-grade pupils, whose difficulty increases gradually, is included. Problems based on the Chinese remainder theorem and problems on the divisibility of natural numbers are given.

Šárka Pěchoučková
KMT FPE ZČU v Plzni
Klatovská 51
306 00 Plzeň
e-mail: pechouck@kmt.zcu.cz