Učitel matematiky

Jiří Blažek; Pavel Pech

Vyšetřování množin bodů daných vlastností s podporou počítače

Učitel matematiky, Vol. 25 (2017), No. 5, 261–271

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149115

VYŠETŘOVÁNÍ MNOŽIN BODŮ DANÝCH VLASTNOSTÍ S PODPOROU POČÍTAČE

Jiří Blažek, Pavel Pech

Hledání množin bodů daných vlastností patří k důležitým tématům školních osnov na celém světě. Už v počátečních letech školní docházky se děti učí rozpoznat kružnici, přímku nebo rovnoběžné přímky. V dalších letech se postupuje ke stále náročnějším specifikacím různých množin až ke kuželosečkám. Bez ohledu na konkrétní téma nepatří podle našich zkušeností hledání množin bodů mezi oblíbené aktivity. Důvodem je nejspíše náročnost této látky. Na druhé straně dynamická geometrie, která se ve výuce široce rozšířila v nedávných letech, problematiku hledání množin bodů v rovině značně zjednodušuje. Příkazem Locus v GeoGebře mohou studenti zobrazit různě specifikované množiny v rovině. Dalším rysem, který se poprvé objevil v programu Cabri II (Laborde 1998) je schopnost určit rovnici hledané množiny. Ačkoli mechanismus této funkce nebyl nikdy oficiálně publikován, metoda je založena na náhodném zvolení 100 bodů, náležejících hledané množině, a následném proložení polynomiální křivky (do šestého stupně), procházející těmito body (Schumann 2003). Navzdory některým nepřesnostem dává Cabri většinou správný výsledek. Přesto bylo od počátku zřejmé, že je potřeba jiné, exaktnější metody.

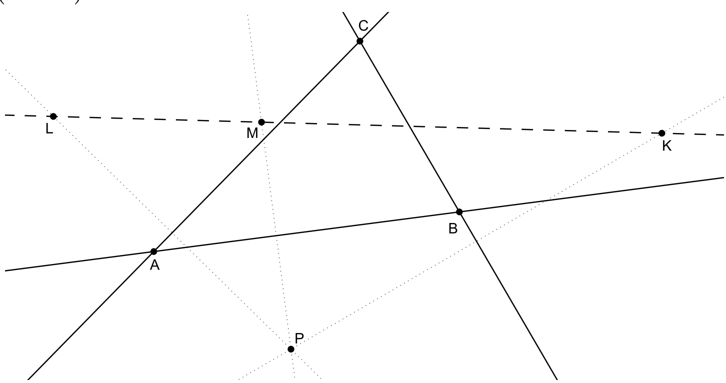
V první části popíšeme postup při zjišťování množiny bodů pomocí příkazu LocusEquation (Botana 2015). Tento příkaz byl do GeoGebry implementován teprve nedávno a představuje nový přístup ve vyšetřování množin bodů. Je založen na metodě automatického objevování, která je částí teorie automatického dokazování vět (Recio 1999). Použití příkazu budeme demonstrovat na konkrétním problému, jehož řešení bylo poprvé publikováno roku 1797. Ačkoli syntetické řešení tohoto příkladu nejde nad rámec gymnázia, pro studenty se zájmem o matematiku je jistě snazší zdůvodnit nalezené řešení než řešit problém bez jakékoliv představy, jak neznámá množina vypadá. V tomto případě můžeme chápat řešení pomocí programu GeoGebra nejenom jako černou skříňku, ale jako významnou nápovědu ke zdůvodnění problému.

Druhý příklad je výsledkem experimentování v DGS. Obecné řešení problému, který jsme sami definovali, je demonstrováno jak pomocí GeoGebry, tak pomocí programu CoCoA (program typu CAS). Zajímavostí je, že příkaz LocusEquation ukazuje v případě obecného zadání správný výsledek, avšak v některých speciálních případech selhává.

U obou příkladů je popsán způsob, jakým počítač postupuje.

Problém 1. V rovině je dán trojúhelník ABC a bod P. Sestrojme body K, L a M, které jsou souměrné s bodem P podle přímek AB, BC a CA. Určete množinu bodů P tak, aby body K, L, M ležely v přímce.

Příklad bodu P, splňujícího zadání, je na následujícím obrázku (obr. 1).



Obr. 1: Body K, L, M souměrné s bodem P podle stran trojúhelníku ABC leží na jedné přímce

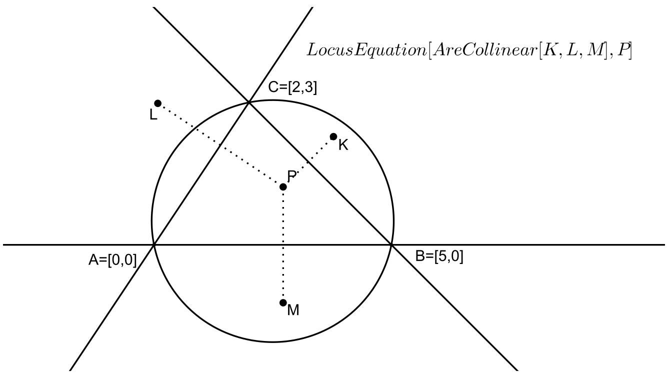
Je zřejmé, že použití příkazu `Locus` v tomto případě nestačí. Příkaz `LocusEquation`, který byl nedávno v GeoGebře implementován, však situaci řeší. Postup určení hledané množiny pomocí příkazu `LocusEquation` je následující:

- Narýsujeme libovolný trojúhelník ABC.
- Zvolíme libovolný bod P.
- Sestrojíme obrazy K, L, M bodu P v osových souměrnostech s osami AB, BC a CA.
- Zadáme příkaz `LocusEquation(AreCollinear(K,L,M),P)`.

Vedle hledané množiny se nám zobrazí i její rovnice v dané soustavě souřadnic

$$x^2 + y^2 - 5x - y = 0.$$

Je zřejmé, že se jedná o kružnici opsanou trojúhelníku ABC (obr. 2).



Obr. 2: Program GeoGebra zobrazí kružnici opsanou trojúhelníku ABC

Ukazuje se, že tento problém je ekvivalentní s takzvanou Simson-Wallaceovou větou, objevenou roku 1797 (Johnson 1960), (Švrček 1998). V té se nemluví o osově souměrných obrazech, ale o patách kolmic z bodu P na strany trojúhelníka, které jsou pro každý bod P kružnice opsané trojúhelníku ABC kolineární. Dodejme, že přímka splňující "naši"formulaci, na rozdíl od spojnice pat kolmic, prochází vždy průsečíkem výšek trojúhelníka ABC.

Jakým způsobem počítač postupuje?

Ukažme si, jakým způsobem dospějeme ke hledané množině bodů – kružnici – s použitím teorie automatického dokazování a objevování vět [1, 4].

Zvolme soustavu souřadnic tak, že $A = [0, 0]$, $B = [a, 0]$, $C = [u, v]$, $P = [p, q]$, $K = [k_1, k_2]$, $L = [l_1, l_2]$, $M = [m_1, m_2]$. Dále označme písmeny K', L' and M' středy úseček PK, PL a PM. Předpokládejme, že bod P splňuje podmínky zadání, tj. jeho obrazy K, L, M v osových souměrnostech s osami AB, BC a CA leží na jedné přímce. Potom platí:

$PK \perp BC \Leftrightarrow h_1 := (p - k_1)(u - a) + (q - k_2)v = 0,$

$K' \in BC \Leftrightarrow h_2 := 2av + u(q + k_2) - v(p + k_1) - a(q + k_2) = 0,$

$PL \perp CA \Leftrightarrow h_3 := (p - l_1)u + (q - l_2)v = 0,$

$L' \in CA \Leftrightarrow h_4 := (p + l_1)v - (q + l_2)u = 0,$

$PM \perp AB \Leftrightarrow h_5 := p - m_1 = 0,$

$M' \in AB \Leftrightarrow h_6 := q + m_2 = 0,$

K, L, M leží na jedné přímce $\Leftrightarrow h_7 := k_1 l_2 + l_1 m_2 + k_2 m_1 - l_2 m_1 - k_1 m_2 - k_2 l_1 = 0.$

Eliminací proměnných $k_1, k_2, l_1, l_2, m_1, m_2$ v systému rovnic $h_1 = 0, h_2 = 0, \ldots, h_7 = 0$ v programu CoCoA[1] dostaneme

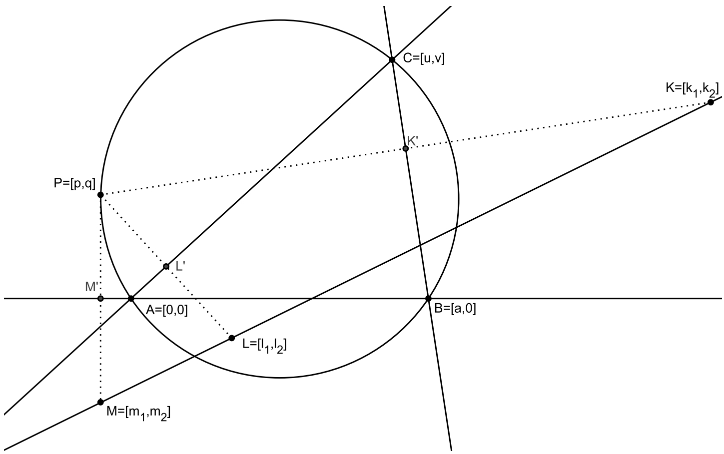
```
Use R::=Q[a,u,v,k[1..2],l[1..2],m[1..2],p,q];
I:=Ideal((p-k[1])(u-a)+(q-k[2])v,
2av+u(q+k[2])-v(p+k[1])-a(q+k[2]),
(p-l[1])u+(q-l[2])v,(p+l[1])v-(q+l[2])u,p-m[1],q+m[2],
k[1]l[2]+l[1]m[2]+k[2]m[1]-l[2]m[1]-k[1]m[2]-k[2]l[1]);
Elim(k[1]..m[2],I);
```

rovnici

$$av^2(vp^2 + vq^2 - avp + (au - u^2 - v^2)q) = 0. \qquad (1)$$

[1] Software CoCoA je volně ke stažení na adrese `http://cocoa.dima.unige.it`

Jestliže $a \neq 0$ a $v \neq 0$, tj. $A \neq B$ a A, B, C nejsou kolineární, potom rovnice (1) vyjadřuje kružnici opsanou trojúhelníku ABC, jak se snadno můžeme přesvědčit dosazením souřadnic vrcholů A, B, C do rovnice (1) (obr. 3).



Obr. 3: Množina bodů P je kružnice opsaná trojúhelníku ABC

Obdobným způsobem, pomocí tzv. normální formy ideálu se dá ukázat, že pokud $A \neq C$ a $B \neq C$, potom každý bod P kružnice opsané trojúhelníku ABC splňuje zadání a body K, L, M leží na jedné přímce. Tedy hledanou množinou bodů je kružnice opsaná trojúhelníku ABC.

Ukažme si použití příkazu `LocusEquation` ještě na jiném příkladu. Jak jsme zmínili v úvodu, tento problém jsme si zvolili k testování příkazu `LocusEquation`.

Problém 2. V rovině je dán čtyřúhelník $ABCD$ a bod P. Určete množinu bodů P tak, aby paty kolmic K, L, M, N z bodu P na strany čtyřúhelníka $ABCD$ ležely na kružnici.

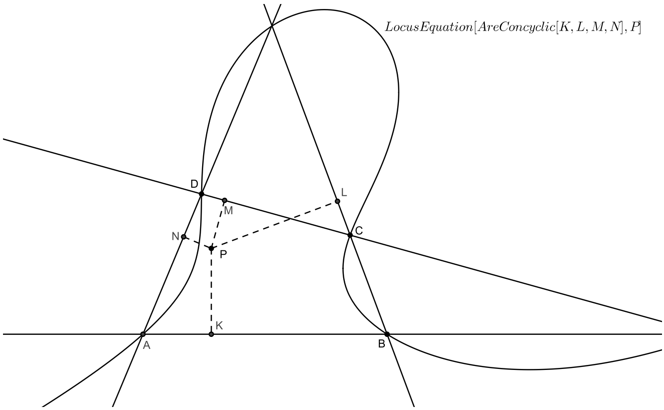
Naše motivace byla následující. Předchozí problém Simson-Wallaceovy věty se týkal požadavku, aby paty kolmic z určitého bodu P na strany trojúhelníka ABC ležely v přímce. Co když ale rozšíříme počet přímek ze tří na čtyři s analogickým požadavkem, tedy že paty kolmic z určitého bodu P na tyto čtyři přímky leží v přímce? Lze ukázat, že řešením tohoto zadání je nejvýše jeden — takzvaný Miquelův — bod. O jeho konstrukci se čtenář může pokusit sám (nápověda: dvakrát se použije Simsonova věta). Pro naše účely byla důležitá skutečnost, že pokud existuje tento Miquelův bod, pak lze sestrojit parabolu, která má v tomto bodě ohnisko a jejíž vrcholová tečna je identická se spojnicí pat kolmic na dané čtyři přímky. Z vlastností paraboly lze pak jednoduše odvodit, že tyto čtyři přímky jsou tečnami této paraboly. Dostáváme se k naší otázce: Jak je to s ostatními kuželosečkami? Jaká je množina ohnisek elipsy, paraboly nebo hyperboly, ke kterým jsou dané čtyři přímky tečnami?

V řešení využijeme obecnou vlastnost, kterou se vyznačuje každá elipsa a hyperbola. Pokud sestrojíme z ohniska kolmice na tečny této kuželosečky, pak paty těchto kolmic budou ležet na kružnici, jejíž střed je totožný se středem kuželosečky.

Nechť si čtenář sám zkusí následující postup řešení v GeoGebře, kde hledáme množinu bodů P takových, že paty kolmic K, L, M, N z bodu P na strany čtyřúhelníka $ABCD$ leží na jedné kružnici:

- Narýsujeme obecný čtyřúhelník s vrcholy A, B, C, D.
- Zvolíme libovolný bod P, který bude reprezentovat jedno ohnisko kuželosečky.
- Z bodu P sestrojíme paty kolmic K, L, M, N na strany AB, BC, CD, DA.
- Zadáme příkaz `LocusEquation[AreConcyclic(K,L,M,N),P]`.

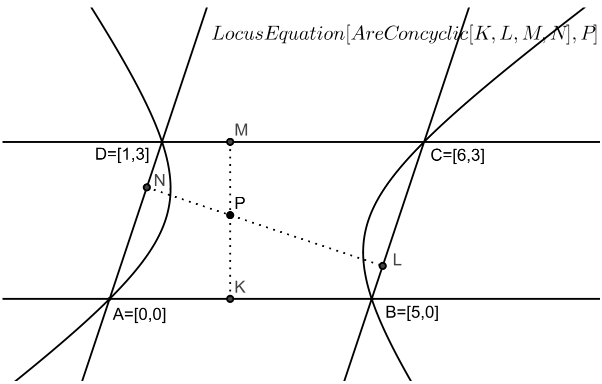
Zobrazí se křivka třetího stupně (obr. 4). Čtenář pak může sestrojit libovolnou kuželosečku splňující zadání (zná jedno ohnisko, střed kuželosečky a její tečnu).



Obr. 4: Příkaz `LocusEquation[AreConcyclic(K,L,M,N),P]` zobrazí křivku 3. stupně

Podrobněji se nyní podívejme na speciální případ, kdy čtyřúhelníkem je rovnoběžník.

Speciální případ. Je dán rovnoběžník $ABCD$. Určete množinu bodů P takových, že paty kolmic K, L, M, N z bodu P na strany rovnoběžníka $ABCD$ leží na kružnici.



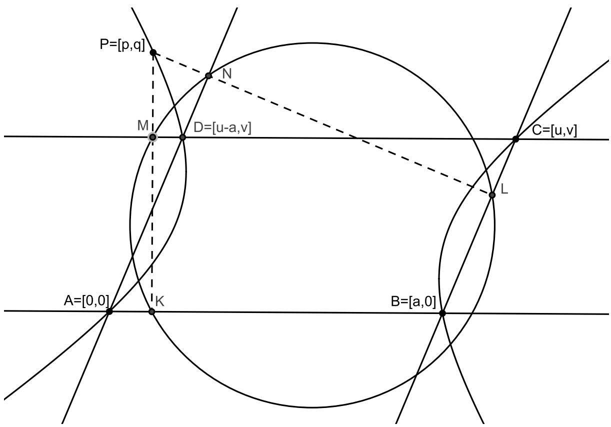
Obr. 5: Příkazem `LocusEquation(AreConcyclic(K,L,M,N),P)` se v případě rovnoběžníka $ABCD$ zobrazí rovnoosá hyperbola

Po provedení příkazu se zobrazí rovnoosá hyperbola (obr. 5), včetně její rovnice v dané soustavě souřadnic

$$3x^2 - 2xy - 3y^2 - 15x + 15y = 0.$$

Jak pracuje počítač při řešení problému 2?

Zvolme soustavu souřadnic tak, že vrcholy rovnoběžníku $ABCD$ mají souřadnice $A = [0, 0]$, $B = [a, 0]$, $C = [u, v]$, $D = [u - a, v]$. Dále označme $K = [k_1, k_2]$, $L = [l_1, l_2]$, $M = [m_1, m_2]$ a $M = [n_1, n_2]$ paty kolmic z bodu $P = [p, q]$ k přímkám AB, BC, CD a DA. Předpokládejme, že body K, L, M, N leží na kružnici (obr. 6).



Obr. 6: Paty kolmic K, L, M, N leží na kružnici

Potom platí:

$K \in AB \Leftrightarrow h_1 := k_2 = 0,$

$L \in BC \Leftrightarrow h_2 := vl_1 + al_2 - av - ul_2 = 0,$

$M \in CD \Leftrightarrow h_3 := vm_1 + uv + (u - a)m_2 - v(u - a) - vm_1 - um_2 = 0,$

$N \in DA \Leftrightarrow h_4 := vn_1 - (u - a)n_2 = 0,$

$PK \perp AB \Leftrightarrow h_5 := p - k_1 = 0,$

$PL \perp BC \Leftrightarrow h_6 := (p - l_1)(u - a) + (q - l_2)v = 0,$

$PM \perp CD \Leftrightarrow h_7 := p - m_1 = 0,$

$PN \perp DA \Leftrightarrow h_8 := (p - n_1)(u - a)w + (q - n_2)v = 0,$

K, L, M, N leží na kružnici se středem $S = [s_1, s_2] \Leftrightarrow |KS| = |LS| \wedge |LS| = |MS| \wedge |MS| = |NS| \Leftrightarrow$

$h_9 := (k_1 - s_1)^2 + (k_2 - s_2)^2 - (l_1 - s_1)^2 - (l_2 - s_2)^2 = 0,$

$h_{10} := (l_1 - s_1)^2 + (l_2 - s_2)^2 - (m_1 - s_1)^2 - (m_2 - s_2)^2 = 0,$

$h_{11} := (m_1 - s_1)^2 + (m_2 - s_2)^2 - (n_1 - s_1)^2 - (n_2 - s_2)^2 = 0.$

Eliminace proměnných $k_1, k_2, l_1, l_2, m_1, m_2, n_1, n_2$ v systému $h_1 = 0, h_2 = 0, \ldots, h_{11} = 0$ dává

```
Use R::=Q[a,u,v,k[1..2],l[1..2],m[1..2],n[1..2],
          s[1..2],p,q];
I:=Ideal(h1,h2,h3,h4,h5,h6,h7,h8,h9,h10,h11);
Elim(k[1]..s[2],I);
```

rovnici

$$vp^2 + 2(a - u)pq - vq^2 - avp + (u^2 + v^2 - au)q = 0. \qquad (2)$$

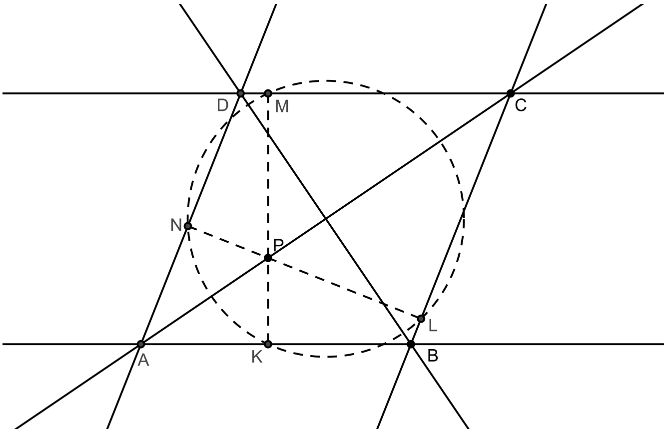
Jestliže $u^2 - 2au + v^2 \neq 0$ potom (2) je rovnoosá hyperbola (obr. 5). Jestliže

$$u^2 - 2au + v^2 = 0, \qquad (3)$$

potom se (2) rozkládá na dvě vzájemně kolmé přímky. Podmínka (3), společně s podmínkami $z = v$ a $w = u - a$, znamenají, že $|AB| = |BC| = |CD| = |DA|$, a čtyřúhelník $ABCD$ je kosočtverec (obr. 7). Tento případ je snadné dokázat též přímo. Pro bod P, který leží na úhlopříčce platí

$$|PK| \cdot |PM| = |PL| \cdot |PN|.$$

Potom z věty o mocnosti bodu ke kružnici plyne, že body K, L, M, N leží na kružnici.



Obr. 7: Pokud je $ABCD$ kosočtverec, hledanou množinou bodů jsou přímky, na kterých leží jeho úhlopříčky

Obráceně lze dokázat, že pokud $A \neq B$, potom pro každý bod P rovnoosé hyperboly (2) platí, že body K, L, M, N leží na kružnici. Hledanou množinou bodů je v případě rovnoběžníka rovnoosá hyperbola příp. dvojice vzájemně kolmých přímek.

Poznámka. Speciální případ, kdy se rovnoosá hyperbola rozkládá na dvě různoběžky, příkaz `LocusEquation` zatím nevyřeší.

Literatura

[1] Botana, F., Hohenwarter, M., Janičič, P., Kovács, Z., Petrovič, I., Recio, T. & Weitzhofer, S. (2015). Automated theorem proving in GeoGebra: current achievements. *Journal of Automated Reasoning*, 55, 39–59.

[2] Johnson, R. (1960). *Advanced Euclidean Geometry.* Dover, New York.

[3] Laborde, J. M. & Bellemain, F. (1998). *Cabri geometry II.* Texas Instruments, Dallas.

[4] Recio, T. & Vélez, M. P. (1999). Automatic discovery of theorems in elementary geometry. *Journal of Automated Reasoning*, 23, 63-82.

[5] Švrček, J. & Vanžura, J. (1998). *Geometrie trojúhelníka.* SNTL, Praha.

[6] Schumann, H. (2003). A dynamic approach to simple algebraic curves. *Zentralbl. Didakt. Math.*, 35, 301–316.

Abstract

The article is focused on investigation of geometric loci by the program GeoGebra. It consists of two problems which illustrate ability of current software to determine an unknown locus and its equation in terms of given properties using the command LocusEquation. In both cases it is shown, how software arrives at the searched locus.

In the second problem we demonstrate possibilities of doing experiments and attain answers, which are hardly accessible without computers not only to mathematicians, but also to others.

Jiří Blažek
Pedagogická fakulta JU v Českých Budějovicích
Jeronýmova 10
370 01 České Budějovice
e-mail: blazej02@pf.jcu.cz

Pavel Pech
Pedagogická fakulta JU v Českých Budějovicích
Jeronýmova 10
370 01 České Budějovice
e-mail: pech@pf.jcu.cz