Dag Hrubý
Setkání s Liping Ma

Učitel matematiky, Vol. 29 (2021), No. 4, 237–249

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149315

SETKÁNÍ S LIPING MA

Dag Hrubý

Českému čtenáři, zejména učitelům matematiky, se dostává do rukou kniha *Znát a učit elementární matematiku* (Ma, 2021), která vyšla poprvé v roce 1999. Jak uvádí její překladatel, RNDr. Jiří Rákosník, CSc., je tato kniha i po dvaceti letech stále aktuální, a přestože se zabývá situací v USA a Číně, její doporučení mají plnou platnost i pro Českou republiku. Rád bych na tomto místě vyslovil poděkování a uznání Jiřímu Rákosníkovi, že se rozhodl knihu přeložit a rozšířit tak nepříliš bohatou literaturu týkající se didaktiky matematiky.

S jménem Liping Ma se mohli učitelé matematiky seznámit již dříve. Připomínám zejména článek (Barbeau, 2008). Kniha je citována také v článku (Kuřina, 2012), ve kterém je diskutován pojem „důkladné porozumění matematickým základům" (profound understanding of fundamental), který je ústředním pojmem knihy Liping Ma. Přesto se domnívám, že její vliv na na výuku matematiky na základních školách v České republice byl, na rozdíl od jiných zemí, minimální, na tzv. kurikulární reformu pak žádný. Přál bych si, spolu s Jiřím Rákosníkem, aby překlad knihy Liping Ma přispěl ke zlepšení výuky matematiky na našich základních školách.

Podrobnou recenzi knihy (Ma, 2021) si můžeme přečíst v článku (Bečvář, 2021). Zde se více zaměříme na čtyři hlavní problémy, kterými se zabývala Liping Ma s americkými a čínskými učiteli. Dříve než tak učiníme, připomeneme si dva důležité pojmy, které Liping Ma často používá při hodnocení práce amerických a čínských učitelů. Jedná se o znalosti konceptů a znalosti procedurální. Znalost konceptů zahrnuje znalost vzájemných vztahů mezi základními prvky uvnitř větších struktur, které umožňují jejich vzájemné fungování. Procedurální znalosti zahrnují znalosti týkající se toho, jak něco dělat, metody dotazování, kritéria pro využívání algoritmů, technik a metod apod. (Byčkovský & Kotásek, 2004).

Liping Ma (*1957) začínala jako učitelka na základní škole v Číně. Doktorát z didaktiky matematiky získala na Stanfordově univerzitě v USA. Svým výzkumem a promyšlenými návrhy zásadně ovlivnila debaty o výuce matematiky na školách v USA a v dalších zemích. Zařadila se mezi nejvýznamnější didaktiky matematiky současnosti.

Kniha Liping Ma, v rozsahu 239 číslovaných stran, je členěna do sedmi kapitol:

1. Odčítání s přeskupováním: přístupy k výuce tématu.
2. Násobení víceciferných čísel: práce s chybami žáků.
3. Tvorba interpretací: dělení zlomkem.
4. Prozkoumávat nové znalosti: vztah mezi obvodem a obsahem.
5. Znalosti obsahu: důkladné porozumění matematickým základům.
6. Důkladné porozumění matematickým základům: kdy a jak se ho dosáhne?
7. Závěr.

Neobvykle rozsáhlý je i úvod k této knize, který obsahuje úvodní slovo překladatele, autorčinu předmluvu k jubilejnímu vydání, úvod redaktora ediční řady k tomuto jubilejnímu vydání, poznámku k jubilejnímu vydání, předmluvu od Lee S. Shulmana, školitele Liping Ma, její poděkování a vlastní úvod. Autorka ve své předmluvě nabízí dva obrazy matematického vzdělávání – ve Spojených státech a v Číně. Skupina amerických učitelů, která se zúčastnila rozhovorů s Liping Ma, dostala otázky ze čtyř témat elementární školské matematiky. Stejné otázky dostala skupina čínských učitelů. Srovnání jejich odpovědí tvoří hlavní část této knihy. Ve srovnání se svými americkými protějšky byli čínští účastníci rozhovorů zběhlejší v procedurálních aspektech všech čtyř témat, zvláště těch náročnějších, které se týkaly dělení zlomkem, obsahu a obvodu čtverce a obdélníku. Ani jeden čínský učitel nezaváhal při použití vzorců pro výpočet obvodu a obsahu obdélníku a čtverce, takovou jistotu a schopnost však neprojevil téměř žádný z amerických učitelů. To se mi zdá skoro neuvěřitelné. Odpovědi čínských učitelů také prokazovaly značnou hloubku, pokud jde o konceptuální porozumění. Příklady uvedené v knize ukazují, že když čínští učitelé vysvětlují logické odůvodnění používaných aritmetických algoritmů, dělají to přesvědčivěji, srozumitelněji a podrobněji než američtí učitelé. Zdá se, že matematické znalosti čínských učitelů jsou mnohem rozvinutější než znalosti amerických učitelů.

Liping Ma se zamýšlí také nad historickou paralelou vývoje výuky aritmetiky v Číně a ve Spojených státech. Připomíná, že první čínskou učebnici západní aritmetiky napsal koncem osmdesátých let 19. století americký misionář Calvin Wilson Mateer. Číňané v té době neznali vodorovný zápis čísel. Mateerova učebnice byla zaměřena na úlohy, které se týkaly každodenního společenského a hospodářského života. V době, kdy se Mateerova učebnice aritmetiky začala v Číně šířit, dochází podle Liping Ma ve Spojených státech a Evropě ke změnám v matematickém vzdělávání. Objevují se snahy vytvořit deduktivní systém pro aritmetiku po vzoru Eukleidových *Základů,* které ukazují, jak lze matematické znalosti z Eukleidovy doby odvodit pomocí deduktivního systému založeného na několika základních principech. I když se přístupy k vytvoření takového systému v aritmetice lišily, měly společný cíl: vytvořit deduktivní systém pro aritmetiku a tento systém zapracovat do učebnic matematiky pro základní školy. S deduktivním systémem přestala být aritmetika jen „praktickou“ a stala se „teoretickou“. Nejde tedy jen o otázku „jak“, ale také o otázku „proč“. Liping Ma uvádí, že vybudování deduktivního systému pro aritmetiku bylo zásadním krokem pro porozumění matematice.

To, čím na americké publikum zapůsobily rozhovory, které vedla Liping Ma s čínskými učiteli – jejich porozumění pojmům elementární matematiky – jednoduše dokládá, že tito učitelé chápou deduktivní systém pro aritmetiku, který byl vybudován americkými a evropskými učenci. V závěru předmluvy klade Liping Ma následující otázky. Proč se obsah čínského matematického vzdělávání, původně převzatý ze Spojených států, najednou zdá učitelům a didaktikům v této zemi tak zvláštní, tak nový? A jak je možné, že „následovník“ amerického matematického vzdělávání, který byl tak pozadu před sto lety, má najednou podle všeho tak velký náskok? Liping Ma se domnívá, že deduktivní systém aritmetiky vytvořený matematickými odborníky byl původně prezentován typickým matematickým způsobem. Z pohledu laiků to bylo nezáživné, otravné a nesmyslné. Jestliže to tak cítili dospělí laici, pro školní děti mohl být deduktivní systém ještě nepřístupnější. Její hypotéza je, že potíže s překonáváním této překážky byly hlavní příčinou toho, že se matematické vzdělávání ve Spojených státech vydalo jiným směrem. Matematické vzdělávání v jiných zemích včetně Číny neměnilo směr a nadále zahrnovalo deduktivní systém pro aritmetiku. Nakonec zde našli způsoby, jak potíže překonat, a dokázali žáky ve škole učit aritmetiku s deduktivním systémem. Aritmetika s deduktivním systémem tvořila a stále tvoří jádro obsahu elementární matematiky v mnoha zemích, jejichž žáci podávají lepší výkony než ti američtí. V závěru své předmluvy Liping Ma uvádí, že transformovaná aritmetika, k níž američtí odborníci přispěli, byla v jejich zemi opuštěna bez důkladného uvážení.

Hlavní část knihy je věnována studii, které se zúčastnili američtí a čínští učitelé. Ze Spojených států to bylo 23 učitelů „lepších než průměr“ a z Číny 72 učitelů pěti čínských základních škol různé úrovně. Američtí učitelé se sami hodnotili jako „znalí matematiky”, zatímco čínští učitelé tvořili reprezentativnější vzorek. Učitelé se měli vyjádřit – jak po matematické, tak po pedagogické stránce – k následujícím čtyřem problémům:

1. Jak učit odčítání dvojciferných čísel při přechodu přes desítku?
2. Jak reagovat na nesprávné násobení víceciferných čísel?
3. Jak určit podíl $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$ a předložit reálný model („příběh“) tohoto výpočtu?
4. Jak odpovědět žákovi, který tvrdí: protože obdélník 4×4 má obvod 16 a obsah 16 a obdélník 4×8 má obvod 24 a obsah 32, roste obsah uzavřeného obrazce s rostoucím obvodem?

Ke každému problému je uveden scénář, ve kterém je daný problém formulován. V každém scénáři jsou americkým a čínským učitelům položeny otázky týkající se objasnění daného problému nebo komunikace se žáky, popř. je požadováno popsat, jak by učitelé přistupovali k danému problému ve výuce.

> Problém 1
>
> Scénář. Věnujme nějaký čas přemýšlení o jednom specifickém tématu, se kterým můžete pracovat při výuce: odčítání s přeskupováním. Podívejte se na následující příklady: $52 - 25, 91 - 79$, atd. [v knize psáno pod sebou]. Jak byste k těmto úlohám přistupovali, kdybyste učili ve druhém ročníku? Čemu by podle vás měli žáci rozumět nebo co by měli umět dělat, než se mohou začít učit odčítání s přeskupováním? (Ma, 2021, s. 1)

Když je číslice na místě nižšího řádu v menšiteli větší než číslice na odpovídajícím místě v menšenci, žáci nemohou provádět výpočet přímo. Aby odečetli 49 od 62, musejí se naučit odčítání s přeskupováním (subtraction with regrouping): ${}^{5}\cancel{6}^{1}\,2 - 49 = 13$. V českém prostředí se tento postup nepoužívá. Místo něj provádíme tzv. odčítání s přechodem přes desítku. Ačkoli se tento problém jeví jako jednoduchý, ne všichni učitelé si byli vědomi koncepčního schématu odčítání přeskupováním. Z 23 amerických učitelů se 19 učitelů soustředilo pouze na postup. Předpokládali, že se jejich žáci naučí, jak provést dva konkrétní kroky: vzít jednu desítku z pozice desítek a proměnit ji na deset jednotek. Podíl čínských učitelů, jejichž způsob myšlení byl takto procedurálně orientovaný, byl podstatně menší. Místo „proměňování desítek na jednotky“ hovoří čínští učitelé o „rozkládání jednotky vyššího řádu“. Čínští učitelé tvrdili, že žáci musejí mít jasnou představu o „základu číselné soustavy“, aby lépe chápali, proč se jednotka vyššího řádu rozkládá na deset jednotek nižšího řádu. Rozebírali také různé způsoby přeskupování. Při řešení úlohy $53 - 26$ uvedli následující způsoby (Ma, 2021, s. 15):

a) Číslo 53 přeskupíme do tvaru $53 = 40 + 13$. Takto můžeme odečíst 6 od 13 a 20 od 40 a dostaneme 27.

b) Číslo 53 přeskupíme do tvaru $53 = 40 + 10 + 3$. Odečtením 6 od 10 dostaneme 4, přičteme 4 k 3 a dostaneme 7, odečteme 20 od 40, přičteme 7 k 20 a dostaneme 27. Výhoda tohoto způsobu přeskupování je v tom, že je snažší odečíst 6 od 10 než od 13. Sčítání v tomto postupu nezahrnuje přenos, takže je to jednodušší.

c) Jeden z učitelů navrhl přeskupit menšitele 26 takto: $26 = = 20 + 3 + 3$. Nejprve odečteme 3 od 53 a dostaneme 50. Pak odečteme další 3 od 50 a dostaneme 47. Nakonec odečteme 20 od 47 a dostaneme 27.

17 % amerických učitelů a 86 % čínských učitelů předvedlo konceptuální porozumění tématu, přičemž čínští učitelé prokázali propracovanější znalosti než jejich americké protějšky.

> Problém 2
>
> Scénář. Někteří učitelé v šestém ročníku si všimli, že několik žáků dělalo při násobení velkých čísel stejné chyby. Když se pokoušeli vynásobit čísla 123 a 645, postupovali takto:
>
> $$\begin{array}{r} 123 \\ \cdot\ 645 \\ \hline 615 \\ 492 \\ 738 \\ \hline 1\,845 \end{array}$$
>
> Všichni tito učitelé se sice shodovali v tom, že je to problém, lišili se však v názoru, co s tím. Co byste dělali, kdybyste učili v šestém ročníku a zjistili, že někteří žáci dělají takové chyby? (Ma, 2021, s. 34)

Při identifikaci chyb žáků 16 amerických učitelů z 23 bylo přesvědčeno, že problém je v provádění postupu zarovnávání, zatímco zbývajících 7 soudilo, že žáci neporozuměli logickému základu algoritmu. Sedm učitelů, kteří tvořili konceptuálně orientovanou skupinu, předložilo matematický výklad algoritmu. Vysvětlili, že násobit 645 ve skutečnosti znamená násobit 5 a 40 a 600, takže částečné součty jsou 615, 4 920 a 73 800. Procedurálně zaměření učitelé navrhli výukové strategie, mezi kterými bylo i použití čtverečkovaného papíru nebo použití zástupných symbolů pro nuly. Konceptuálně zaměření učitelé se soustředili na vysvětlení logického základu nebo navrhovali rozdělit úlohu do dílčích úloh: násobení 5, 40 a 600. Ze 72 čínských učitelů zaujalo 63 konceptuální pozici. Konceptuálně orientovaní čínští učitelé se dělili do tří skupin. Jedna skupina čerpala z distributivního zákona, druhá rozšířila pojem řádu číslice na daném místě na pojem poziční číselné soustavy a třetí skupina vysvětlovala problém z obou pohledů. Jeden z učitelů navrhl tento postup:

$$\begin{aligned}123 \cdot 645 &= 123 \cdot (600 + 40 + 5) = 123 \cdot 600 + 123 \cdot 40 + 123 \cdot 5 = \\ &= 73\,800 + 4\,920 + 615 = 79\,335.\end{aligned}$$

Pak žáky vyzval, aby se podívali na nuly v rovnosti a ve sloupcích. „Mají vliv na součet? Proč ano a proč ne? Lze ty nuly v rovnosti vypustit? A co ty nuly ve sloupcích? Co se stane, když vymažeme nuly ve sloupcích?“ (Ma, 2021, s. 49). Jiní učitelé byli přesvědčeni, že zapsat nuly a pak je zase odstranit je zbytečná oklika. Místo toho, aby řekli, že 4 v 645 je 40 a $123 \cdot 40$ je 4 920, tito učitelé argumentovali, že 4 v 645 jsou 4 *desítky* a 123 násobeno 4 desítkami je 492 *desítek*. A potom vysvětlili, proč 492 má být zarovnáno na místě desítek. Přejmenováním čísla 4 920 na 492 desítek a čísla 73 800 na 738 stovek se učitelé vyhnuli zavádění nul. Náhled učitelů na problém odpovídal jejich znalostem obsahu. U většiny amerických učitelů byly znalosti tématu procedurální. Naproti tomu většina čínských učitelů předvedla konceptuální porozumění.

Problém 3

Scénář. Lidé zřejmě přistupují k řešení úloh obsahujících dělení zlomkem rozdílným způsobem. Jak byste řešili třeba úlohu následujícího typu?

$$1\frac{3}{4} : \frac{1}{2} =$$

Přestavte si, že učíte dělení zlomkem. Mnozí učitelé se pokoušejí spojovat matematiku s jinými věcmi, aby

> dětem přiblížili vykládanou látku. Někdy přicházejí se situacemi z reálného světa nebo se slovními úlohami, které ukazují využití některé konkrétní části obsahu. Co byste považovali za dobrou slovní úlohu nebo model pro $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2} =?$ (Ma, 2021, s. 67)

O výpočet $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$ se pokusilo 21 z 23 amerických učitelů. Jen 9 z nich výpočet dokončilo a došlo ke správnému výsledku. Všech 72 čínských učitelů úlohu vyřešilo správně a úplně. Čínští učitelé používali vyjádření „dělení číslem je ekvivalentní násobení jeho převrácenou hodnotou“. Toto pravidlo se v čínských učebnicích používá k odůvodnění algoritmu dělení zlomkem. To vše je v souladu s důrazem, který čínské kurikulum elementární matematiky klade na vztahy mezi operacemi a operacemi k nim inverzními. Podle čínského matematického kurikula se pojem zlomku učí teprve ve 4. ročníku. Dělení zlomkem se učí v 6. ročníku, tj. v posledním roce základního vzdělávání. Při řešení úlohy $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$ zmiňovali američtí učitelé jen jeden přístup – standardní algoritmus „převrátit a násobit“. Čínští učitelé naproti tomu navrhli nejméně tři další přístupy: dělit zlomkem s použitím desetinných čísel, použití distributivního zákona a dělit zlomek bez násobení převrácenou hodnotou. Víc než třetina čínských učitelů uvedla, že výpočet lze provést převodem zlomku na destinná čísla $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = 1{,}75 : 0{,}5 = 3{,}5$. Sedm učitelů řeklo, že pro výpočet se dá využít distributivního zákona. Předvedli dva trochu odlišné postupy:

$$1\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = \left(1 + \frac{3}{4}\right) : \frac{1}{2} = \left(1 + \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{2}{1} = \\ = (1 \cdot 2) + \left(\frac{3}{4} \cdot 2\right) = 2 + 1\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$$

$$1\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = \left(1 + \frac{3}{4}\right) : \frac{1}{2} = \left(1 : \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{4} : \frac{1}{2}\right) = \\ = (1 \cdot 2) + \left(\frac{3}{4} \cdot 2\right) = 2 + 1\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$$

Tři učitelé upozornili, že násobení převrácenou hodnotou dělitele je sice obvyklý způsob provádění dělení zlomkem, ale není vždy nutné to tak dělat. Úlohy dělení zlomkem lze někdy řešit bez použití násobení.

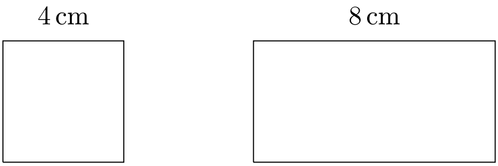
$$1\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = \frac{7}{4} : \frac{1}{2} = \frac{7:1}{4:2} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$$

Učitelé však vysvětlili, že tento postup je použitelný jen pro úlohy, v nichž je čitatel dělence dělitelný čitatelem dělitele a současně jmenovatel dělence dělitelný jmenovatelem dělitele. Součástí tohoto problému bylo najít interpretaci dělení zlomkem. Jen jeden z amerických učitelů předložil konceptuálně správnou interpretaci, která však byla problematická z didaktického hlediska. Ostatní američtí učitelé nedokázali vytvořit správné interpretace, protože měli chybné představy o významu dělení zlomkem. Ani jejich didaktické znalosti nemohly kompenzovat jejich konceptuální neznalosti. Ze 72 čínských učitelů dokázalo vytvořit správnou interpretaci daného výrazu 65 učitelů. Dvanáct z nich navrhlo více než jednu slovní úlohu týkající se různých aspektů významu operace. Čínští učitelé pojem interpretovali pomocí tří různých modelů dělení: podílový model, partitivní model a model součinu a činitelů. To může odpovídat následujícím slovním úlohám (Ma, 2021, s. 87):

> Kolik úseků o délce $\frac{1}{2}$ metru je obsaženo v něčem, co má délku $1\frac{3}{4}$ metru?
>
> Když polovina délky je $1\frac{3}{4}$ metru, jak dlouhý je celek?
>
> Když jedna strana obdélníku o obsahu $1\frac{3}{4}$ čtverečných metrů má délku $\frac{1}{2}$ metru, jak dlouhá je druhá strana?

Čínští učitelé vytvořili přes 80 slovních úloh, z nichž 62 představovalo partitivní model dělení zlomkem, tj. „najít číslo, jehož $\frac{1}{2}$ je $1\frac{3}{4}$“. Schopnost čínských učitelů tvořit interpretace využívající širokou škálu předmětů a různé modely dělení zlomkem se zřejmě opírala o solidní znalosti tématu. Naproti tomu američtí učitelé, kteří neuměli operaci interpretovat, nevysvětlili správně její význam. To ukazuje, že k tomu, aby měl učitel didakticky silnou interpretaci nějakého tématu, měl by mu především komplexně rozumět.

> Problém 4
>
> Scénář. Představte si, že některá z vašich žákyň přijde plná vzrušení do třídy a řekne vám, že objevila teorii, o které jste ve třídě nemluvili. Vysvětluje svůj objev, že se zvětšujícím se obvodem uzavřeného obrazce se rovněž zvětšuje jeho obsah. Aby doložila svou úvahu, ukáže vám následující obrázek:

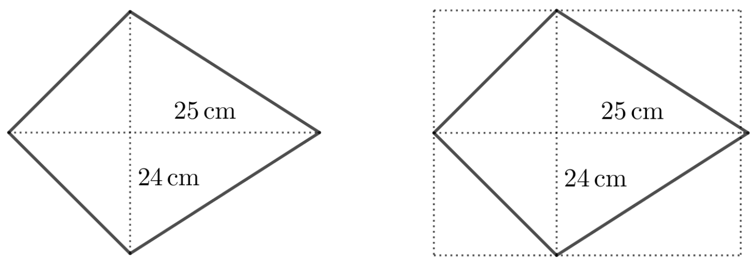


obvod = 16 cm	obvod = 24 cm
obsah = 16 cm^2	obsah = 32 cm^2

> Jak byste té žákyni odpověděli? (Ma, 2021, s. 102)

Dva z 23 amerických učitelů přijali teorii žákyně bez výhrad, ale ostatní ne. Pět z 21 učitelů, kteří měli dojem, že teorie je správná, řeklo, že se musejí podívat do učebnice. Čtyři z těchto pěti vysvětlili, že se musejí podívat do učebnice, protože si nepamatují, jak se vypočítá obvod a obsah. Třináct učitelů požadovalo další příklady. Tito učitelé podle Liping Ma ignorovali skutečnost, že matematické tvrzení týkající se nekonečného počtu příkladů nelze dokázat konečně mnoha příklady, ať jich je, kolik chce. Pouze tři učitelé zkoumali problém matematicky, ke správnému řešení došel jeden. Byla to začínající učitelka, která by žákyni řekla, ať zkusí jiný obdélník s šířkou 2 cm a délkou 16 cm. Obvod bude 36 cm a obsah 32 cm^2. Tím tvrzení žákyně vyvrátila. Ze 72 čínských učitelů zkoumalo problém matematicky 66 učitelů, z nichž se 16 nedobralo ke správnému řešení. Žádný z čínských učitelů neřekl, že potřebuje konzultovat s učebnicí nebo s někým jiným, a žádný neskončil s prohlášením „nejsem si jist“. Prokázali lepší znalosti elementární geometrie, velmi dobře ovládali vzorce pro obvod a obsah.

V předposlední kapitole se Liping Ma zabývá problémem důkladného porozumění matematickým základům (DPMZ). Provedla krátký výzkum toho, kdy a jak učitel dosáhne DPMZ. V závěru svého zkoumání vedla rozhovor se skupinou čínských učitelů, o kterých byla přesvědčena, že DPMZ mají. Ti uvedli, že DPMZ se u nich rozvinulo až poté, co se stali učiteli, v průběhu jejich učitelské praxe. Když byli dotázáni, jak své matematické znalosti získali, mluvili o principu „když něco učíš, intenzivně studuj materiály pro výuku“ (Ma, 2021, s. 158). Tím jsou míněny tři komponenty: *Rámec výuky a studia,* učebnice a příručky pro učitele. *Rámec výuky a studia* vydává čínské ministerstvo školství. Určuje, co se mají žáci v jednotlivých ročnících naučit, a stanovuje standardy jejich znalostí. Učebnice i příručky jsou sestavovány zkušenými učiteli a celostátně uznanými odborníky na školní kurikulum. Kvalita učebnic je stále přísně kontrolována ústřední vládou i místními vládami. Učebnice je materiál, nad kterým čínští učitelé stráví nejvíc času. Jako druhý důvod pro rozvoj DPMZ je uvedeno „učit se matematiku od kolegů“ (Ma, 2021, s. 166). Čínští učitelé studují materiály pro výuku nejen samostatně, ale často také společně s kolegy. Jsou organizováni do „skupin pro zkoumání výuky“, které se formálně scházejí zpravidla na hodinu týdně, aby sdílely své představy a úvahy o učení. Jako třetí důvod pro rozvoj DPMZ uvádí učitelé „učit se matematiku od žáků“ (Ma, 2021, s. 168). Dobrý učitel se může poučit od svých žáků a obohatit se, věří čínští učitelé. Jeden z nich uvedl úlohu, ve které měli žáci zjistit obsah obrazce, který je uveden na obrázku Obsah obrazce (Ma, 2021, s. 169, 170).



Mnozí žáci se zpočátku domnívali, že úlohu nelze vyřešit, protože neznáme výšku[1] v žádném trojúhelníku. Označíme-li výšky horního a dolního trojúhelníku v_1, v_2, pak pro obsah platí

$$S = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot v_1 + \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot v_2 = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot (v_1 + v_2) = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 24 = 300.$$

Dříve než učitel svůj postup vysvětlil, zvedl jeden žák ruku a řekl, že úlohu umí vyřešit. Uvedl, že „kolem obrazce nakreslí obdélník, jehož obsah je $25 \cdot 24$. Původní obrazec tvoří přesně jeho polovinu. Takže jen $25 \cdot 24$ vydělím dvěma a dostanu obsah obrazce.“ (Ma, 2021, s. 169–170).

Jako další důvod pro DPMZ uvedli čínští učitelé „učit se matematiku jejím prováděním“ (Ma, 2021, s. 171). Řešit tutéž úlohu více způsoby je důležitým indikátorem schopnosti „provádět matematiku“. Tato studie naznačila, že učitelské studium sice poskytuje čínským učitelům dobrý základ pro DPMZ, rozvíjejí ho však až v průběhu své učitelské kariéry. K tomu je podněcuje zájem o to, co učit a jak to učit. Inspiraci a oporu jim poskytují kolegové a materiály pro výuku.

V závěru knihy Liping Ma uvádí, že ačkoliv záměrem studie nebylo hodnotit matematické znalosti amerických a čínských učitelů, odhalila významné rozdíly v jejich znalostech školské matematiky. Ani jeden ze skupiny nadprůměrných amerických učitelů neprokázal, že důkladně rozumí elementární matematice. Liping Ma předkládá následující doporučení, jak prolomit vztahy mezi neuspokojivými studijními výsledky žáků a nedostatečnými znalostmi učitelů a vztahy mezi neuspokojivým matematickým vzděláváním a nedostatečnou elementární matematikou:

a) Zaměřte se současně na znalosti učitele a na učení se žáka.
b) Posilujte u učitelů interakci mezi studiem školské matematiky a studiem, jak školskou matematiku učit.
c) Změňte zaměření přípravy učitelů.
d) Pochopte roli, kterou v reformě mohou mít kurikulární materiály včetně učebnic.

[1] Žáci předpokládali, že úhlopříčky obrazce jsou kolmé, avšak nevěděli, že se jedná o deltoid.

e) Pochopte klíč k reformě: interakce ve třídě, ať mají jakoukoli formu, musejí být zaměřené na matematiku, která je podstatná. (Ma, 2021, s. 177–184)

Běžně se má za to, že elementární matematika je jednoduchá, všem srozumitelná a učit ji je snadné. Autorka dokládá, že učit ji dobře snadné není. Dochází k jasným závěrům: učitel musí důkladně rozumět obsahu vyučovaného předmětu; má-li se zlepšit vzdělávání žáků v matematice, musí mít jejich učitelé lepší znalosti školské matematiky a dobré podmínky pro přípravu a celoživotní vzdělávání. Kniha je určena všem, komu záleží na zlepšení výuky matematiky: učitelům, vysokoškolským pedagogům, studentům, rodičům i politikům.

Literatura

[1] Barbeau, E. (2008). Základem úspěchu jsou dobří učitelé. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, *53*(4), 341–345.

[2] Bečvář, J. (2021). Liping Ma: Znát a učit elementární matematiku. Jak učitelé v Číně a Spojených státech rozumí základní matematice. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, *66*(2), 142–146.

[3] Byčkovský, P., & Kotásek, J. (2004). Nová teorie klasifikování kognitivních cílů ve vzdělávání: revize Bloomovy taxonomie. *Pedagogika*, *40*(3), 227–242.

[4] Kuřina, F. (2012). Didaktické znalosti obsahu a matematické vzdělávání učitelů. *Pedagogická orientace*, *22*(2), 162–180.

[5] Ma, L. (2021). *Znát a učit elementární matematiku. Jak učitelé v Číně a Spojených státech rozumí základní matematice.* Academia.

Dag Hrubý
Přírodovědecká fakulta
Univerzita Palackého
17. listopadu 12
779 00 Olomouc
e-mail: hruby@gymjev.cz