Emil Calda

Znovu o pravoúhlém trojúhelníku

Učitel matematiky, Vol. 24 (2016), No. 1, 61–64

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149382

ZNOVU O PRAVOÚHLÉM TROJÚHELNÍKU

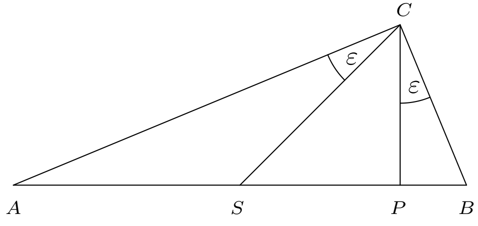
Emil Calda

Přestože vlastnosti pravoúhlého trojúhelníku jsou poměrně dobře známé, stále se ještě dají najít takové, které příliš známé nejsou a jejichž odvození může být dobrým cvičením, a to nejen pro žáky a studenty. Za příklad může sloužit článek [1], v němž je dokázáno:

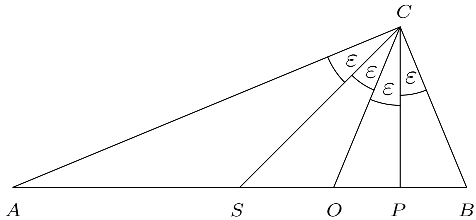
Věta 1. *Dělí-li těžnice a výška z téhož vrcholu vnitřní úhel trojúhelníku na tři shodné úhly, je tento trojúhelník pravoúhlý s ostrými úhly o velikostech 30° a 60°.*

Tento výsledek mě inspiroval k tomu, abych se pokusil zjistit, jaké vlastnosti má trojúhelník, v němž těžnice, výška a osa úhlu z téhož vrcholu dělí vnitřní úhel na čtyři shodné úhly. Po několika marných pokusech jsem si všiml, že odpověď na tuto otázku je v uvedeném článku skrytě obsažena a že zjistit vlastnosti trojúhelníku splňujícího uvedené podmínky je velmi jednoduché. Použijeme k tomu větu, která je – kromě věty uvedené výše – v článku dokázána, dokonce několika způsoby:

Věta 2. *Jsou-li podle obr. 1 v trojúhelníku ABC s těžnicí CS a výškou CP, kde $S \neq P$, úhly ACS a PCB shodné a výška CP je částí úhlu ACB, je trojúhelník ABC pravoúhlý s přeponou AB.*



Obr. 1



Obr. 2

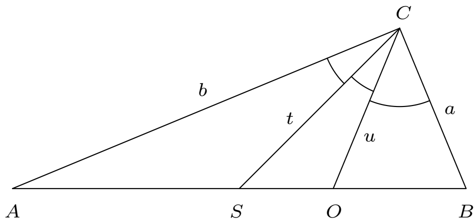
Majíce větu 2 na paměti, podívejme se na obr. 2, kde je zobrazen trojúhelník ABC, v němž těžnice CS, osa CO úhlu a výška CP dělí vnitřní úhel při vrcholu C na čtyři shodné úhly. Protože úhly ACS a PCB jsou shodné, je tento trojúhelník podle věty 2 pravoúhlý s přeponou AB. Znamená to, že trojúhelník ASC je rovnoramenný, takže úhel při vrcholu A má velikost ε; z pravoúhlého trojúhelníku APC však plyne, že velikost tohoto úhlu je $90° - 3\varepsilon$. Z těchto dvou výsledků pro velikost úhlu při vrcholu A dostáváme: $\varepsilon = 22{,}5°$. Odvodili jsme tak větu:

Věta 3. *Dělí-li těžnice, osa úhlu a výška z téhož vrcholu vnitřní úhel trojúhelníku na čtyři shodné úhly, je tento trojúhelník pravoúhlý s ostrými úhly o velikostech 22,5° a 67,5°.*

Povzbuzen tímto úspěchem, dovolím si vyřešit ještě jednu úlohu týkající se pravoúhlého trojúhelníku; určíme jeho obsah pomocí osy pravého úhlu a těžnice spuštěné z jeho vrcholu. Předem upozorňuji na to, že v následujícím textu písmeno S bude znamenat jednak střed přepony pravoúhlého trojúhelníku, jednak obsah tohoto trojúhelníku. Domnívám se, že ze souvislosti bude vždy zřejmé, co toto písmeno označuje.

V pravoúhlém trojúhelníku ABC na obr. 3 je bod S středem přepony AB a bod O její průsečík s osou úhlu při vrcholu C. Určíme obsah tohoto trojúhelníku, známe-li pouze velikosti úseček CS a CO, tj. velikost těžnice z vrcholu C a velikost osy zmíněného úhlu.

Označme $u = |CO|$, $t = |CS|$ a všimněme si, že obsah trojúhelníku ABC je roven součtu obsahů trojúhelníků AOC a OBC,



Obr. 3

takže platí

$$\frac{1}{2}ub\sin 45^\circ + \frac{1}{2}ua\sin 45^\circ = \frac{1}{2}ab.$$

Po snadné úpravě dostaneme

$$u(a+b) = ab\sqrt{2},$$

neboli

$$a^2 + b^2 = \frac{2a^2b^2}{u^2} - 2ab.$$

Ze vztahu $|CS| = \frac{1}{2}|AB|$ je však také

$$a^2 + b^2 = 4t^2,$$

což spolu s rovností předcházející dává

$$\frac{2a^2b^2}{u^2} - 2ab - 4t^2 = 0.$$

Uvědomíme-li si, že pro obsah S daného trojúhelníku platí $ab =$ $= 2S$, můžeme po snadné úpravě zapsat tento vztah ve tvaru

$$2S^2 - Su^2 – t^2u^2 = 0$$

a získat tak kvadratickou rovnici s neznámou S.

Vzhledem k tomu, že její diskriminant $D = u^2\left(u^2 + 8t^2\right)$ je kladné číslo, má tato rovnice dva reálné kořeny, z nichž vyhovuje pouze ten kladný:

$$S = \frac{1}{4}u\left(u + \sqrt{u^2 + 8t^2}\right).$$

Tím je daná úloha vyřešena:

Pro obsah S pravoúhlého trojúhelníku platí: $S = \frac{1}{4}u\big(u + \sqrt{u^2 + 8t^2}\,\big)$, kde t je velikost těžnice spuštěné z vrcholu pravého úhlu a u je velikost osy tohoto úhlu.

Ověřme získaný výsledek pro případ, že pravoúhlý trojúhelník ABC je rovnoramenný s přeponou AB o velikosti c a s odvěsnami AC, BC o velikosti a; jeho obsah S je zřejmě roven $\frac{1}{2}a^2$. Protože v tomto trojúhelníku je $u = t$, dosazením do získaného vzorce dostaneme pro jeho obsah S:

$$S = \frac{1}{4}t\left(t + \sqrt{t^2 + 8t^2}\right) = \frac{1}{4}t(t + 3t) = t^2.$$

Vezmeme-li ještě v úvahu, že v pravoúhlém trojúhelníku je $t = \frac{1}{2}c$, platí:

$$t^2 = \frac{1}{4}c^2 = \frac{1}{4}\left(a^2 + a^2\right) = \frac{1}{2}a^2,$$

což s odvozeným vztahem souhlasí.

Literatura

[1] Kuřina, F. (2014). QED (latinsky) $\neq$ QED (anglicky), *Učitel matematiky*, 22(4), 206–217.

Abstract

In the first part of the article the proof of the following theorem is given: Let point S be the middle of AB in the triangle ABC, point O the intersection of AB and the axis of angle ACB, point P the foot of the perpendicular from C on AB. If angles ACS, SCO, OCP, PCB are equal, then the angle BCA is the right one. In the second part, the area of right angle triangle using only the length of the axis of the right angle and of the median is derived.

Emil Calda
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
e-mail: Emil.Calda@mff.cuni.cz