Petr Šatný

Poznámky k úplnosti reálných čísel

Učitel matematiky, Vol. 25 (2017), No. 5, 298–308

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149118

POZNÁMKY K ÚPLNOSTI REÁLNÝCH ČÍSEL

Petr Šatný

V hodinách matematiky na střední škole všeobecně dbáme na to, aby si žáci o novým pojmech vytvářeli správné představy, aby tyto abstrakce dobře vnímali a dokázali s nimi manipulovat při řešení úloh. Nepředpokládá se, že přitom s žáky povedeme diskusi o povaze matematiky a jejímu vztahu k reálnému světu – kupříkladu geometrickému útvaru, jakou je přímka, přisuzujeme bez důkazu základní vlastnosti odpozorované od objektů, které nám v reálném světě přímky přibližují, jako třeba tenká napnutá nit.

Právě s přímkou a s určováním vzdálenosti mezi jejími body je spojen velmi složitý pojem, o kterém jsme vynuceni s žáky hovořit, jakmile se (již na základní škole) pustíme do výpočtů spojených s Pythagorovou větou. Jedná se o pojem *reálného čísla*, který je ryze matematickou konstrukcí, jež nelze motivovat žádnou praktickou činností, například *měřením* geometrických nebo fyzikálních veličin s sebelepší mírou přesnosti, dokud s danými číselnými hodnotami nezačneme provádět *teoretické výpočty* s cílem číselně interpretovat jejich výsledky.[1]

Na zásadní otázku, jak by měli žáci chápat reálná čísla, existuje naštěstí již dlouhá desetiletí všeobecně akceptovaná odpověď, kterou najdeme v učebnicích ve formě symbiózy dvou aspektů – geometrického a aritmetického:

1. (Kladné) reálné číslo je vyjádřením délky některé úsečky (při zvolené jednotce délky).
2. Reálná čísla dělíme na racionální a iracionální. První z nich jsou právě ta čísla, která lze vyjádřit zlomky (podíly dvou celých čísel). Racionální čísla mají v desítkové soustavě buďto konečný počet nenulových číslic za desetinnou čárkou, nebo

[1]Patrně nejslavnější iracionální číslo $\sqrt{2}$ je tak teoretickou odpovědí na otázku: Kolik měří úhlopříčka jednotkového čtverce?

je těchto číslic nekonečně mnoho, avšak se od jistého místa periodicky opakují. Čísla iracionální naopak mají ve svém zápisu za desetinnou čárkou nekonečně mnoho nenulových číslic, jež se od žádného místa periodicky neopakují.[2]

Jistě se jako učitelé můžeme spokojit se situací, kdy naši žáci jsou schopni vymezit iracionální čísla pouze *negativně*, tedy jako reálná čísla, která nejsou racionální, a chápou jejich hlavní roli: tato čísla nám slouží k tomu, aby každý bod na číselné ose byl obrazem některého reálného čísla. Kdybychom na číselné ose uvažovali pouze body, které jsou obrazy racionálních čísel, byla by přímka tvořená těmito body „děravá“ — takové dvě různoběžné přímky by se mohly minout, tj. nemít průsečík. Uvozovkami v poslední větě intuitivně naznačujeme rozdíl mezi množinou $\mathbb{Q}$ všech racionálních a množinou $\mathbb{R}$ všech reálných čísel. První z nich je „neúplná“, druhá je „úplná“, tj. obohacená o iracionální čísla, a tak popisující všechny body „spojité“ přímky (tedy přímky „bez mezer“) brané jako číselná osa.

Obr. 1: Grafické znázornění množin $\mathbb{Q}$ (vlevo) a $\mathbb{R}$ (vpravo).

Ani poslední větou, kterou žákům někdy pro názornější představu přibližujeme nic podstatného neříkajícím porovnáním, jaké vidíte[3] na obrázku 1, jsme ovšem k exaktnímu chápání pojmu *úplnosti* nepokročili. Přiznejme ovšem, že o takový krok při výuce na střední škole bychom vůbec neměli (a vlastně ani nemůžeme) usilovat. My, učitelé matematiky, bychom však v otázce úplnosti množiny $\mathbb{R}$ měli mít úplně jasno, dokonce by bylo prospěšné,

[2]Přiznejme žákům, že my lidé nejsme nekonečných zápisů schopni, můžeme si však takový zápis představit, má ho třeba číslo $x = 1{,}01001000100001\ldots$. Žáci jistě pochopí, jak bude zápis čísla x dále pokračovat, budou však schopni vysvětlit, proč takové x není racionální číslo?

[3]Při znázornění množiny $\mathbb{Q}$ „hustým rastrem“ bodů je nutné žáky upozornit, že mezi každými dvěma různými racionálními čísly leží nekonečně mnoho jiných racionálních čísel.

abychom se seznámili s tím, jakými různými cestami k tomuto pojmu přistupovali matematičtí velikáni 18. a 19. století, tedy v poměrně dlouhém období, ve kterém se teorie reálných čísel dotvářela do současné podoby. Přehledu těchto přístupů (budeme je nazývat *principy úplnosti*) a jejich (poměrně málo známým) vzájemným logickým vazbám je věnován náš příspěvek.[4] Není bez zajímavosti, jak dále naznačíme, že při posuzování zmíněných vazeb sehrává významnou roli další základní vlastnost reálných čísel, která se odráží již v podobenství kněze Aurelia AUGUSTINA (354–430) o chlapci, který se snaží malou lžičkou přelít vodu z moře do jámy v písku, kterou vyhloubil. Odhlédněme od ponaučení, které má popsaná situace přinést, a konstatujme, že, teoreticky vzato, obrovský objem vody v celém moři je pouze konečným násobkem malého objemu lžičky, protože se jedná o dvě (kladné) hodnoty *téže* skalární veličiny – objemu.[5] Odpovídající vlastnost reálných čísel popíšeme dále v textu *Archimédovým principem.* Je vyjádřením toho, že mezi kladná reálná čísla nepatří čísla „nekonečně velká“ ani „nekonečně malá“.

Slíbený přehled začneme konstatováním, že současní absolventi studijních programů pro přípravu středoškolských učitelů matematiky podrobnou konstrukci reálných čísel ve fakultních přednáškách většinou vůbec neprobírají. Vlastnosti reálných čísel včetně jejich úplnosti však nezbytně potřebují už v prvním semestru základního kurzu matematické analýzy. Proto se v jeho úvodu množina $\mathbb{R}$ zavádí obvykle axiomaticky, tedy co nejstručnějším výčtem jejích základních vlastností, které přijímáme za platné bez důkazu.[6] Uveďme pro představu, jak takové zavedení vypadá.

---

[4] Autor se principy úplnosti zabýval v 1. kapitole své diplomové práce *Základní věty matematické analýzy a jejich aplikace* (Šatný, 2011), která se stala inspirací pro tento článek. Čtenáři, kteří budou mít zájem o důkazy tvrzení, jež zde uvádíme, proto tuto práci doporučujeme.

[5] Jinou situaci bychom dostali, kdybychom chtěli srovnávat kupříkladu *délku* úsečky s *obsahem* čtverce.

[6] Korektní odvození všech vlastností reálných čísel ze soustavy axiomů provedl např. Edmund Landau v roce 1930, který sám napsal, že je to místy „namáhavá nuda“ (Veselý, 1997).

Oborem reálných čísel nazýváme strukturu $(\mathbb{R}, +, \cdot, >)$, která je tvořena množinou $\mathbb{R}$ se dvěma binárními operacemi ($+$ a $\cdot$), binární relací $<$, speciálními prvky 0, 1 a pro libovolné její prvky x, y, z splňuje následující axiomy:

(A1) $x + y = y + x$ (komutativita sčítání)
(A2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (asociativita sčítání)
(A3) $x + 0 = x$ (existence nulového prvku)
(A4) $\exists(-x)\colon x + (-x) = 0$ (existence opačného prvku)
(A5) $x \cdot y = y \cdot x$ (komutativita násobení)
(A6) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (asociativita násobení)
(A7) $x \cdot 1 = x$ (existence jednotkového prvku)
(A8) $x \neq 0 \Rightarrow \exists x^{-1}\colon\ x \cdot x^{-1} = 1$ (existence inverzního prvku)
(A9) $(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$ (distributivní zákon)
(A10) Platí právě jeden ze vztahů $x = y$, $x < y$, $y < x$. (trichotomie)
(A11) $x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z$ (tranzitivita)
(A12) $x < y \Rightarrow x + z < y + z$ (operace $+$ je slučitelná s relací $<$)
(A13) $x < y \wedge z > 0 \Rightarrow x \cdot z < y \cdot z$ (operace $\cdot$ je slučitelná s relací $<$)
(A14) Každá neprázdná shora omezená podmnožina $\mathbb{R}$ má supremum.

Abychom s takto zavedenou množinou $\mathbb{R}$ mohli „bez obav“ v matematických teoriích pracovat, měli bychom ještě dokázat, že taková struktura opravdu existuje, což za předpokladu bezespornosti obvyklé teorie množin skutečně lze. Navíc je možné ukázat, že množina vyhovující této struktuře je jediná až na izomorfismus, tj. bijektivní zobrazení zachovávající obě operace $+$, $\cdot$ a relaci $<$.

Čtenář při pohledu na vypsané axiomy (A1) až (A14) jistě usoudí, že úplnost množiny $\mathbb{R}$ je patrně skryta v posledním axiomu (A14), který poprvé v této podobě vyslovil Carl Friedrich Gauss (1777–1855) a který proto dále budeme označovat jako **Gaussův princip**. K jeho formulaci vysvětleme, že množina X, $X \subset \mathbb{R}$, se nazývá *shora omezená*, pokud má nějakou *horní závoru*, tedy pokud existuje číslo $h \in \mathbb{R}$ takové, že nerovnost $x \leq h$ platí pro každé $x \in X$. Nejmenší ze všech horních závor dané množiny X

se pak nazývá její *supremum*, číslo značené jako $\sup X$.

Je zřejmé, že množina $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel splňuje axiomy (A1)–(A13), ne však axiom (A14). Uvážíme-li kupříkladu její podmnožinu

$$X = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \wedge x^2 < 2\},$$

pak jejími horními závorami jsou právě ta kladná čísla h, která splňují nerovnost $h^2 \geq 2$, a mezi takovými čísly $h \in \mathbb{Q}$ zřejmě není nejmenší. Proto množina X nemá v množině $\mathbb{Q}$ supremum, má ho však v množině $\mathbb{R}$: $\sup X = \sqrt{2}$.

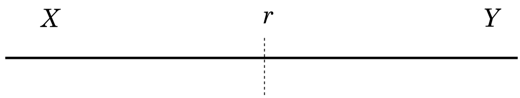
Poznamenejme nyní, že existují mnohé jiné množiny nežli pouze $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$, které splňují axiomy (A1)–(A13), každou z nich nazýváme *uspořádaným polem.* Jen některá z nich však mají další vlastnost, která je společná polím $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ a kterou vyjádříme následujícím principem, jež jsme v úvodní části příspěvku spojili s Augustinovým podobenstvím.

Archimédův princip. *Nechť v uspořádaném poli P existuje pro každé dva kladné prvky x a y takové $n \in \mathbb{N}$, že platí $nx > y$. Pak pole P nazýváme archimédovské.*

Čtenářům můžeme doporučit, aby sami dokázali, že Archimédův princip plyne z axiomu (A14), a to sporem: Připusťte, že v uspořádaném poli P existují dva kladné prvky x a y takové, že prvek y je horní závora množiny $X = \{nx \mid n \in \mathbb{N}\}$. Ukažte, že pak množina X nemá v P supremum (je-li h horní závora X, je i prvek $h - x$ horní závora X).

Vraťme se však od archimédovských polí k našemu hlavnímu tématu, úplnosti množiny $\mathbb{R}$, kterou jsme prozatím vyjádřili pouze Gaussovým principem. Mezi objevitele dalších vlastností zajišťující „úplnost“ reálných čísel patří Francouz Augustin Louis CAUCHY (1789–1859) a dále němečtí matematici Karl WEIERSTRASS (1815–1897), Georg CANTOR (1845-1918) a Richard DEDEKIND (1831–1916). Jimi objevené principy nyní postupně uvedeme ve vhodném pořadí. Za každým principem rovnou také vysvětlíme, proč jej archimédovské pole $\mathbb{Q}$ nesplňuje, stejně jako jsme to udělali výše u Gaussova principu.

Dedekindův princip. *Je-li množina $\mathbb{R}$ všech reálných čísel jakkoliv rozdělena na dvě neprázdné části X a Y tak, že nerovnost $x < y$ platí pro libovolná čísla $x \in X$ a $y \in Y$, pak existuje takové číslo $r \in \mathbb{R}$, že $x \leq r \leq y$ pro každá $x \in X$ a $y \in Y$.*



Obr. 2: Grafické znázornění rozdělení na část X a Y.

Uvážíme-li například rozdělení množiny všech racionálních čísel $\mathbb{Q}$ na části $X = \{x \in \mathbb{Q} \mid (x^2 \leq 2) \vee (x < 0 \wedge x^2 \geq 2)\}$ a $Y = \{y \in \mathbb{Q} \mid y > 0 \wedge y^2 > 2\}$, pak zřejmě jediným číslem $r \in \mathbb{R}$ splňujícím pro všechna $x \in X$, $y \in Y$ nerovnosti $x \leq r \leq y$ je $\sqrt{2}$, což je iracionální číslo, proto v poli $\mathbb{Q}$ Dedekindův princip neplatí.

Neplatnost následujících principů na množině $\mathbb{Q}$ prokážeme pomocí číselných posloupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ danými pro každé $n \in \mathbb{N}$ vzorci

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{a} \qquad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

V obou případech se jedná o posloupnosti racionálních čísel:

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \overbrace{\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1}^{2}, \overbrace{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2}^{\frac{9}{4}}, \overbrace{\left(1 + \frac{1}{3}\right)^3}^{\frac{64}{27}}, \ldots, \frac{(1+n)^n}{n^n}, \ldots$$

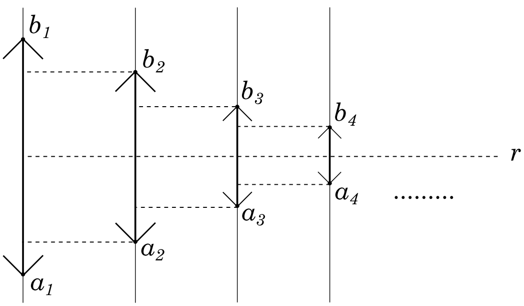
$$\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{1}\right)^2}_{4}, \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^3}_{\frac{27}{8}}, \underbrace{\left(1 + \frac{1}{3}\right)^4}_{\frac{256}{81}}, \ldots, \frac{(1+n)^{n+1}}{n^{n+1}}, \ldots$$

Jak můžeme podle prvních členů odhadnout, je posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ rostoucí a posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ klesající. Lze navíc dokázat, viz (Došlá, 2004), že obě tyto posloupnosti mají stejnou hodnotu limity rovnou iracionálnímu číslu známém pod názvem Eulerovo číslo a značené e, tzn. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = {}$ $= \mathrm{e} = 2{,}7182818\ldots$

Cantorův princip. *Každá posloupnost uzavřených intervalů číselné osy, které jsou do sebe „vloženy“ následujícím způsobem*

$$\langle a_1, b_1\rangle \supset \langle a_2, b_2\rangle \supset \langle a_3, b_3\rangle \supset \cdots ,$$

má neprázdný průnik, tedy existuje takové $r \in \mathbb{R}$, že $a_k \le r \le b_k$ pro každé k.



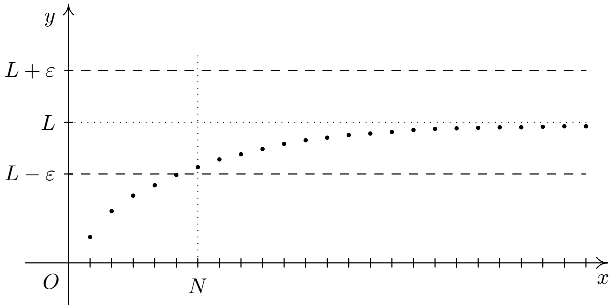
Obr. 3: Ilustrace vnoření intervalů.

Uvažme intervaly $\langle a_n, b_n\rangle$ vzniklé ze členů konkrétních posloupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, které jsme zavedli a posoudili na předešlé straně. Pak zřejmě platí vnoření $\langle a_1, b_1\rangle \supset \langle a_2, b_2\rangle \supset$ $\supset \langle a_3, b_3\rangle \supset \cdots$ a neprázdným průnikem těchto intervalů je jednoprvková množina $\{\mathrm{e}\}$, proto ani Cantorův princip není splněn na množině $\mathbb{Q}$, neboť $\mathrm{e} \notin \mathbb{Q}$.

Weierstrassův princip. *Každá neklesající shora omezená posloupnost reálných čísel má vlastní limitu.*

Připomeňme, že číslo L se nazývá vlastní limitou posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje číslo $N \in \mathbb{N}$ s vlastností, že nerovnost $|x_n - L| < \varepsilon$ platí pro všechna $n \ge N$.

Ilustraci k Weierstrassovu principu vidíte na obrázku 4.



Obr. 4: Limita L neklesající shora omezené posloupnosti.

Uvažme nyní znovu posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ výše definovanou vzorcem $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Taková posloupnost je rostoucí (tudíž i neklesající) a každý její člen je racionální číslo. Nicméně jak jsme uvedli výše, je limita posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ rovna číslu e, které je iracionální, a proto Weierstrassův princip na množině $\mathbb{Q}$ neplatí.

Cauchyův princip. *Limitu má každá C-posloupnost reálných čísel, tj. každá posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ s touto vlastností: Pro každé reálné číslo $\varepsilon > 0$ existuje číslo $N \in \mathbb{N}$ takové, že nerovnost $|x_m - x_n| < \varepsilon$ platí pro libovolná přirozená čísla $m, n > N$.*

Je zřejmé, že každá posloupnost reálných čísel, která má vlastní limitu, je C–posloupností[7]. Proto fakt, že na množině $\mathbb{Q}$ neplatí ani Cauchyův princip, lze doložit stejným příkladem posloupnosti čísel $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, která má iracionální limitu, je však C–posloupností (jako každá jiná posloupnost s vlastní limitou).

V poslední části textu se zaměříme na to, zda-li lze Gaussův princip (A14) v uvedeném seznamu axiomů (A1)–(A14) pro obor reálných čísel bez dalších podmínek zaměnit libovolným jiným

[7] C–posloupnostem se často říká *cauchyovské* (odtud se vzalo i písmeno C), nebo též posloupnosti, které „konvergují v sobě“.

principem, které jsme zde uvedli, a jakou roli přitom hraje Archimédův princip. Zopakujme, že důkazy tvrzení, které níže uvedeme, lze nalézt v (Šatný, 2011).

Platí-li v uspořádaném poli, tj. struktuře splňující axiomy (A1)–(A13), Gaussův, Weierstrassův nebo Dedekindův princip, pak je toto pole archimédovské, tzn. platí v něm Archimédův princip.

Pokud v uspořádaném poli platí Cantorův nebo Cauchyův princip, není zde obecně splněn princip Archimédův. Tato skutečnost nás vede k domněnce, že pouze některé z uvedených principů úplnosti jsou ekvivalentní. Tuto skutečnost formulujme v dalším tvrzení:

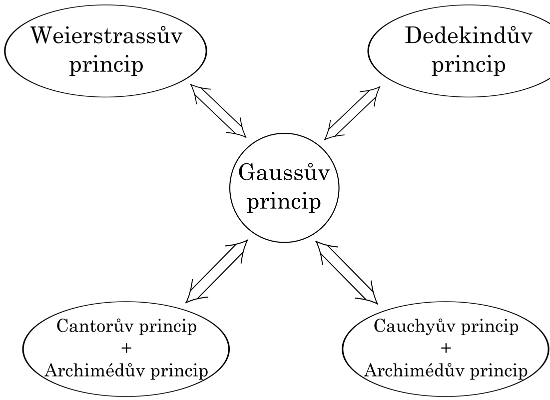
V libovolném uspořádaném poli jsou Gaussův princip, Weierstrassův princip a Dedekindův princip navzájem ekvivalentní, tj. buď všechny tři principy platí zároveň, nebo neplatí žádný z nich.

Pozornějšímu čtenáři jistě neunikla myšlenka, zda-li nestačí ke Cantorovu a Cauchyovu principu přidat Archimédův princip, abychom tak získali plnohodnotný axiom úplnosti. Že je tento nápad správný, potvrdíme následujícím tvrzením:

Platí-li v uspořádaném poli Gaussův princip, platí tam i Cantorův i Cauchyův princip. Naopak platí-li v uspořádaném poli Cantorův nebo Cauchyův princip a je-li navíc toto pole archimédovské, platí v něm i Gaussův princip.

Abychom čtenáři usnadnili orientaci, uvádíme schéma vztahů (platných v libovolném uspořádaném poli) mezi uvedenými principy tak, jak jsme je výše uvedli.

Ukázali jsme, jak se axiomaticky zavádí množina reálných čísel a jakých podob může nabývat axiom úplnosti včetně vztahů mezi nimi. Kromě tohoto přístupu lze však v matematické literatuře najít i velmi „exotické“ konstrukce reálných čísel založených kupříkladu na hraní jistých her dvou osob, jak je popsáno v (Conway, 1976). Pro zajímavost dodejme, že i obor všech reálných čísel lze dále rozšířit o nové prvky (nekonečně malá a nekonečně velká čísla), a dostat tak nové uspořádané pole tzv. *hyperreálných* čísel, ve kterém už ovšem neplatí Archimédův princip (Šimša, 2010).



Obr. 5: Různé podoby axiomu úplnosti.

Jak si čtenář jistě uvědomil, problematika konstrukce a rozšiřování číselných oborů je velmi bohatá a poskytuje případným zájemcům spoustu námětů k objevování nových souvislostí.

Literatura

[1] Conway J. H. (1976). *On numbers and games.* New York, San Francisco: Academic Press.

[2] Došlá Z., Kuben J. (2004). *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné.*

[3] Šatný P. (2011). *Základní věty matematické analýzy a jejich aplikace* [Diplomová práce]. Brno: MU.

[4] Šimša J. (2010). *Vývoj představ o reálných číslech.* Dostupné z `http://www.math.muni.cz/~simsa/reals.pdf`.

[5] Veselý J. (1997). *Matematická analýza pro učitele.* Praha: Matfyzpress.

Abstract

The paper focuses on the important feature of real numbers, which makes them being complete. Completeness of real numbers is interpreted in different forms and it is showed on several examples that rational numbers do not possess it. The last part of this article is devoted to the relationships among these different forms of completeness of real numbers.

Petr Šatný
Ústav matematiky a statistiky
Přírodovědecká fakulta
Masarykova univerzita
Kotlářská 2
611 37 Brno
e-mail: satnyp@mail.muni.cz