

Učitel matematiky

Jan Fiala

Sonda do představ a základních znalostí žáků středních škol v učivu
pravděpodobnosti

Učitel matematiky, Vol. 29 (2021), No. 3, 146–166

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/149138>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2021

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ*:
The Czech Digital Mathematics Library <http://dml.cz>

SONDA DO PŘEDSTAV A ZÁKLADNÍCH ZNALOSTÍ ŽÁKŮ STŘEDNÍCH ŠKOL V UČIVU PRAVDĚPODOBNOTI

JAN FIALA

Úvod

Učivo o pravděpodobnosti mohou učitelé na SŠ zařadit do výuky matematiky až v okamžiku, kdy se žáci seznámí s kombinatorikou. To se stane někdy již ve druhém ročníku. Žáci se tak mohou učit (někdy zcela poprvé) o pravděpodobnosti právě ve druhém ročníku SŠ. Podle našich zkušeností i podle informací kolegů z různých SŠ to však bývá až později, kdy na učivo pravděpodobnosti naváže téma statistika. V *Rámcovém vzdělávacím programu pro gymnázia* (Balada et al., 2007, s. 24) je pravděpodobnost zahrnuta do části *Práce s daty, kombinatorika, pravděpodobnost*. V části *Učivo* tam jsou uvedeny pouze pojmy *náhodný jev a jeho pravděpodobnost, pravděpodobnost sjednocení a průniku jevů, nezávislost jevů*. Tato stručná informace neposkytuje učiteli odpověď na otázku, v jaké šíři a hloubce má pravděpodobnost vyučovat. Pomoc nabízí učitelům standardy matematiky (Fuchs et al., 1998, s. 34–35), které obsahují návodné typové úlohy z pravděpodobnosti přímo využitelné ve výuce. Podstatné komplikace při středoškolské výuce pravděpodobnosti způsobuje učitelům skutečnost, že učivo pravděpodobnosti není explicitně zahrnuto do *Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání* (Balada et al., 2017), a tak se někteří žáci s pravděpodobností na ZŠ často vůbec nesetkají. Přestože je učivo pravděpodobnosti obsahem školních vzdělávacích programů některých ZŠ či víceletých gymnázií, většinou mu

učitelé věnují spíše okrajovou pozornost a vyučují ho ve velmi omezené míře i hloubce. Učitelé na SŠ nemají pak u žáků v pravděpodobnosti na co navazovat a jsou nuceni vyučovat pravděpodobnost jako zcela nové téma. Zatímco se např. v Německu učí žáci o pravděpodobnosti již na 1. stupni ZŠ, zůstává na českých školách princip cyklického řazení učiva ve výuce pravděpodobnosti nenaplňený.

Pilotážní dotazník

K realizaci anonymního dotazníkového šetření, jehož součástí byly také testové úlohy, jsme byli inspirováni čistě profesionálním zájmem. Autor chtěl před zahájením výuky pravděpodobnosti ve třetím ročníku na gymnáziu získat informace o tom, jaké mají žáci dosavadní představy o pravděpodobnosti náhodných jevů a kolik z nich je vybaveno základními znalostmi a početními dovednostmi v této oblasti. Podle dosažené úrovně znalostí a dovedností studentů se autor rozhodoval, jak koncipovat distanční výuku pravděpodobnosti, která probíhala v květnu a červnu 2020, kdy byly školy uzavřeny z důvodu šíření epidemie covid-19.

Nestandardizovaný dotazník jsme vytvořili v souladu se základními požadavky na jeho konstrukci podle Pelikána (2007, s. 104–115) v elektronické podobě v prostředí formulářů Google. Dotazník měl celkem 24 převážně neprametrických položek, z nichž některé byly otázky otevřené, jiné polouzavřené či zcela uzavřené s možností výběru právě jedné nebo více odpovědí. Dotazníkovou metodu jsme zvolili především s ohledem na snadnost její administrace i s ohledem na obtížnou situaci v organizaci distančního vzdělávání.

První skupina otázek zjišťovala názory a představy žáků o vybraných pojmech z pravděpodobnosti. Druhá skupina otázek měla podobu didaktického testu, který obsahoval jednoduché matematické úlohy na úrovni ZŠ. Didaktický test nelze označit za standardizovaný test, šlo o test v pilotážní verzi, který bude dále upravován a využíván v plánovaných podobně zaměřených výzkumných šetřeních.

Původní testovaný vzorek tvořilo 27 žáků třetího ročníku čtyřletého gymnázia, které autor vyučuje matematiku. Tato skupina respondentů byla nakonec rozšířena dále o žáky ze stejné školy, které autor nevyučuje, a také o žáky z jiných SŠ. Dotazník vyplnilo celkem 110 žáků druhých a třetích ročníků především z gymnázií z různých krajů ČR, kteří se ve výuce matematiky na SŠ s pravděpodobností dosud nesetkali. Výběr škol lze považovat za náhodný. Žáci odpovídali na otázky anonymně, dotazník nebyl nijak sumativně hodnocen.

Komentáře některých výsledků pilotáže

Oblast žakovských představ o „náhodě“

Otázka č. 1. *V jaké situaci ses v běžném životě setkal(a) s náhodou? Kdy náhoda podle tebe (aspoň částečně) ovlivnila tvůj život?*

Z žakovských odpovědí vybíráme:

„Když jsem přišla pozdě na schůzku a ostatní měli také zpoždění. Když jsem náhodou byl vylosován a vyhrál 100 Kč. Například když jsem si koupil lístek do tomboly a náhodou jsem vyhrál. Když jsem náhodou vyhrál ve Sportce. Náhoda byla, že se mi nestalo nic zlého, když jsem měl úraz na kole. Když jsem zaspala a chvátala na autobus, tak byla náhoda, že autobus měl taky zpoždění. Byla náhoda, že jsem se narodila jako holka. Myslím si, že jedna náhoda byla, že když jsem nastoupila na gymnázium, měla jsem být v jiné třídě, než momentálně jsem. Tato náhoda mi do života přinesla nejdůležitější lidi.“ Aj. Většina odpovědí popisuje náhodné děje s důsledky pro život žáků.

Podle očekávání se však objevila také vyjádření s oběma meziními ohodnoceními ve smyslu „náhoda neexistuje“ a „všechno řídí náhoda“:

„Asi nikdy můj život náhoda neovlivnila, pokud ano, tak o tom nevím. Nejspíš nikdy. Nevzpomenu si, asi žádná životní náhoda. S náhodou jsem se ve svém životě podle mého nesetkala. A všeobecně na náhody nevěřím.“

Naproti tomu diametrálně odlišný názor:

„Neustále, všechno je o náhodě. Myslím, že život je plný náhod a nečekaných událostí, které mě ovlivňují dnes a denně.“

Zajímavé je, že si někteří žáci pod důsledek náhody představují výhradně něco pozitivního, jiní pouze něco negativního, jako např.: „Já náhodu beru jako špatnou věc, nikdy nepřinese nic dobrého.“

Otázka č. 2. *Vzpomínáš si na nějaké hry ze svého dětství, v nichž hrála roli náhoda? Uveď název takové hry.*

Nejčastějšími odpověďmi byly hra Člověče, nezlob se!, Kámen, nůžky, papír, Kostky, Dostihy a sázky, karetní hra Prší, Pexeso, Monopoly aj. Žáci připomněli také deskovou hru Twister, která se opírá o losovací zařízení ruletka. Mezi odpověďmi se objevily také počítačové hry GTA a původně videohra Dungeons & Dragons, u nichž prožívají hráči různé náhodné situace. Žáci nezmínili např. hru v ruletu. Jednou z odpovědí byla i spíše psychologická hra Městečko Palermo.

Otázka č. 3. *Které z uvedených dějů nejsou (!) podle tebe náhodné?¹*

- a) složení maturitní zkoušky,
- b) dojít včas na zastávku autobusu,
- c) narození chlapce či dívky,
- d) výpočet objemu koule,
- e) autonehoda,
- f) měření rychlosti vozidla policejní hlídkou, budeme-li projíždět úsekem, kde se právě měří rychlost jízdy,²
- g) výběr bankovního produktu s nevýhodnými podmínkami,
- h) výhra SK Slavia nad FC Real Madrid.

Řešení úlohy: Za děje, které nejsou náhodné, považujeme možnosti d), f) a g). Výsledek děje u možnosti a) (složení maturitní zkoušky) považujeme za náhodný, protože jej ovlivňuje více nepředvídatelných okolností, jako je aktuální fyzický a psychický stav stu-

¹ Žáci volili jednu nebo více z nabízených odpovědí.

² Zde máme na mysli to, zda je náhodný výsledek měření rychlosti vozidla.

denta, často hraje roli i složení maturitní komise aj. Náhodnost děje „složení maturitní zkoušky“ může student ovlivnit řádnou přípravou. Někdy však i přes poctivou přípravu nemusí student u maturity uspět. Podobně i u možnosti b) soudíme, že dojít včas na zastávku je výsledkem náhody, neboť naplnění skutečnosti, že odjedeme plánovaným spojem, může ovlivnit mnoho okolností (zaspání, potřeba návratu domů pro zapomenutou věc do školy, nehoda během cesty k zastávce, dodržování jízdního řádu aj.).

Počty přidělených hlasů žáků u jednotlivých možností: a) 69, b) 69, c) 18, d) 87, e) 33, f) 42, g) 65, h) 25.

Složení maturitní zkoušky považuje hodně žáků za jev³, který není náhodný, považují jej zřejmě za jistý nebo téměř jistý. Soudí tak zřejmě na základě své zkušenosti, že maturitní zkoušku složí drtivá většina studentů čtvrtých ročníků. O vlastní zkušenost ze života se zřejmě žáci opírali i u možnosti b). U možnosti d) bychom však očekávali vyšší počet hlasů než 87 ze 110 respondentů, neboť děj, při kterém máme vypočítat objem koule, není zjevně náhodný. Podobně u možnosti g) (pouze 65 odpovědí ze 110), kde však předpokládáme potřebné znalosti v oblasti bankovních služeb nebo fundovaná doporučení odborníků. V odpovědi f) zastává většina žáků též názor jako autor, totiž že měření rychlosti auta je přesné a jednoznačné, výsledkem měření je jediné konkrétní číslo, jediný výsledek, tedy že nejde o náhodný děj. Děj je možné za stejných podmínek opakovat se stejným výsledkem. Pomíjíme však skutečnost, že Policie ČR sama přiznává při měření rychlosti vozidel určitou malou chybu.

Jsme toho názoru, že v prakticky každém ději lze objevit určitou míru náhodnosti. To potvrzuje i počet odpovědí žáků u možnosti h); 25 ze 110 žáků si myslí, že výhra SK Slavia nad FC Real Madrid není náhodný děj. Nejednoznačnost v hodnocení náhodnosti dějů lze výhodně využít při kvalitativním ohodnocování pravděpodobnosti náhodných jevů.

Oproti náhodným procesům lze sledovat tzv. deterministické pokusy (tzv. příčinné experimenty), u nichž každé opakování vede

³Slovo „jev“ zde užíváme v obecně hovorovém významu, tj. ve významu např. události, věci, procesu apod., tedy ve významu nematematickém.

k jedinému možnému výsledku: např. zahřívání vody na 100 °C při tlaku 1 015 hPa vede vždy k varu vody, předem známý výsledek reakce dvou chemických látek, pád kamene z výšky směrem k zemi, ale také možnosti d), f) a g) ze zadání úlohy 3 apod. Za náhodný děj tak většinou považujeme proces vedoucí k více možným navzájem odlišitelným výsledkům.

Otázka č. 4. *Co si představuješ pod slovem „náhoda“, „náhodný“?*

Některé z didakticky zajímavých odpovědí:

„Něco, co se nedá ovlivnit nějakým vnějším vlivem. Situace, kterou nikdo nečekal, ani to nikoho nenapadlo, že by se to mohlo stát, a přesto se to stane. Že se stane něco, co bychom nečekali, a může nám to i změnit život. Událost v životě, kterou jste vůbec nepředvídali a objevila se zčistajasna. Někaká situace, která se stala nenadále, nečekaně. Něco, co dopadne jinak, než jsem čekala – lépe. Jedná se o něco nevysvětlitelného. Když se něco stane a není to stoprocentně jisté. Když něco může dopadnout jakkoliv. Když se stane něco, co se běžně nestává. Náhoda je něco, co nemá pravidla. Něco, co se nedá běžně vysvětlit, prostě se to tak stalo, a tak to tak je. Náhoda je něco, o čemž jsme nevěděli, že přijde se 100% pravděpodobností, spíše naopak tato pravděpodobnost byla malá. Něco, co jsme úmyslně nezapříčinili. Pod slovem náhoda si představuji okamžik v životě, kdy všechno mohlo skončit úplně jinak, takové rozcestí. Něco, co se stane a já to neovlivním. Prostě to tak je a nic s tím neudělám. Událost, která se stane bez našeho zásahu. Skutečnost, která je neovlivnitelná, není možné najít její pravou příčinu. Něco, co nečekám a co nemůžu ovlivnit. Něco, co se stane, když to nečekáme, nebo je to na bázi pravděpodobnosti. Něco, co je nepředvídatelné. Nedá se dopředu zjistit, jak něco dopadne. Někaký čin či skutek, který si nedokážu vysvětlit, proč se stal. Věc, kterou jsem nerozhodla já nebo někdo jiný. Boží vůle a osud. Něco, co se stane bez předpokladu a načasování na 100% podle představ.“

Často si člověk vůbec neuvědomuje, že vše, co dělá, je ovlivněno náhodou, rovněž vše, co se kolem nás děje, má povahu nejis-

toty a potenciálního rizika. O tom bychom měli v problematických situacích přemýšlet, i přestože jsou lidské úsudky plynoucí z intuíce a představivosti většinou klamně. Lidé se nechtějí smířit s vlivem náhody, nepřipouštějí si nepředvídatelnost některých jevů, odmítají vliv neurčitosti a naopak touží po určitosti a řádu, což zřejmě pramení z psychické potřeby člověka uchovat si duševní klid. Subjektivní (tzv. apriorní) odhady pravděpodobností sledovaných dějů ale mohou naše rozhodování (někdy méně, jindy zásadně) ovlivnit. Například velmi málo pravděpodobný jev bychom neměli brát příliš vážně. Tím se však lidé často nepochopitelně neřídí, zbytečně se stresují, jsou nešťastní a činí špatná rozhodnutí. V situaci pravidelně se opakujícího jevu se řídíme většinou zkušenostmi z dřívějších výsledků daného pokusu, tj. tím, „co se obvykle stává“, tedy minulostí. Ani to však není spolehlivě prozíravé, neboť budoucnost nekopíruje minulost, naopak je plná nahodilosti. Proto se minulostí lze jen inspirovat. V nové situaci či při prospektivní úvaze je naše rozhodnutí spíše intuitivní. Také tzv. kolektivní intuice (moudrost) téměř vždy v predikcích komplexních jevů a dějů selhává. Nutnost rozhodovat se ale ukazuje na to, že v životě člověka není žádná jistota.

Teorie pravděpodobnosti (ač se často označuje za „vědu o náhodě“) nestuduje „náhodu“, nýbrž náhodné jevy a pomocí pravděpodobnosti číselně vyjadřuje míru očekávání jejich nastání. Náhoda není matematický pojem, není potřeba ji definovat (ani to není možné) (Büchter & Henn, 2007, s. 376) a hlubší rozbor všech jejích významových aspektů ani nepatří do výuky matematiky na ZŠ či SŠ (Krüger et al., 2015, s. 213). Přesto je podle našeho názoru vhodné (především jako motivace k učení se pravděpodobnosti), aby žáci v propedeutické fázi výuky pravděpodobnosti o fenoménu náhody přemýšleli a hledali a popisovali náhodné děje ze svého života, neboť si tak budují prostředí pro uplatnění později nabytých znalostí z pravděpodobnosti. Náhoda představuje široké téma zasahující snad do všech vědeckých oborů, přírodovědných i humanitních disciplín, zvláště pak do filozofie.

Podrobnou diskusi k užívání pojmů „náhoda“ a „náhodný“ ve výuce na školách provádí např. autoři Krüger et al. (2015,

s. 217–222). Jejímú rozboru se zde nemůžeme podrobně věnovat.

Náhodný jev matematicky přesně definují Płocki a Tlustý (2007, s. 56) takto: „Pokud (Ω, p) je pravděpodobnostní prostor, tak každou podmnožinu množiny Ω nazýváme *jev*. Množina \mathcal{Z} všech podmnožin množiny Ω se nazývá *množina příbuzných jevů v tomto pravděpodobnostním prostoru*.“ Pro potřeby SŠ zcela postačí vymezení pojmu náhodný jev podle učebnice matematiky pro gymnázia (Calda & Dupač, 1993, s. 80): „Podmnožiny množiny možných výsledků nazýváme jevy.“

Z odpovědí žáků v dotazníku vyplývá, že mají žáci (respondenti dotazníku) správnou intuitivní představu, co v jejich životě představuje „náhoda“, a v drtivé většině s pochopením připouštějí její vliv na svůj život. Svě představy o náhodě získali z hovorového užívání náhody v různých situacích během jejich dosavadního života.

Oblast žákovských představ o „pravděpodobnosti“ a „šanci“

Otázka č. 1. *Co si hovorově představuješ pod slovy „pravděpodobnost“, „pravděpodobný“? Jaká jejich synonyma znáš?*

Mezi nejčastějšími odpověďmi byly tyto:

„Naděje. Štěstí. Šance (že se událost může stát). Největší šance. Možnost. Možný výsledek, probabilita. Riziko. Velká náhoda. Vyhledka, naděje i zklamání. Pravděpodobné je reálné, očekávané. To, co si skoro na 100 % myslíme, že tak bude. Pravděpodobnost je jev, který udává očekávatelnost nějakého určitého jevu. Je zřejmé, že se něco stane, nebo že něco tak bude. Je to vlastně číselná hodnota, která nám udává poměr mezi tím jevem, jehož výskyt řešíme, a celkovým počtem situací, ve kterých tento jev zkoumáme. Je dost možné, že se tato věc stane. Někaké předurčení: pravděpodobně se to stane (sice na 80 %, nějaká pochybnost tam je, ale stane se to). Udává nám třeba šanci na výhru, je to naděje. Předpokládaný výsledek, něco, co se dá asi očekávat. Věc, která se skoro jistě stane. Je „tam“ nějaká/možná šance na výhru. Pravděpodobnost bych označila jako naději nějaké věci, že se stane. Někaký akt, který má větší šanci se stát než jiný. Pod poj-

mem pravděpodobnost si představuji šanci, že nastane nějaký jev. Číselná reprezentace představující šanci konání jevu, ze souboru výchozích prvků situace. Spíš, asi, nejspíš, téměř určitě. Na kolik procent se něco stane. Pravděpodobný je náhodný, nepředvídatelný, nejistý. Pravděpodobnost znamená, že nějaké skutečnosti naznačují, že něco nějak bude. Pravděpodobnost je patrnost. Věc, jež se s největší procentuální šancí stane. Uvěřitelnější, reálnější, mající větší šanci. Situace, která spíše nastane. Pravděpodobnost je míra šancí na úspěch. Pravděpodobné je to, co je podobné pravdě.“

Pravděpodobností se v hovorové řeči rozumí vyjádření přesvědčení, že něco nastane, že se něco očekává. Souhlasit tak můžeme s žákovskými synonymy „naděje“, „šance“, „vyhlídka“, „očekávatelnost“, méně se v češtině užívá „probabilita“. Označujeme-li v hovorové řeči něco za pravděpodobné, vyjadřujeme tím, že se to spíše stane nebo že to nastane téměř jistě, tedy nastání jevu (výsledku) přisuzujeme vysokou míru očekávání. Jak uvádí respondenti: „Nějaké předurčení: pravděpodobně se to stane (sice na 80 %, nějaká pochybnost tam je, ale stane se to). Někjaký akt, který má větší šanci se stát než jiný. Uvěřitelnější, reálnější. Nepochybujeme o výsledku, že by nenastal.“

Zajímavá je formulace „Pravděpodobné je to, co je podobné pravdě.“, se kterou v hovorové řeči souhlasíme. Pokud se totiž něco stane, stane se to skutečným, pravdivým.

Výše jmenované intuitivní představy a jejich verbální formulace jsou vhodným východiskem pro budování matematických představ o pravděpodobnosti. Po nácviku kvalitativního ohodnocení pravděpodobnosti se žáci učí kvantitativní popis pravděpodobnosti. Díky němu pak rozumí pod pravděpodobností především nějaké číslo z intervalu $(0; 1)$, tedy kvantitativní ohodnocení míry (stupně) očekávání, že nastane tzv. náhodný jev (výsledek) při určitém náhodném ději (procesu, pokusu). Jak kvantitativní ohodnocení pravděpodobnosti nalézt zde již dále nebudeme připomínat.

Otázka č. 2. *V souvislosti s pravděpodobností se často používá slovo „šance“. Vyber právě jednu z možností:*

- a) Šance a pravděpodobnost nejsou synonyma.
 b) Šance a pravděpodobnost jsou synonyma.

Celkem 48 % žáků se domnívá, že „pravděpodobnost“ a „šance“ nejsou synonyma, 52 % je za synonyma považuje.

Podle našeho názoru je úhel pohledu dvojitý. V běžné hovorové řeči lze pravděpodobnost významově ztotožnit s pojmem šance. Pravděpodobnost, že nastane určitý výsledek, odpovídá velikosti šancí, se kterými výsledek nastane. Zvláště na ZŠ je vhodné využívat spojení např. „Mám velkou šanci na výhru na kole štěstí.“ jako synonymní vyjádření pro „Pravděpodobnost mé výhry na kole štěstí je vysoká.“ „Šance“ se využívá také při srovnáních, jako např. „Na levém kole štěstí mám větší šanci na výhru než na druhém kole vpravo.“ Šance tedy slouží k upevňování představ o pojmu pravděpodobnost, k udávání či odhadování její hodnoty.

V teorii pravděpodobnosti je však potřeba „pravděpodobnost“ od „šance“ odlišit. Šance $O(A)$ na nastání určitého jevu A je např. podle Hendla (2015, s. 128) podílem pravděpodobnosti „nastání“ tohoto jevu a pravděpodobnosti, že týž jev nenastane:

$$O(A) = \frac{P(A)}{1 - P(A)} = \frac{P(A)}{P(\bar{A})}.$$

Např. při hodu kostkou je pravděpodobnost $P(A)$ jevu A „Padne číslo 1.“ rovna $\frac{1}{6}$, ale šance na nastání jevu, že „Padne číslo 1.“ je $O(A) = \frac{1}{5} = 0,2$, tj. 20 %.

Čím větší je pravděpodobnost na „nastání“ určitého výsledku, tím větší jsou také šance na „nastání“ tohoto výsledku. Blíží-li se pravděpodobnost 1, blíží se šance nekonečnu. Blíží-li se pravděpodobnost 0, pak jsou šance nulové. Šance se nedají na rozdíl od pravděpodobnosti znázornit na pravděpodobnostní škále.

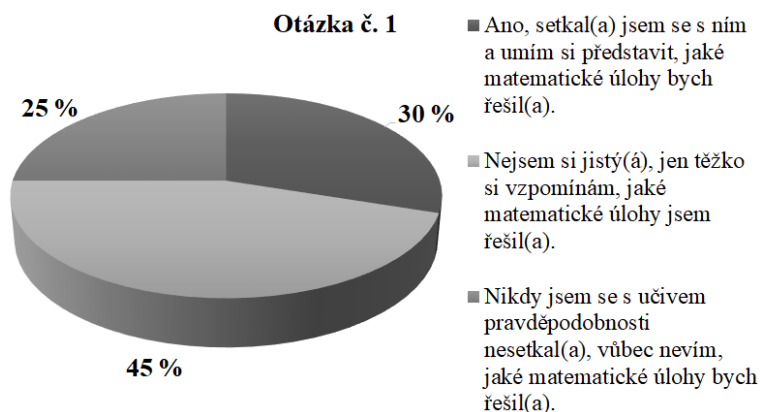
Při výuce pravděpodobnosti na ZŠ tedy lze pojem šance zpočátku využít jako synonymum pro pravděpodobnost, brzy je však potřeba oba pojmy striktně odlišovat, jak doporučují ve své koncepci výuky pravděpodobnosti na 2. stupni ZŠ Krüger et al. (2015, s. 244).

Oblast dosavadního učení se žáků o pravděpodobnosti

Před zjišťováním úrovně dosažených základních znalostí z pravděpodobnosti (pravděpodobnostního myšlení) jsme se žáků dotazovali, zda vůbec a kde se s pravděpodobností setkali.

Otázka č. 1. *Setkal(a) ses dosud s učivem pravděpodobnosti?⁴*

Výsledky dotazování žáků ukazuje obrázek 1.



Obr. 1: Grafické znázornění rozdělení relativních četností jednotlivých odpovědí žáků na otázku č. 1

Z výsledků vyplývá, že asi 70 % všech dotazovaných má nejspíš jen malé nebo vůbec žádné zkušenosti s učivem pravděpodobnosti. Zdá se tedy, že se dotazovaní žáci učili na ZŠ o pravděpodobnosti jen v omezené míře a že se nejméně třetina všech oslovených žáků setká s učivem pravděpodobnosti zcela poprvé až v hodinách matematiky na SŠ.

Otázka č. 2. *Pokud ses setkal(a) s pravděpodobností, kde to bylo?⁵*

Celkem 29 žáků uvedlo, že se s pravděpodobností setkalo ve škole při výuce matematiky nebo jiného předmětu, 21 žáků vybralo od-

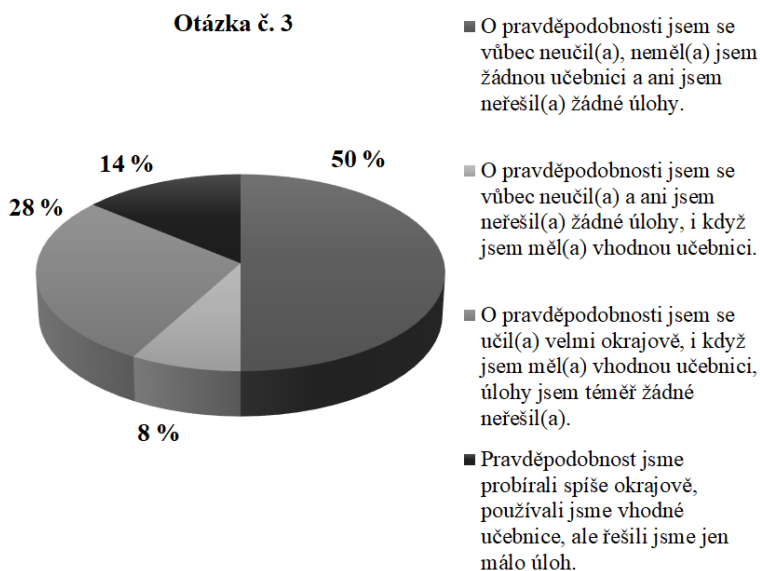
⁴Žáci volili právě jednu z nabízených odpovědí.

⁵Žáci volili jednu nebo více z nabízených odpovědí.

pověď mimoškolní prostředí nebo v rámci volnočasových aktivit, docela překvapivě se 22 žáků setkalo s pravděpodobností až na SŠ v rámci výuky jiného předmětu než matematiky, 24 žáků řešilo zajímavou úlohu nebo kvíz z pravděpodobnosti, 15 žáků prý četlo knihu, která se dotýkala pravděpodobnosti a náhody. Jen jednotky žáků pak uvedly jinou možnost, jako např. studium v zahraničí, vlastní zájem o pravděpodobnost a statistiku, účast na přednášce, volitelný seminář na ZŠ aj.

Otázka č. 3. *Do jaké míry ses na ZŠ učil(a) o pravděpodobnosti?*⁶

Shrnutí odpovědí žáků ukazuje obrázek 2.



Obr. 2: Grafické znázornění rozdělení relativních četností jednotlivých odpovědí žáků na otázku č. 3

Žádný žák neuvedl, že by se zabýval pravděpodobností intenzivně, používal vhodné učebnice a řešil větší množství úloh.⁷

⁶Žáci volili právě jednu z nabízených odpovědí.

⁷Tato odpověď není zahrnuta do diagramu.

Z výše uvedeného lze soudit, že se dotazovaní žáci setkali s pravděpodobností ve velmi omezené míře, nebo vůbec. Pokud se žáci o pravděpodobnosti učili, bylo to na základní škole, často však i mimo školní prostředí. Většinou žáci řešili jen velmi málo pravděpodobnostních úloh; pokud už učebnice měli, tak je spíše nevyužívali.

Oblast dosažené úrovně znalostí z pravděpodobnosti na ZŠ

V dalších položkách dotazníku jsme se zaměřili na zjišťování dosažených znalostí z učiva pravděpodobnosti. Žádné ze zařazených úloh nebyly úlohy výpočtové, všechny úlohy byly řešitelné pouhým úsudkem a z paměti.

Úloha 1. *Jaké znáš hry nebo činnosti, díky nimž bys spravedlivě (férově) vybral(a) jednoho ze skupiny?*

Vybíráme např. tyto odpovědi žáků:

„Losování (bez dalších specifik), dětská rozpočítadla, Chodí pešek okolo, tahání kratší slámky, tahání sirky, hra Kámen, nůžky, papír, hod mincí, výběrové řízení, které má v porotě více lidí, soutěž v dovednosti, rychlosti/správnosti plnění úkolu, kostka, běhání okolo židlí“ aj. Dokonce se objevil příklad užití generátoru náhodných čísel.

U některých odpovědí (např. „hraní na babu, vybíjená, sportovní hry, závod, soutěž, na základě fyzických proporcí a dovedností hráčů“ aj.) chybí specifikace průběhu náhodného děje.

U losování jedné označené sirky z více sirek je potřeba losování organizovat tak, aby každý zúčastněný měl možnost vylosovat označenou sirku se stejnou pravděpodobností. Je tedy potřeba před každým losováním vybranou sirku vrátit do osudí a takto pokračovat tak dlouho, dokud si někdo nevylosuje označenou sirku.⁸

Problematická jsou také často uváděná rozpočítadla: pokud se používají bez znalosti hlubších matematických podtextů („Kde

⁸Před zahájením vlastního losování sirek by mělo dojít ještě k rozhodnutí o tom, u koho ze zúčastněných se s losováním začne. To lze opět rozhodnout vhodným spravedlivým losováním.

musím začít rozpočítávat, aby poslední slabika rozpočítadla padla na předem vybraného kamaráda?“), lze je považovat za férový způsob výběru jednoho ze skupiny.⁹

Odpověď „Nevím o žádné [hře], slovo spravedlivě má široký pojem a je v něm zahrnuto spousta faktorů, které by můj výběr ovlivnily, aby to bylo férové.“ svědčí o tom, že respondent má na spravedlivost her komplexnější pohled.

Řešení úlohy: Zřejmě nejobjektivnější výběr jedné osoby ze skupiny lze provést losováním či užitím tabulky náhodných čísel či pomocí jiného vhodného generátoru náhodných čísel.

Úloha 2. *Abys napoprvé vyhrál(a) ve hře Kámen, nůžky, papír, čím je potřeba začít?*¹⁰

Více než 22 % žáků by začalo „kamenem“, shodně zhruba 10 % žáků by zvolilo „nůžky“ nebo „papír“. Zbytek (tj. asi 58 %) žáků váhá, většinou tvrdí, že je jedno, s čím se začne.

Řešení úlohy: Ve hře Kámen, nůžky, papír je úspěšná strategie pro výhru volit některý ze znaků náhodně, je tedy lhostejné, s jakým znakem hráč začne v první hře.

Úloha 3. *Házíme běžnou hrací kostkou. Co je podle tebe pravděpodobnější?*¹¹

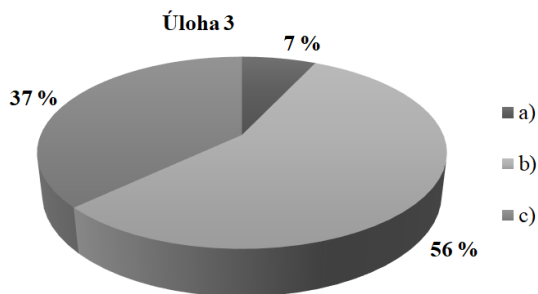
- a) *Sudé číslo padne častěji než číslo větší nebo rovno 3.*
- b) *Sudé číslo padne zhruba stejně často jako číslo větší nebo rovno 3.*
- c) *Číslo větší nebo rovno 3 padne častěji než číslo sudé.*

Řešení úlohy: c). Pravděpodobnost, že „padne číslo větší nebo rovno 3“, je $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, zatímco pravděpodobnost, že „padne číslo sudé“, je $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. I bez výpočtů mohli žáci správně usoudit, že počet výsledků příznivých hodu čísla většího nebo rovného 3 je o jedna větší než počet výsledků příznivých hodu sudého čísla. Výsledky dotazování žáků ukazuje obrázek 3.

⁹Opět je zde nutno provést náhodný výběr toho z kamarádů, u kterého se začne rozpočítávat, případně ještě náhodně stanovit směr rozpočítávání.

¹⁰Žáci volili právě jednu z nabízených odpovědí nebo uvedli svou odpověď.

¹¹Žáci volili právě jednu z nabízených odpovědí.



Obr. 3: Grafické znázornění rozdělení relativních četností jednotlivých odpovědí žáků v úloze 3

Jedinou správnou odpověď c) zvolilo pouze 37 % žáků. Připouštíme však, že u nízkého počtu hodů se může snadno stát, že se budou počty výsledků příznivých sledovaným jevům velmi blížit či si budou přímo rovný. V této jednoduché úloze žáci tedy příliš úspěšní nebyli.

Úloha 4. *Ve hře Člověče, nezlob se! potřebuješ v nejvýše třetím hodu hodit šestku, abys mohl(a) vstoupit z „domečku“ do hry. Máš tři pokusy na hození šestky. Jaká výpověď je podle tebe správná?¹²*

- a) *Je velmi nepravděpodobné, že šestka ve třech hodech padne.*
- b) *Je stejně pravděpodobné, že šestka padne i že nepadne.*
- c) *Šance na padnutí šestky je fifty – fifty.*
- d) *Je spíše pravděpodobné, že šestku ve třetím hodu nakonec hodím.*
- e) *Hození šestky není vůbec možné.*
- f) *Hození šestky je jisté.*
- g) *Doplň vlastní názor.*

Pouze asi 14 % žáků považuje za velmi nepravděpodobné, že ve třech hodech hodí šestku. Naopak 47 % si myslí, že je stejně pravděpodobné, že šestku hodí i že ji nehodí. To schvaluje dalších 9 % žáků, kteří považují šanci na hození šestky za fifty – fifty. 18 % je přesvědčeno, že je spíše pravděpodobné, že nejpozději ve tře-

¹²Žáci volili právě jednu z nabízených odpovědí nebo uvedli svou odpověď.

tím hodu šestku nakonec hodí. Jeden student zvolil možnost, že hození šestky není možné, stejně tak jeden vybral možnost, že hození šestky je jisté. Jediný student doplnil vlastní odpověď, podle které je hození šestky spíše nepravděpodobné, uvádí však chybný výsledek $\frac{1}{6}$.

Řešení úlohy: Pravděpodobnost hození šestky v prvním hodu je $\frac{1}{6}$. Pokud však v prvním hodu šestka nepadne, což nastane s pravděpodobností $\frac{5}{6}$, je pravděpodobnost hození šestky ve druhém hodu $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$ (hození šestky v prvním a druhém hodu jsou dva nezávislé jevy), podobně pro třetí hod dostáváme $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{36} = \frac{25}{216}$, tedy pravděpodobnost, že v prvním, druhém nebo ve třetím hodu padne šestka, je $\frac{1}{6} + \frac{5}{36} + \frac{5}{216} = \frac{71}{216} \doteq 0,328$. Hození šestky nejpozději ve třetím hodu je tedy málo pravděpodobné.

Úloha 5. *Abychom z osudí s červenými a modrými koulemi se spíše větší pravděpodobností vytáhli modrou kouli, musí platit:*

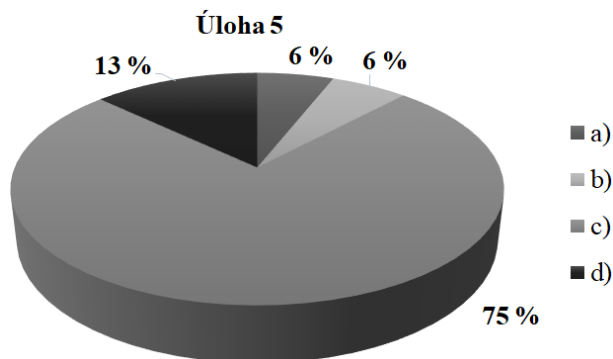
- Počet červených koulí je výrazně větší než počet modrých koulí.*
- Počet červených koulí je zhruba stejný jako počet modrých koulí.*
- Počet červených koulí je výrazně menší než počet modrých koulí.*
- Počty koulí nemají na výsledek vliv.*

Která z možností je správná? Vyber právě jednu odpověď.

Výsledky dotazování žáků ukazuje obrázek 4. Celkem 75 % žáků zvolilo správnou odpověď c). Zřejmě tedy i ti žáci, kteří se o pravděpodobnosti dříve neučili, byli schopni prostým úsudkem rozhodnout správně.

Úloha 6. *Představ si, že desetkrát házíš stejnou hrací kostkou se stěnami označenými čísly 1–6 a sleduješ, jestli padne číslo sudé, nebo liché. Vyber jednu nebo více možností:*

- Vsadil(a) bych si na to, že častěji padne číslo sudé.*
- Vsadil(a) bych si na to, že častěji padne číslo liché.*
- Je téměř jisté, že z 10 hodů padne číslo sudé právě pětkrát.*
- Je téměř jisté, že z 10 hodů padne číslo liché právě pětkrát.*



Obr. 4: Grafické znázornění rozdělení relativních četností jednotlivých odpovědí žáků v úloze 5

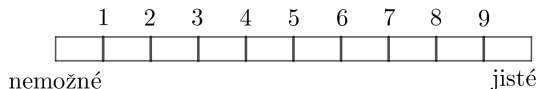
- e) *Je pravděpodobné, že počet hodů se sudým číslem bude stejný jako počet hodů s lichým číslem.*
- f) *Je možné, že se počet hodů se sudým a počet hodů s lichým číslem budou lišit.*
- g) *Je pravděpodobné, že padnou samá lichá čísla.*
- h) *Je pravděpodobné, že padnou samá sudá čísla.*
- i) *Jiná možnost.*

Uvádíme hodnoty relativních četností v procentech přiřazených voleb žáků jednotlivým odpovědím: a) 8 %, b) 7 %, c) 7 %, d) 7 %, e) 40 %, f) 75 %, g) 6 %, h) 4 % a jinou odpověď uvedla 3 % žáků.

Řešení úlohy: Pravděpodobnost, že padne sudé číslo, je rovna pravděpodobnosti, že padne číslo liché. Lze tedy očekávat, že se počet výsledků se sudým číslem bude blížit počtu výsledků s lichým číslem, nelze to však označit za naprosto jisté. To v podstatě vyjadřují obě správné odpovědi e) a f), které volila velká část respondentů. Protože však žáci zvolili v 75 % možnost f), soudíme, že chápou spojení „pravděpodobný jev“ ve významu spíše jistý nebo téměř jistý.

Úloha 7. *V osudí je 10 červených a 20 modrých koulí. Z osudí poslepu vylosuješ jednu kouli. Vyber ze stupnice bodů s mezními hodnotami „nemožné“ a „jisté“ (viz obrázek 5) místo, které vy-*

jadruje míru pravděpodobnosti, s jakou z osudí vytáhneš modrou kouli.¹³

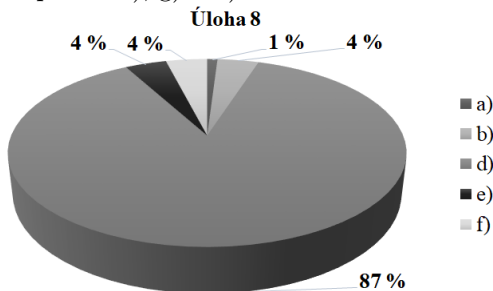


Obr. 5: Stupnice odpovědí k úloze 7

Řešení úlohy: V osudí je celkem 30 koulí, tedy pravděpodobnost, že vylosujeme modrou kouli, je $\frac{2}{3} = 0,\bar{6}$, což na stupnici odpovídá 6 (zvolilo asi 24 % žáků), případně po zaokrouhlení 7 (zvolilo 45 % žáků). Zbýlých 31 % žáků zvolilo jiné hodnoty ze stupnice než 6 či 7.

Úloha 8. Na otáčejícím se kole štěstí ve tvaru kruhu jsou vyznačeny čtyři shodné výseče, z nichž má jedna výseč červenou barvu. Jaká je šance¹⁴, že ukazatel ukáže na červenou výseč? Vyber právě jednu z možností: a) žádná, b) velmi malá, c) 15 %, d) 25 %, e) 50 %, f) 75 %, g) velmi vysoká, h) 100 %.

Řešení úlohy: Šance na výběr červené výseče je 25 % (odpověď d). Výsledky dotazování žáků ukazuje obrázek 6. Žádný žák nevybral některou z odpovědí c), g) a h).¹⁵



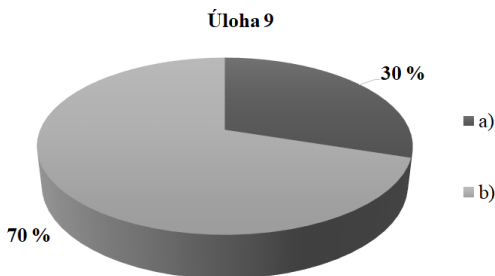
Obr. 6: Grafické znázornění rozdělení relativních četností jednotlivých odpovědí žáků v úloze 8

¹³Mezní hodnoty stupnice „nemožné“ a „jisté“ nebylo možné vybrat jako odpověď. Žáci mohli vybrat právě jednu z hodnot 1–9.

¹⁴Slovo „šance“ zde užíváme jako synonymum pravděpodobnosti v hovorovém významu.

¹⁵Možnosti c), g) a h) nejsou rovněž zahrnuty do diagramu.

Úloha 9. Z osudí se čtyřmi zelenými a dvěma červenými koulemi náhodně vytáhneme jednu kouli. Marek dostane jeden bod, když bude vytažena zelená koule. Petr dostane tři body, když bude vylosována červená koule. U kterého z chlapců je pravděpodobnější větší počet bodů, zopakujeme-li losování např. šedesátkrát? (Vytaženou kouli vždy vrátíme zpět do osudí.) Zvol právě jednu z možností: a) Marek bude mít víc bodů, b) Petr bude mít víc bodů.



Obr. 7: Grafické znázornění rozdělení relativních četností jednotlivých odpovědí žáků v úloze 9

Řešení úlohy: Přestože pravděpodobnost výhry Marka (vylosujeme zelenou kouli) $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ je větší než pravděpodobnost $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ výhry Petra (vylosujeme červenou kouli), očekává Petr při šedesáti opakováních pokusu asi $20 \cdot 3 = 60$ bodů, zatímco Marek pouze $40 \cdot 1 = 40$ bodů. Správná je odpověď b). Výsledky dotazování žáků ukazuje diagram na obrázku 7.

Závěr

Z našeho pilotážního dotazníku vyplývá, že žáci mají dobré intuitivní představy o pojmech náhoda a pravděpodobnost, které se opírají především o jejich zkušenosti ze života. Oba pojmy vysvětlují žáci ve významech jako v běžné hovorové řeči, což je dobrý základ pro rozvíjení matematických představ o náhodě a pravděpodobnosti. Dotazovaná skupina žáků vykazuje však nízkou úspěšnost v řešení některých elementárních pravděpodobnostních úloh. Příčinu spatřujeme v tom, že se s učivem pravděpodobnosti

setkali zřejmě jen někteří žáci, jiní jen velmi omezeně, spíše bez možnosti hlubšího promýšlení významů užívaných pojmů a bez dostatečného procvičení formou řešení pravděpodobnostních úloh. To potvrzuje naše zkušenosti o tom, že učitelé matematiky na SŠ jsou nuceni probrat učivo pravděpodobnosti ve výuce matematiky jako zcela novou látku, přitom mají možnost opřít se často pouze o intuitivní představy žáků z dob před zahájením školní výuky, neboť se žáci s učivem pravděpodobnosti na ZŠ vůbec nesetkávají.

S odkazem na výuku pravděpodobnosti např. v Německu doporučujeme, aby se žáci začínali seznamovat s pravděpodobností již na 1. stupni ZŠ. Na 2. stupni ZŠ by měly být tyto „prvostupňové“ (spíše nematematické) představy žáků o pravděpodobnosti dále rozvíjeny (například po seznámení se s učivem o zlomcích). Rovněž se přikláníme k tomu, aby na 1. a 2. stupni ZŠ bylo učivo pravděpodobnosti plnohodnotným učebním tématem výuky matematiky. Jedině tak bude moct středoškolský učitel na dosažené znalosti a dovednosti žáků ze ZŠ navázat a budou vytvořeny dobré podmínky pro dosažení dobré úrovně gramotnosti českých žáků v pravděpodobnosti.

Literatura

- [1] Balada, J., Baladová, G., Boněk, J., Brant, J., Brychnáčová, E., Doležalová, O., Faltýn, J., Herink, J., Holasová, T., Horská, V., Houska, J., Hovorková, M., Hučínová, L., Hudcová, D., Charalambidis, A., Jeřábek, J., Jonák, Z., Janoušková, S., Kodet, S., . . . , Zelendová, E. (2007). *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia*. Výzkumný ústav pedagogický v Praze.
- [2] Balada, J., Brant, J., Brychnáčová, E., Herink, J., Holasová, T., Horská, V., Hudcová, D., Hučínová, L., Charalambidis, A., Jonák, Z., Krčková, S., Kůlová, A., Lisnerová, R., Maršák, J., Masaříková, J., Nováková, J., Pastorová, M., Pernicová, H., Pumpr, V., . . . , Zahradníková, J. (2017). *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*. Výzkumný ústav pedagogický v Praze.

- [3] Büchter, A., & Henn, H.-W. (2007). *Elementare Stochastik. Eine Einführung in die Mathematik der Daten und des Zufalls.* Springer.
- [4] Calda, E., & Dupač, V. (1993). *Matematika pro gymnázia. Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika.* JČMF.
- [5] Fuchs, E., Kubát, J., Dittrich, J., Drahotský, P., Hrubý, D., Meixnerová, Z., & Pomykalová, E. (1998). *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia.* Prometheus.
- [6] Hendl, J. (2015). *Přehled statistických metod.* Portál.
- [7] Krüger, K., Sill, H-D., & Sikora, Ch. (2015). *Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I.* Springer Spektrum.
- [8] Pelikán, J. (2007). *Základy empirického výzkumu pedagogických jevů.* Nakladatelství Karolinum.
- [9] Płocki, A., & Tlustý, P. (2007). *Pravděpodobnost a statistika pro začátečníky a mírně pokročilé.* Prometheus.

Abstract

In this paper we comment on the results of a questionnaire survey in the field of probability. The questionnaire focused on students' ideas about some concepts from the probability curriculum and on students' success in solving basic probabilistic tasks. We attach the results of the questionnaire to the assignment of the tasks and in the didactic commentary we draw attention to the misconceptions of the pupils and the errors that occurred.

Jan Fiala

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Ekonomická fakulta

Katedra aplikované matematiky a informatiky

Studentská 13

370 05 České Budějovice

e-mail: fiala@ef.jcu.cz