Aleš Kobza

O jistém typu iracionálních rovnic

Učitel matematiky, Vol. 25 (2017), No. 3, 164–171

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149103

O JISTÉM TYPU IRACIONÁLNÍCH ROVNIC

Aleš Kobza

Při své přednášce na XVIII. semináři o filosofických otázkách matematiky a fyziky, který se konal 22.–25. srpna 2016 ve Velkém Meziříčí, hovořil RNDr. Dag Hrubý mimo jiné o speciálním případu iracionálních rovnic, jejichž jedna strana je rovna dvěma a druhá strana je pak tvořena součtem dvou čtvrtých odmocnin z vhodných lineárních výrazů, které mohou být současně rovny jedné. Je tedy evidentní, že rovnice uvažovaného typu má vždy „triviální“ řešení „tvaru“ $1 + 1 = 2$, které se nám patrně „hned podaří uhodnout“. Nabízí se však otázky, zda bude takové řešení v oboru reálných čísel jediné, případně jaká další řešení může taková rovnice mít, zda a jak je lze v takové situaci nalézt, či jak můžeme zdůvodnit, že jiné řešení příslušné rovnice již neexistuje. K zamyšlení nad těmito otázkami pak přednášející přítomné účastníky semináře vyzval. Jedná se sice o problematiku, která přesahuje rámec běžného středoškolského učiva, přesto lze vhodně volené konkrétní příklady rovnic popsaného typu předložit též zájemcům o matematiku z řad středoškolských studentů a rozebrat je s nimi užitím jim známých prostředků. Některé možné úvahy a postupy vedoucí k nalezení odpovědí na položené otázky čtenáři nabídne tento článek. Budeme v něm studovat tři konkrétní příklady takových rovnic.

Příklad 1. Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici

$$\sqrt[4]{x-3} + \sqrt[4]{2x-7} = 2. \tag{1}$$

Snadno nahlédneme, že $\sqrt[4]{x-3} = 1 = \sqrt[4]{2x-7}$ právě tehdy, když $x = 4$. Rovnice (1) má tedy kořen $x = 4$. Čtenář si může ověřit, že jiný kořen této rovnice se nám však již „uhodnout“ nedaří. Kdybychom chtěli rovnici (1) řešit pomocí algebraických úprav, hodilo by se nám odstranit odmocniny, které v ní vystupují. V daném případě by to znamenalo tuto rovnici umocnit na čtvrtou. Popsaným umocněním dvojčlenu bychom však dostali výraz tvořený pěti sčítanci, se kterým by se nemuselo snadno pracovat, a proto bychom se mohli pokusit tomuto výpočtu vyhnout a snažit se postupovat jinak. Při řešení rovnic či nerovnic, jejichž algebraická úprava je komplikovaná či dokonce nevede ke zjednodušování řešené rovnice, může být výhodné chápat výrazy vystupující v takové rovnici jako funkce a zkoumat jejich chování. Tento postup nám umožní elegantně zdůvodnit, že rovnice (1) má v $\mathbb{R}$ jediné řešení, které jsme již uhodli. Rovnici (1) přepišme do ekvivalentního tvaru

$$\sqrt[4]{2x-7} = 2 - \sqrt[4]{x-3}$$

a označme

$$f_1(x) = \sqrt[4]{2x-7} \qquad \text{a} \qquad g_1(x) = 2 - \sqrt[4]{x-3}.$$

Nyní nám stačí si pouze všimnout, že funkce f_1 je rostoucí (v celém svém definičním oboru), zatímco funkce g_1 je (opět v celém svém definičním oboru) klesající. Jejich grafy tedy mohou mít nejvýše jeden společný bod, který odpovídá řešení rovnice (1). Navíc již víme, že tento bod skutečně existuje a má x-ovou souřadnici 4. Další vlastnosti funkcí f_1 a g_1 tudíž již vyšetřovat nepotřebujeme a můžeme učinit závěr, že rovnice (1) má v $\mathbb{R}$ právě jedno řešení.

Příklad 2. Nyní uvažujme v $\mathbb{R}$ rovnici

$$\sqrt[4]{1+x} + \sqrt[4]{1-15x} = 2. \tag{2}$$

Uvědomme si, že pokud bychom chtěli postupovat podobně jako v předchozím případě, dostali bychom například při označení

$$f_2(x) = \sqrt[4]{1-15x} \qquad \text{a} \qquad g_2(x) = 2 - \sqrt[4]{1+x}$$

dvě klesající funkce a nemohli bychom proto argumentovat tak snadno jako při řešení rovnice (1). Čtenář si jistě všiml, že tuto „obtíž“ se nedaří „obejít“ jiným zavedením funkcí f_2 a g_2. Kdybychom chtěli pokračovat v řešení rovnice (2) pomocí analýzy funkcí f_2 a g_2, potřebovali bychom znát jejich další vlastnosti, abychom byli schopni „věrně“ znázornit jejich grafy. Tento postup popíšeme při řešení následujícího příkladu. Rovnici (2) začneme nyní řešit algebraickým postupem nastíněným v předchozím příkladě. Než provedeme umocnění rovnice (2) na čtvrtou, upravíme ji ještě do tvaru

$$\sqrt[4]{1-15x} = 2 - \sqrt[4]{1+x}, \tag{3}$$

protože výraz, který dostaneme umocněním pravé strany rovnice (3), bude obsahovat méně odmocnin, než by jich obsahoval výraz, který bychom dostali umocněním levé strany rovnice (2). Provedením zmíněné důsledkové úpravy dostaneme

$$1 - 15x = 16 - 32\sqrt[4]{1+x} + 24\sqrt[4]{(1+x)^2} - 8\sqrt[4]{(1+x)^3} + 1 + x.$$

Zavedeme-li substituci $z = \sqrt[4]{1+x}$, z níž plyne, že $x = z^4 - - 1$, podaří se nám formálně odstranit odmocniny, a obdržíme tak rovnici

$$1 - 15\left(z^4 - 1\right) = 16 - 32z + 24z^2 - 8z^3 + z^4,$$

kterou po jednoduché úpravě převedeme do tvaru

$$8z\left(2z^3 - z^2 + 3z - 4\right) = 0. \tag{4}$$

Její kořen $z_1 = 0$ pak vede k hodnotě $x_1 = -1$. Případné další kořeny rovnice (4) by pak musely být kořeny rovnice

$$2z^3 - z^2 + 3z - 4 = 0,$$

jejíž levou stranu můžeme rozložit na součin například s využitím následujícího „triku“:

$$\begin{aligned} 2z^3 - z^2 + 3z - 4 &= \left(2z^3 - 2z^2\right) + \left(z^2 + 3z - 4\right) = \\ &= 2z^2(z-1) + (z-1)(z+4) = (z-1)\left(2z^2 + z + 4\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Odtud je vidět, že $z_2 = 1$ je dalším kořenem rovnice (4). Návratem k původní proměnné pak dostaneme $x_2 = 0$. Konečně vypočteme zbylé dva kořeny této rovnice

$$z_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2 \cdot 4}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{31}\mathrm{i}}{4},$$

které mají tu vlastnost, že i jejich čtvrté mocniny nejsou reálné, a proto nevedou k hledaným řešením rovnice (2). Nesmíme opomenout skutečnost, že jsme použili důsledkovou úpravu. Provedení zkoušky je snadné a zjistíme tak, že hodnoty $x_1 = -1$ i $x_2 = 0$ vyhovují rovnici (2). Tato rovnice má tedy v $\mathbb{R}$ právě dva kořeny.

Poznamenejme ještě, že popsané řešení nevyužívalo možnosti „uhodnutí triviálního“ kořene rovnice (2) „tvaru“ $1 + 1 = 2$, tj. hodnoty $x_2 = 0$. Pokud bychom tento kořen „uviděli“ hned na začátku řešení rovnice (2), věděli bychom dále, že rovnice (4) má též kořen $z_2 = 1$. S využitím tohoto poznatku bychom pak mohli najít rozklad (5), aniž bychom provedli výše uvedený „trik“.

Příklad 3. Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici

$$\sqrt[4]{4-x} + \sqrt[4]{\frac{x+1}{4}} = 2. \tag{6}$$

Při řešení předchozího příkladu jsme slíbili, že nyní se vrátíme ke grafické metodě. Rovnici (6) přepišme do ekvivalentního tvaru

$$\sqrt[4]{\frac{x+1}{4}} = 2 - \sqrt[4]{4-x}$$

a označme

$$f_3(x) = \sqrt[4]{\frac{x+1}{4}} \qquad \text{a} \qquad g_3(x) = 2 - \sqrt[4]{4-x}.$$

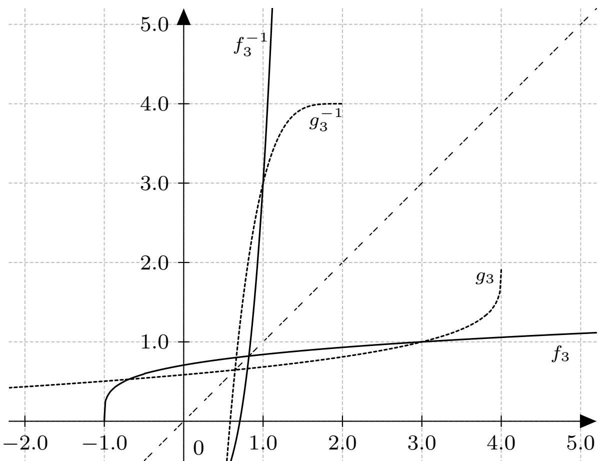
Vidíme, že nebude stačit opřít se pouze o monotonii funkcí f_3 a g_3, neboť jsou obě v celých svých definičních oborech rostoucí. Budeme potřebovat, abychom se o vlastnostech těchto funkcí dozvěděli více. Protože přímé sestrojení grafů takových funkcí se na střední škole běžně nestuduje, popíšeme způsob, jak je lze zkonstruovat s využitím vlastností funkcí mocninných, inverzních a posunutí příslušných grafů do jiného počátku, což už je středoškolské učivo. Najdeme-li předpisy příslušných inverzních funkcí k funkcím uvažovaným (tento rutinní výpočet ponecháme na čtenáři), dostaneme

$$f_3^{-1}(x) = 4x^4 - 1 \qquad \text{a} \qquad g_3^{-1}(x) = 4 - (x-2)^4.$$

Nesmíme zapomenout, že grafy těchto funkcí nesmíme uvažovat „celé“, protože definiční obory obou funkcí jsou na základě známých vztahů mezi funkcí a funkcí k ní inverzní „omezeny“ následujícími podmínkami do intervalů

$$D\left(f_3^{-1}\right) = H\left(f_3\right) = \langle 0; \infty) \quad \text{a} \quad D\left(g_3^{-1}\right) = H\left(g_3\right) = (-\infty; 2\rangle.$$

Nyní již stačí sestrojit příslušné „části“ grafů uvažovaných posunutých mocninných funkcí, tj. grafy funkcí f_3^{-1} a g_3^{-1}, abychom pomocí osové souměrnosti, jejíž osou je graf funkce s předpisem $f(x) = x$, získali grafy hledaných funkcí f_3 a g_3 (viz obrázek).



Předně si povšimněme, že graf funkce f_3 je zakřiven tak, že „se šklebí“ (takové funkci říkáme *konkávní*), zatímco graf funkce g_3 je zakřiven tak, že „se usmívá“ (takovou funkci nazýváme *konvexní*). Je evidentní, že grafy dvou spojitých funkcí, z nichž jedna je konkávní a druhá konvexní, mohou mít nejvýše dva společné body, což znamená, že rovnice (6) má v $\mathbb{R}$ nejvýše dva kořeny.

Abychom počet kořenů řešené rovnice touto grafickou metodou určili spolehlivě, potřebujeme být přesní a v grafech každé z těchto funkcí uvážit dostatečné množství „důležitých“ bodů, jimiž příslušný graf prochází. Takové body má smysl uvažovat pouze v průniku definičních oborů obou funkcí, tj. v intervalu $\langle -1; 4\rangle$, který je současně definičním oborem řešené rovnice (6). Snadno určíme, že graf funkce f_3 prochází body $[-1; 0]$, $\left[0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, $[3; 1]$ a $\left[4; \sqrt[4]{\frac{5}{4}}\right]$ a na grafu funkce g_3 leží body $\left[-1; 2-\sqrt[4]{5}\right]$, $\left[0; 2-\sqrt{2}\right]$, $[3; 1]$ a $[4; 2]$. Společný bod $[3; 1]$ obou grafů odpovídá kořenu $x_1 = 3$, který lze „uhodnout“ přímo z tvaru zadané rovnice (6). Dále však můžeme zdůvodnit, že

$$f_3(-1) = 0 < 2 - \sqrt[4]{5} = g_3(-1) \text{ a } f_3(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} > 2 - \sqrt{2} = g_3(0),$$

proto existuje ještě druhý průsečík obou grafů tak, že platí $f_3(x_2) = g_3(x_2)$, přičemž $x_2 \in (-1; 0)$. To tedy znamená, že rovnice (6) má v $\mathbb{R}$ právě dva kořeny, a to kořen $x_1 = 3$ a kořen x_2, o němž zatím víme, že leží v intervalu $(-1; 0)$. Ještě si můžeme všimnout, že ani druhý z uvedených odhadů není přitom potřeba zdůvodňovat pomocí kalkulačky. Platí totiž:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}} > 2 - \sqrt{2} \quad &\Leftrightarrow \quad 1 > 2\sqrt{2} - 2 \quad \Leftrightarrow \quad 3 > 2\sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow \quad 9 > 4 \cdot 2 = 8\end{aligned}$$

Zpřesnění hodnoty x_2 však již popsanou grafickou metodou nedocílíme. Pokud bychom provedli algebraický výpočet způsobem popsaným při řešení předchozího příkladu, odvodili bychom při použití substituce $y = \sqrt[4]{4-x}$ rovnici

$$5y^4 - 32y^3 + 96y^2 - 128y + 59 = 0,$$

jejíž jeden kořen $y_1 = 1$ již z předchozího známe. Rovněž víme, že tento kořen je jednoduchý. Odštěpením kořenového činitele $y - 1$ můžeme přejít ke kubické rovnici

$$5y^3 - 27y^2 + 69y - 59 = 0,$$

kterou musí splňovat ostatní hledané kořeny. Žádný z nich však již nejsme schopni nalézt. Lze (byť ne středoškolským postupem) zdůvodnit, že tato rovnice má jeden iracionální a dva komplexně sdružené kořeny. Studentům ještě můžeme prozradit, že přesné řešení rovnic vyšších stupňů je „velkým“ problémem matematiky nejen na středoškolské úrovni. Pokračování v řešení této rovnice či detailnější popis jejich vlastností však již přesahuje záběr tohoto textu. Smyslem takto zadané rovnice bylo ukázat, že je možné zadat rovnici, u které sice zdůvodníme též existenci „netriviálního“ řešení, ale jeho přesnou hodnotu již nejsme schopni najít. S využitím kalkulaček, respektive vhodného software, bychom se případně ještě mohli pokusit o přibližné řešení zadané rovnice a nastínit tak žákům např. metodu půlení intervalu. Takto bychom vypočetli, že $x_2 \doteq -0{,}688$.

Závěrečné poznámky. Čtenář s hlubším zájmem o tuto problematiku si může sám podrobněji rozmyslet platnost následujících skutečností.

1. Metodu vyšetřování vlastností funkcí by bylo možné zobecnit pro libovolnou rovnici námi uvažovaného typu a ukázat tak, že každá taková rovnice může mít v $\mathbb{R}$ nejvýše dva kořeny, přesněji řečeno má vždy jeden „triviální“ kořen a případně nějaký jiný další kořen (racionální či iracionální, jehož hodnotu nemusíme být schopni přesně určit).
2. Grafy funkcí, pomocí nichž určujeme počet řešení příslušné rovnice, mohou mít pouze jeden společný bod též v případě, kdy je jedna z nich konvexní a druhá konkávní. Znamená to, že se příslušné křivky skutečně mohou dotýkat. Taková situace nastane například u rovnice
$$\sqrt[4]{x-1} + \sqrt[4]{3-x} = 2, \tag{7}$$
která má v $\mathbb{R}$ jediné řešení $x = 2$. Rovnice (1) a (7) mají sice obě v $\mathbb{R}$ právě jeden kořen, ale jistý „kvalitativní“ rozdíl mezi nimi je patrný nejen ve vlastnostech grafického řešení (v případě rovnice (1) se grafy funkcí f_1 a g_1, které jsme při našem postupu nepotřebovali konstruovat, protínají) ale též při algebraickém postupu. Pokud bychom každou z těchto rovnic

řešili podobným postupem, který jsme použili při řešení rovnice (2) dostali bychom v případě řešení (1) při substituci $v = \sqrt[4]{x-3}$ rovnici

$$v^4 + 8v^3 - 24v^2 + 32v - 17 = 0,$$

která má v $\mathbb{R}$ kromě vyhovujícího kořene $v = 1$ ještě záporný kořen neslpňující podmínku $v \geqq 0$. V případě rovnice (7) po substituci $u = \sqrt[4]{x-1}$ obdržíme rovnici

$$u^4 - 4u^3 + 12u^2 - 16u + 7 = 0,$$

která má v $\mathbb{R}$ dvojnásobný kořen $u = 1$.

Jak již bylo zmíněno v úvodu, popsané postupy a provedené úvahy neposkytují univerzální metodu řešení obecné rovnice uvažovaného typu, což ostatně přímo zdůrazňuje příklad rovnice (6). Přesto se však domnívám, že výše předložené myšlenky (či alespoň jistá část z nich) by mohly být zajímavé i pro některé studenty středních škol a mohly by jim ukázat jisté krásy i úskalí matematiky a snad i tím podnítit jejich zájem o další studium tohoto oboru, aby se nejen o zde uvažované problematice mohli dozvědět více.

Abstract

We study a special type of irrational equations. Three equations of this type are considered. We present some properties of these equations and we describe methods how to solve them. We show that this problem can be difficult to solve in general case.

Aleš Kobza
Gymnázium Brno, třída Kapitána Jaroše
třída Kapitána Jaroše 14
658 70 Brno
e-mail: akob@jaroska.cz