Jaroslav Nešetřil

László Lovász a jeho matematika (Abelova cena za rok 2021)

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 66 (2021), No. 3, 157–167

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/149219`

László Lovász a jeho matematika (Abelova cena za rok 2021)

Jaroslav Nešetřil

Abstrakt. Tento článek je napsán u příležitosti udělení Abelovy ceny za rok 2021 László Lovászovi.

Lovász je přední světový matematik. Kdyby v matematice a informatice existovala kultura hvězd, mohl bych i napsat, že je také hvězdou současné matematiky a teoretické informatiky. Mělo by to, myslím, plné oprávnění. Ale matematici vždy přistupují s velkou opatrností (a nedůvěrou) k podobným „excelentním“ přívlastkům, které považují za klišé. V následujícím textu se pokusím vysvětlit, proč v případě Lovásze jsou podobná označení na místě.

László Lovász se narodil v roce 1948 v Budapešti. Studoval na univerzitě Loránda Eötvöse (ELTE) a studium ukončil v roce 1971, přičemž titul CSc. (Ph.D.) získal současně (vlastně již roku 1970). Byl skvělým studentem na univerzitě i gymnáziu (třikrát získal zlatou medaili na mezinárodní matematické olympiádě). Jeho školitelem byl T. Gallai, ale velký vliv na něj měla především maďarská kombinatorická škola (mj. V. T. Sós, P. Turán, A. Rényi, A. Hajnal a především P. Erdős).

Lovász záhy vynikl svými schopnostmi a v příznivé atmosféře konce 60. let jezdil na velké zahraniční konference (například v Calgary 1969, kde jsem se s Lovászem setkal poprvé) a přednáškové pobyty. Již v roce 1972/1973 byl hostujícím profesorem na Vanderbiltově univerzitě (na pozvání Bjarni Jónssona). Pro někoho může být překvapivé, že jedna z prvních Lovászových cest nebyla v kontextu diskrétní matematiky a kombinatoriky, ale univerzální algebry. Důvodem byly články [15], [13], které rozvedeme ještě níže.

Lovász působil 7 let na Univerzitě v Szegedu a od roku 1983 na své mateřské univerzitě v Budapešti, a to jak na katedře informatiky, tak v matematickém ústavu ELTE. Lovász pracoval dlouhodobě v zahraničí, kde byl profesorem např. na Univerzitě ve Waterloo (1978/1979), v Bonnu (1984/1985), Yaleově univerzitě (1993–2000), opakovaně na Princetonské universitě a tamním Institutu pro pokročilá studia a rovněž ve slavné Theory Group v Microsoft Research (1999–2006) jako senior researcher. Je možno říci, že na kratších pobytech byl hostem většiny z předních světových matematických pracovišť. Tak také přednesl v roce 1986 první matematické kolokvium na Matematicko-fyzikální fakultě UK (druhé kolokvium přednesl P. Erdős) v sérii kolokvií, která trvá dosud. Lovász byl (hlavně v 70. a 80. letech) častým hostem československých konferencí z teorie grafů a zimních škol pořádaných Zdeňkem Frolíkem.

Přerušme nyní na chvíli popis Lovászova života a věnujme se popisu jeho vědecké činnosti. Lovász pracoval převážně v diskrétní matematice, kombinatorice a teoretické informatice. Měl štěstí (stejně jako my ostatní), že během jeho života se z těchto

Prof. RNDr. Jaroslav Nešetřil, DrSc., Informatický ústav UK, Malostranské náměstí 25, 118 00 Praha 1, e-mail: `nesetril@iuuk.mff.cuni.cz`

Obr. 1. László Lovász v Praze (23. června 2016)

řekněme okrajových matematických disciplín staly obory hlavního zájmu. To má samozřejmě mnoho důvodů, z nichž snad nejpodstatnější je nebývalý rozvoj technologie počítačů, ale podstatným faktorem je rovněž kvalita výzkumu a kvalita výsledků v těchto oborech, o které se zasloužilo mnoho matematiků a László Lovász zvláště. Lze tedy říci, že Lovász tomuto štěstí hodně pomohl.

Lovászova činnost je však rozsáhlá a mnohovrstevná a náleží do několika oblastí matematiky a teoretické informatiky. Jestliže bych měl vystihnout jeho přínos pouze pár slovy, tak by asi bylo na místě: *hloubka*, *elegance* a *souvislosti*.

Hloubka – Lovász vyřešil řadu důležitých a známých problémů, u kterých vycítil a rozvinul zdánlivě odtažitá a speciální témata do široce platných kalkulů.

Elegance – jeho řešení byla mnohdy překvapivě (a někdy jen zdánlivě) velmi jednoduchá, odrážela úplně jiný přístup, a často byla matematicky velmi krásná.

Souvislost – jeho řešení byla mnohdy základem dalšího výzkumu a dokonce i základem celých teorií.

Všichni víme, jak obtížné je hodnotit (na jakékoliv úrovni) kvalitu vědecké práce. Domnívám se, že základem kvalitního posouzení je komplexnost, zúčastněný a detailně vědecký pohled a přístup. Lovász samozřejmě vykazuje enormní (v kontextu matematiky, ale i mimo ni) bibliometrická data: Jeho h-index dle Google Scholar je 105, má 65 083 citací, jeho maximum pro časopisecký článek je 5 396. Dle WoS je to podobné. A přesto tato data nevystihují jeho význam a důležitost pro matematické a informatické společenství. Proto je třeba uvést další skutečnosti. Pokusil jsem se některé vyjádřit třemi výše uvedenými aspekty.

Vlastně jsou tyto tři aspekty v protikladu: matematici se často dělí na řešitele problémů a na budovatele teorií (jak pěkně parafrázoval Tim Gowers práci C. P. Snowa o „dvojí kultuře“). Úspěšné řešení problému je často v protikladu k eleganci. A konečně autoři krásných miniatur zpravidla nebudují teorie. Jenom si to představte: trápíte se složitým problémem, o kterém víte, že má historii neúspěšných pokusů řady vynikajících matematiků. V této situaci zajisté nepřemýšlíte o eleganci. A o vlivu toho, co děláte, se vám může jen snít. Pokud se ale tyto aspekty sejdou, je možné mluvit o štěstí, ale také o mimořádném výkonu.

Matematici samozřejmě milují krásu jednoduchosti. Jiří Matoušek napsal známou knihu *Thirty-three miniatures* [28] – elegantní příklady napříč matematikou a staletími. Jiná známá kniha podobného zaměření je *Proofs from THE BOOK* [1], která zahrnuje krásné „definitivní“ důkazy (podle Erdőse „Book Proofs“) z celé matematiky. V obou knihách je zastoupen také Lovász.

Uveďme tedy pár příkladů, které snad dokumentují oprávněnost výše uvedených tvrzení a které snad vystihují sílu a rychlost matematiky v Lovászově podání. Zvolil jsem výsledky, které lze snadněji popsat. Nejsou řazeny chronologicky, i když začínají výsledky z počátku Lovászovy kariéry.

1. Tarského problém – logika a univerzální algebra

Začněme problémem, který není kombinatorický. Nechť A, B jsou konečné struktury a předpokládejme, že je definován součin $A \times B$. Kdy je možno takový součin krátit podobně jako pro čísla?

To samozřejmě závisí na tom, jaký součin máme na mysli, ale platí alespoň pro běžné součiny, že když $A \times A$ je isomorfní $B \times B$, potom i A je isomorfní B?

To byla jedna z otázek, které Alfred Tarski (jehož žák byl již výše zmíněný B. Jónsson) kladl v 60. letech svým studentům v Berkeley. Byly to otázky nevyřešené již pro nejběžnější (kategorický) součin, tedy součin, pro který jsou projekce homomorfismy. Lovász tento problém vyřešil velmi originálním způsobem v pracích [15], [13]. Řešení plyne z následujícího tvrzení.

Věta (Lovászův invariant). *Uvažujeme konečné struktury, např. grafy, algebry, částečná uspořádání. Nechť* $\hom(A, B)$ *označuje počet homomorfismů ze struktury* A *do struktury* B*. Jestliže platí* $\hom(A, B) = \hom(A, C)$ *pro každou strukturu* A*, potom struktury* B *a* C *jsou isomorfní. Jinými slovy, funkce* $\hom(-, B)$ *je invariant pro izomorfismus struktur.*

Protože $\hom(A, B \times B) = \hom(A, B)^2$, dostáváme ihned řešení Tarského otázky pro kategorický součin (a mnohé další součiny). Navíc důkaz věty není složitý (viz např. [22], [9]) a věta platí za málo omezujících podmínek (které je možno vyjádřit v řeči teorie kategorií).

Metoda *počítání homomorfismů* je velmi originální přístup. Právě tento algebraický výsledek byl bezprostředním důvodem pozvání Lovásze k prvnímu zahraničnímu přednáškovému pobytu. Výše uvedená věta má větší důležitost, než se zdá na první pohled: Při její analýze Lovász definoval pojem *exponenciální struktury* A^B, která se mnohem později stala základem pro studium součinů grafů (jako přirozený adjunkt) a pro nedávné vyřešení tzv. Hedetniemiho problému o barevnosti součinů. Jinou souvislostí je ověření (v obecnosti dosud nevyřešené) *Ulamovy domněnky* o rekonstrukci grafů při znalosti všech vlastních podgrafů pro grafy mající více než polovinu možných hran [17].

Tento výsledek byl záhy zesílen Vladimírem Müllerem [29] (opět metodou počítání homomorfismů) pro počet hran větší než $n \cdot \log n$, což je dosud (již 45 let!) nejlepší výsledek. A třetí souvislost je velmi nedávného data: Lovászův invariant představuje východisko a motivaci pro charakteristiku všech funkcí typu $\hom(-, B)$ (a obecněji *partičních funkcí*) [6]. To bylo studováno v řadě prací v kontextu asymptotických vlastností velkých grafů a sítí a jejich limit.

2. Barevnost konstruktivně (na cestě k expanderům a Ramanujanovým grafům)

Barevnost $\chi(G)$ grafu G je minimální počet barev, které stačí k obarvení vrcholů grafu G tak, že dva vrcholy žádné hrany nejsou obarveny stejně. Barevnost je snad nejstudovanější kombinatorický pojem. Proč je tomu tak? Za něco může historie, ale faktem také je, že tento v podstatě jednoduchý pojem vystihuje podstatu (obtížnosti) mnoha problémů.

Takže úplný graf K_n má barevnost n a každý strom (s alespoň 2 vrcholy) má barevnost 2. Erdős ukázal již v roce 1958, že existují příklady grafů, které mají libovolně velkou barevnost a přitom jsou lokálně stromy: Pro každé k, l existuje graf $G_{k,l}$ tak, že $\chi(G_{k,l}) \geqq k$ a přitom graf $G_{k,l}$ neobsahuje kružnice délky menší nebo rovné l.

Erdősův důkaz je jednou z klíčových aplikací pravděpodobnostní metody, ale neposkytuje žádný návod pro konstrukci grafu $G_{k,l}$. Konstrukce grafů $G_{k,l}$ byla dlouhou dobu otevřeným problémem, než byla popsána Lovászem v jedné z jeho prvních prací [14]. (Tento výsledek byl také jedním z vrcholů výše zmíněné konference v Calgary.)

Později se ukázalo, jakou důležitost podobné grafy mají a proč je důležité je explicitně znát a umět sestrojit. To vedlo k celé teorii na pomezí teorie grup, teorie čísel, algebraické teorie grafů a samozřejmě kombinatoriky, kde jsou klíčovými pojmy *expander*, *Ramanujanovy grafy* a *sparsifikace*. Konstrukce a struktura grafů podobných $G_{k,l}$ byla a je jedním z klíčových problémů konečné kombinatoriky a rovněž teoretické informatiky a má charakter *ságy* (viz např. [10], [30]).

3. Shannonova kapacita grafu – teorie informace

Jeden ze zakladatelů teorie informace Claude Shannon položil v roce 1956 otázku, zda opakováním symbolů můžeme dosáhnout větší propustnosti kanálu, v němž dochází k chybám záměny symbolů. To lze matematicky vyjádřit jako nezaměnitelnost (nezávislost) v silném součinu $\boxtimes$ mnoha kopií výchozího grafu, který vystihuje záměnnost symbolů. Jestliže maximální počet nezaměnitelných symbolů (nebo jejich posloupnosti) označíme α, potom *Shannonova kapacita* $\theta(G)$ grafu G je limitní hodnotou výrazu $\alpha(G \boxtimes G \boxtimes \ldots \boxtimes G)^{1/k}$ pro součin k kopií grafu G.

Nalézt Shannonovu kapacitu je obecně velmi obtížné, např. již pro cyklus délky 7 je kapacita dosud neznámá. Lovász však dosáhl v roce 1979 prvního pokroku v práci [21]. Dokázal určit Shannonovu kapacitu pro velkou třídu grafů. Speciálně ukázal, že $\theta(C_5) = \sqrt{5}$. Připomeňme, že $\alpha(C_5) = 2$ a tedy 2 je dolní odhad pro $\theta(C_5)$. Ale již $\alpha(C_5 \boxtimes C_5) = 5$ a tedy $\theta(C_5) \geqq \sqrt{5}$. Nalezení těsného horního odhadu však trvalo čtvrt století.

Metoda použitá v [21] byla také velmi zajímavá. Lovász našel nový invariant $\vartheta(G)$, *Lovászovu funkci* ϑ, který spočívá v minimalizaci jisté kvadratické funkce, a ukázal, že pro každý graf G platí $\alpha(G) \leqq \theta(G) \leqq \vartheta(G)$.

Článek [21] představuje také jednu z prvních kombinatorických aplikací nelineárních metod (speciálně *semidefinitního programování*). V souvislosti s polynomiálními algoritmy pro lineární programování prošly tyto nelineární metody renesancí. Kniha M. Grötschela, L. Lovásze a L. Schrijvera [8] je dnes klasickou knihou, která motivovala další intenzivní výzkum (je to také nejcitovanější Lovászova kniha).

Zpět k $\theta(C_5)$: Reprezentace C_5 dokazující $\theta(C_5) = \vartheta(C_5)$ je geometrická (připomíná deštník, je známa jako tzv. *Lovászův deštník*). Dokonce i tento dílčí výsledek byl inspirací pro mnoho podobných reprezentací. Lovász sám o tom nedávno napsal knihu [23]. Co všechno vznikne z pěticyklu! Ale zdání klame. Vhodnější je říci: Co všechno vznikne z pěkného limitního Shannonova problému.

4. LLL poprvé – teorie čísel

Nejcitovanější Lovászovou prací (a prací explicitně zmíněnou v materiálech Abelovy ceny) je výsledek, který se týká nalezení nejkratšího vektoru v dané celočíselné mřížce. Přesněji se jedná o následující situaci: V reálném n-dimenzionálním prostoru $\mathbb{R}^n$ a pro nějakou jeho bázi $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ uvažujeme množinu L všech celočíselných lineárních kombinací $\sum z_i\mathbf{b}_i$, kde z_i jsou celá čísla.

L se nazývá *celočíselná mřížka*. Mřížky se vyskytují nejenom v moderním kontextu diskretizace spojitých problémů, ale byly již dávno studovány např. v kontextu teorie čísel (připomeňme alespoň jména Gauss, Minkowski; důležité výsledky v této oblasti patří také Vojtěchu Jarníkovi).

V mnoha aplikacích se vyskytuje následující úloha: Pro danou mřížku nalezněte délku nejkratšího (samozřejmě nenulového) vektoru v L. Označme tuto délku $\lambda(L)$ (samozřejmě $\lambda(L)$ může být podstatně menší než délky generujících vektorů $\mathbf{b}_i$). Nalézt $\lambda(L)$ a příslušný vektor není snadné a jsou známy pouze odhady. Ve skutečnosti už jenom nalezení přibližného řešení je obtížné (ve smyslu teorie složitosti).

Arjen Lenstra, Hendrik Lenstra a László Lovász nalezli v práci [12] polynomiální algoritmus, který najde nenulový vektor $\mathbf{b}$ v dané mřížce L, jehož délka je nejvýše $2^{(n-1)/2}\lambda(L)$ (multiplikativní chybu je možno ještě zlepšit, ale je exponenciální v dimenzi mřížky). Při zpětném pohledu se tento algoritmus jeví jako přirozené zobecnění 2dimenzionální verze problému (kterou již vyřešil Gauss). Navíc je to algoritmus jednoduchý.

LLL-algoritmus způsobil revoluci v kryptografii, celočíselném programování a v teorii čísel, kde vedl rovněž k vyvrácení staré Stieltjesovy–Mertensovy domněnky, související s Riemannovou hypotézou [31].

5. LLL podruhé – pravděpodobnost

Tentokrát má zkratka LLL jiný význam a označuje také jiný výsledek. *Lovászovo lokální lemma* (tedy LLL v tomto odstavci) je výsledek z elementární teorie pravděpodobnosti. Motivujeme ho následující úvahou: Uvažme množinu náhodných jevů $X_1, \ldots, X_n$ a předpokládejme, že pravděpodobnost každého jevu je menší než 1.

Potom platí, že pravděpodobnost, že žádný z jevů nenastane, je kladná (i když třeba velmi malá). LLL tuto úvahu kvalitativně zobecňuje pro závislé jevy:

Věta (Lovászovo lokální lemma [5]). *Nechť $X_1, \dots, X_n$ jsou náhodné jevy, z nichž každý se vyskytuje s pravděpodobností nejvýše $p < 1$. Jestliže každý jev X_i je nezávislý na alespoň $n - d$ jiných jevech, a jestliže platí $4pd \leqq 1$, potom pravděpodobnost, že žádný z jevů nenastane, je kladná.*

(Odhad $4pd \leqq 1$ je z původní práce [5] a lze ho zlepšit na $epd \leqq 1$. Lemma má také množství variant.)

Tento výsledek byl původně motivován problémy, které se týkaly rozkladů geometrických objektů a množinových systémů (již struktura systémů trojic s barevností větší než 2 je složitá). Jeden z problémů pocházel od Ernsta Strause (mj. asistenta A. Einsteina) a lze jej formulovat následovně:

Existuje pro každé kladné k číslo $f(k)$ tak, že pro libovolnou množinu S celých čísel velikosti alespoň $f(k)$ existuje obarvení všech celých čísel pomocí k barev tak, že libovolné posunutí (translace) množiny S bude obarveno pomocí všech k barev?

Erdős a Lovász vyřešili Strausův problém pomocí lokálního lemmatu a ukázali, že $f(k) \leqq \mathcal{O}(k \log k)$.

Lokální lemma se záhy ukázalo jako velmi užitečné a našlo mnoho aplikací v kombinatorice, teorii čísel i jinde. Je to dnes jeden ze standardních triků, který se často vyučuje v základních kurzech. Jak vtipně poznamenal Joel Spencer: Lokální lemma lze použít pro důkaz existence jehly v kupce sena. Ale pouze existence, neboť důkaz lokálního lemmatu je pravděpodobnostní a nedává metodu, jak jehlu nalézt. Teprve mnohem později bylo lokální lemma dokázáno konstruktivně. Za tento výsledek získali Gödelovu cenu v roce 2020 R. Marcus a G. Tárdos. (Poznamenejme, že konstruktivní řešení Strausova problému je již v práci [2].) LLL (jakožto v roce 2020 *kombinatorický princip*) má mnoho souvislostí. V poslední době se studují také nekonečné (měřitelné) verze LLL (A. Bernshteyn, G. Kun, O. Pikurko a jiní; viz například [3]).

6. Vnější algebra

Jiří Matoušek napsal několik skvělých knížek a jeho knížka *Thirty-three miniatures* [28] je obzvlášť oblíbená. Je to kniha krásných příkladů napříč matematikou, jak jsme se zmínili už v úvodu. Jeden z jeho příkladů je metoda *vnější algebry*. Ilustrujme to příkladem *pražské dimenze grafu* (opíráme se přitom o článek [24]).

Lze snadno dokázat, že každý graf je (indukovaným) podgrafem součinu úplných grafů. Dimenze podgrafu $\dim(G)$ grafu G je potom minimální počet úplných grafů, které stačí vynásobit, aby vzniklý součin obsahoval kopii grafu G. Je snadné dokázat, že $\dim(K_n) = 1$, a také, že dimenze součinu t kopií grafu K_n je nejvýše t (tedy $\dim(K_n^t) \leqq t$). Je velmi pěkné, že platí dokonce $\dim(K_n^t) = t$ pro každé $n \geqq 2$, $t \geqq 1$. Je to však obtížnější a bylo to dokázáno v práci [24], která je jedním z prvních případů použití metody vnější algebry (navržené Lovászem již v práci [18]): Protože K_2^2 je isomorfní grafu $K_2 + K_2$, je také K_2^t isomorfní párování (tj. disjunktním hranám) velikosti 2^{t-1}. Potom je možné ukázat (a je to obsaženo v [24]), že každá reprezentace párování pomocí součinu k úplných grafů vede na 2^{k-1} nezávislých vektorů vnější algebry a tedy nutně $k \geqq t$.

7. Perfektní grafy – Bergeova hypotéza

Perfektní grafy jsou v jistém smyslu protikladem grafů zmiňovaných v kapitole 2. Jsou to právě ty grafy, pro které platí $\chi(G') = \omega(G')$ pro každý (indukovaný) podgraf G' grafu G, kde $\omega(G')$ je maximální velikost úplného podgrafu grafu G'. Jeden z pionýrů teorie grafů francouzský matematik Claude Berge formuloval na konci 50. let dvě (později velmi proslulé) domněnky:

1. Graf G je perfektní, právě když je perfektní jeho doplněk. (Připomeňme, že doplněk grafu G je tvořen právě všemi nehranami grafu G.)

2. Graf G je perfektní, právě když G ani jeho doplněk neobsahují kružnici liché délky větší než 3 jako (indukovaný) podgraf.

Zřejmě platí $2 \Rightarrow 1$ a proto byly tyto domněnky známy jako malá a velká (v anglické literatuře častěji weak and strong) Bergeova hypotéza. Nejsou to izolované problémy. Mnoho základních tříd grafů jsou třídy perfektních grafů a v kontextu matematické optimalizace a zvláště pak (celočíselného) lineárního programování se jedná o centrální problémy, které mají řadu ekvivalentních formulací. Pro každý perfektní graf G také platí $\alpha(G) = \vartheta(G) = \theta(G)$ (viz kapitola o Shannonově kapacitě).

Lovász v roce 1972 vyřešil malou Bergeovu hypotézu velice elegantním způsobem [16] tím, že dokázal v podstatě jednoduché tvrzení, které tvoří jádro problému.

Lemma. *Je-li graf perfektní, potom i graf, který vznikne zdvojením některého vrcholu, je perfektní.*

Zde zdvojení vrcholu v v grafu $G = (V, E)$ spočívá v přidání nového vrcholu v', který tvoří hranu s v a také se všemi vrcholy, s nimiž tvoří hranu v (v grafu G).

Použitím tohoto lemmatu se dá již snadno dokázat malá Bergeova hypotéza (mnohonásobným opakováním lemmatu). Poznamenejme, že velká Bergeova hypotéza byla vyřešena mnohem později (v roce 2006 v práci [11], která má 179 stran v jednom z nejlepších matematických časopisů! Spoluautorem tohoto díla je Robin Thomas.)

8. Barevnost pomocí topologie

Jako poslední konkrétní příklad chci zmínit Kneserovu domněnku. Známý německý matematik Martin Kneser formuloval v roce 1955 zdánlivě prostinkou otázku:

Nechť X je množina s $n - 2k + 2$ prvky, označme $\binom{X}{k}$ množinu všech k-prvkových podmnožin. Jestliže rozdělíme $\binom{X}{k}$ na méně než $n - 2k + 2$ částí, potom lze vždy najít dvě disjunktní množiny, které jsou ve stejné části.

Snadno se nahlédne, že Kneserův problém je vlastně otázka, zda *Kneserův graf* $KG(n, k)$ má barevnost $n - 2k + 2$. Zde $KG(n, k)$ je graf, jehož vrcholy jsou všechny k-prvkové podmnožiny X, přičemž dvě množiny tvoří hranu, právě když jsou disjunktní. Nakreslete si sami graf $KG(5, 2)$, má 10 vrcholů a 15 hran a nazývá se Petersenův graf. Má pozoruhodné vlastnosti! Je snadné nahlédnout, že $\chi(KG(n, k)) \leqq \leqq n - 2k + 1$. Nalézt dolní odhad je mnohem obtížnější a problém byl dlouhou dobu otevřený.

Lovász v práci [19] podal kladné řešení Kneserova problému pomocí metod algebraické topologie. To bylo velmi překvapivé a inspirovalo to řadu matematiků v nejrůznějších oborech. Lovászův důkaz není nejjednodušší. Nebyl to sice „Book Proof“, ten podal záhy poté Imre Bárány, Lovászův důkaz však otevřel stavidla pro souvislosti extremálních problémů a algebraické topologie a stal se inspirací pro celou teorii. Tyto metody přispěly k řešení mnohých dalších problémů (např. problému barevnosti součinů, který jsme zmínili v první kapitole). Jádrem důkazu je Borsukova–Ulamova věta. Později Matoušek nalezl kombinatorický důkaz Lovászovy věty a po řadě článků (např. spolu s G. Zieglerem a A. Björnerem) věnoval celou knihu [27] aplikacím topologických metod v kombinatorice a jinde. V předmluvě Matoušek píše, že Lovászův důkaz Kneserovy věty je „masterpiece of imagination“.

9. Závěr

Zakončeme tento ohňostroj krásných vět napříč matematikou a teoretickou informatikou. Čtenář může snadno nabýt dojmu, že výše uvedené výsledky jsou jen mistrovské miniatury. To nepochybně také jsou, neboť některé byly zařazeny do kontextu podobných krásných důkazů např. v již zmíněných knihách [28] a [1]. (Kniha [1] obsahuje důkaz pomocí Lovászova deštníku.)

Stává se však velmi zřídka, že známý a dlouho otevřený problém se podaří elegantně vyřešit a toto řešení okamžitě obohatí celý obor. Je neuvěřitelné, že právě taková řešení Lovász opakovaně předkládal světové veřejnosti (a samozřejmě kromě mnoha svých dalších vědeckých publikací a aktivit).

Do tohoto článku jsme vybrali právě výsledky, které mají obecnější platnost a které se staly základem intenzivního výzkumu, nebo přímo celých teorií. Obory jako kombinatorická optimalizace, aplikace elipsoidové metody, algebraická teorie grafů (a zde zvláště homomorfismové problémy), topologické metody v teorii grafů si lze těžko představit bez pionýrských prací L. Lovásze.

Některé z těchto oborů jsme uvedli dříve, ale jiné oblasti jsme úplně opominuli. Nebylo tak místo se podrobněji zmínit o pracích týkajících se topologických reprezentací grafů v prostoru (například charakteristika *linkless* vnořitelných grafů, tj. grafů vnořitelných do prostoru bez propletených cyklů) nebo představit rozsáhlý výzkum v teoretické informatice a náhodných grafech a obecněji náhodných strukturách (které možná představují největší díl jeho publikací). Úplně jsme opominuli také současný Lovászův výzkum v hraničních oblastech teorie grafů, funkcionální analýzy a teorie náhodných grafů a teorie sítí představovaný teorií *grafových a strukturálních limit.* Této velmi rychle se rozvíjející oblasti (kterou Lovász vybudoval se svými spolupracovníky, kterými byli a jsou např. B. Szegedy, J. Chayes, Ch. Borgs, viz například práce [26], [4]) věnoval Lovász monografii [22].

Knižní publikace jsou Lovászovou silnou stránkou. Dosud napsal 11 knih a všechny jsou významné, počínaje *Combinatorial problems and excercises*, která se v 80. letech stala doslova světovou biblí kombinatoriků [20]. Je to kniha (většinou) snadno formulovaných otázek a problémů, kniha stručných návodů pro jejich řešení a kniha zevrubných důkazů. V této souvislosti poznamenejme, že jiná jeho stará kniha o párování [25] (sepsaná spolu s M. Plummerem) je dosud aktivně používána a často citována.

Obr. 2. Oznámení konference u příležitosti udělení čestného doktorátu na Univerzitě Karlově (návrh Andrew Goodall a Jaroslav Nešetřil)

Při recenzi knihy [22] v časopise Bulletin of the American Mathematical Society jsem ocitoval Michela Mendès France, který mi jednou řekl, že správný pocit při čtení krásné matematiky je závist. A že podobné pocity může mít čtenář při četbě knihy [22].

Lovászův mimořádný výzkum a rovněž znalost a přehled o matematice jako celku se odráží rovněž v jeho veřejných vystoupeních a přehledových článcích. Například do rozsáhlé knihy [7] přispěl hned čtyřmi kapitolami. Jiné přehledové práce mají například názvy *One mathematics* nebo *Discrete and continuous: Two sides of the same?* Lovászův vliv na současnou matematiku je těžké pominout. Lovász je velká osobnost. Byl jsem opakovaně svědkem toho, jak radikálně ovlivnil vědecké prostředí v instituci, pro kterou pracoval (například v Szegedu nebo v Redmondu).

Výsledkem Lovászovy vědecké excelence bylo mnoho významných ocenění, např. řada čestných doktorátů, včetně Univerzity Karlovy z roku 2020; Kjótská cena 2010, Wolfova cena Státu Izrael 1999, Gödelova cena 2001, dvakrát Fulkersonova cena 1982 a 2012, Pólyova cena 1979 a několik státních vyznamenání Maďarska včetně nejvyššího Řádu svatého Štěpána v roce 2021. Lovász je rovněž členem 10 významných zahraničních akademií.

Lovász přednesl řadu důležitých přednášek včetně plenární přednášky na Mezinárodním kongresu matematiků v roce 1990 v Kjótu (které jsem měl čest předsedat). 20 let poté byl Lovász zvolen prezidentem Mezinárodní matematické unie (v roce 2010 v Hyderabadu) a po dvě (nelehká) období byl předsedou Maďarské akademie věd.

Abelovu cenu za rok 2021 získal Lovász spolu s Avi Wigdersonem z Princetonu. Citace odůvodnění udělení této ceny zní: *Za základní příspěvek k teoretické informatice a diskrétní matematice a jejich vedoucí roli v přetvoření těchto disciplín na jedny z centrálních oblastí moderní matematiky.*

Svědectví o tom jsem se pokusil podat v tomto článku.

Obr. 3. Praha 2020 (foto Univerzita Karlova)

Poděkování. Děkuji Heleně Nešetřilové za četné připomínky k textu.

L i t e r a t u r a

[1] Aigner, M., Ziegler, G.: *Proofs from THE BOOK.* Springer, 1998.

[2] Alon, N., Kříž, I., Nešetřil, J.: *How to color shift hypergraphs.* Stud. Sci. Math. Hungar. 30 (1995), 1–11.

[3] Bernshteyn, A.: *Measurable versions of the Lovász local lemma and measurable graph colorings.* Adv. Math. 353 (2019), 153–223.

[4] Borgs, Ch., Chayes, J., Lovász, L., Sós, V. T., Vesztergombi, K.: *Counting graph homomorphisms.* In: M. Klazar, J. Kratochvíl, M. Loebl, J. Matoušek, P. Valtr, R. Thomas (eds.): Topics in discrete mathematics, Springer, 2006, 315–371.

[5] Erdős, P., Lovász, L.: *Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions.* In: Infinite and finite sets, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai 10, North-Holland, 1975, 609–627.

[6] Freedman, M., Lovász, L., Schrijver, L.: *Reflection positivity, rank connectivity, and homomorphism of graphs.* J. Amer. Math. Soc. 20 (2007), 37–51.

[7] Graham, R. L., Grötschel, M., Lovász, L. (eds.): *Handbook of combinatorics.* Elsevier, 1995.

[8] Grötschel, M., Lovász, L., Schrijver, A.: *Geometric algorithms and combinatorial optimization.* Springer, 1988.

[9] Hell, P., Nešetřil, J.: *Graphs and homomorphisms.* Oxford University Press, 2006.

[10] Hoory, S., Linial, N., Wigderson, A.: *Expander graphs and their applications.* Bull. Amer. Math. Soc. 43 (2006), 439–561.

[11] Chudnovsky, M., Robertson, N., Seymour, P., Thomas, R.: *The strong perfect graph theorem.* Ann. of Math. 164 (2006), 51–229.

[12] Lenstra, A. K., Lenstra, A. W., Lovász, L.: *Factoring polynomials with rational coefficients*. Math. Ann. 261 (1982), 515–534.

[13] Lovász, L.: *Operations with structures*. Acta Math. Hungar. 18 (1967), 321–328.

[14] Lovász, L.: *On chromatic number of graphs and set systems*. Acta Math. Hungar. 19 (1968), 59–67.

[15] Lovász, L.: *On the cancellation law among finite relational structures*. Period. Math. Hungar. 1 (1971), 145–156.

[16] Lovász, L.: *A characterization of perfect graphs*. J. Combin. Theory Ser. B 13 (1972), 95–98.

[17] Lovász, L.: *A note on the line reconstruction problem*. J. Combin. Theory Ser. B 13 (1972), 309–310.

[18] Lovász, L.: *Flats in matroids and geometric graphs*. In: Combinatorial Surveys, Proc. 6th British Comb. Conf., Academic Press, 1977, 45–86.

[19] Lovász, L.: *Kneser's conjecture, chromatic number, and homotopy*. J. Combin. Theory Ser. A 25 (1978), 319–324.

[20] Lovász, L.: *Combinatorial problems and exercises*. North-Holland, 1979.

[21] Lovász, L.: *On the Shannon capacity of graphs*. IEEE Trans. Inform. Theory 25 (1979), 1–7.

[22] Lovász, L.: *Large networks and graph limits*. American Mathematical Society, 2012.

[23] Lovász, L.: *Graphs and geometry*. American Mathematical Society, 2019.

[24] Lovász, L., Nešetřil, J., Pultr, A.: *On a product dimension of graphs*. J. Combin. Theory Ser. B 29 (1980), 47–67.

[25] Lovász, L., Plummer, M.: *Matching theory*. North-Holland, 1986.

[26] Lovász, L., Szegedy, M.: *Szemerédi's lemma for the analyst*. Geom. Funct. Anal. 17 (2007), 252–270.

[27] Matoušek, J.: *Using the Borsuk-Ulam theorem. Lectures on topological methods in combinatorics and geometry*. Springer, 2003.

[28] Matoušek, J.: *Thirty-three miniatures. Mathematical and algorithmic applications of linear algebra*. American Mathematical Society, 2010.

[29] Müller, V.: *The edge reconstruction hypothesis is true for graphs with more than $n \cdot \log n$ edges*. J. Combin. Theory Ser. B 22 (1977), 281–283.

[30] Nešetřil, J.: *A combinatorial classic – sparse graphs with high chromatic number*. In: L. Lovász, I. Z. Ruzsa, V. T. Sós (eds.): Erdős centennial, Springer, 2013, 383–407.

[31] Odlyzko, A. M., te Riele, H. J. J.: *Disproof of the Mertens conjecture*. J. Reine Angew. Math. 357 (1985), 138–160.