Učitel matematiky

Stanislav Novák

Další pozoruhodné vlastnosti kruhové inverze

*Učitel matematiky*, Vol. 25 (2017), No. 3, 156–163

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149102

# DALŠÍ POZORUHODNÉ VLASTNOSTI KRUHOVÉ INVERZE

Stanislav Novák

Cílem příspěvku je doplnění dalších zajímavých vlastností kruhové inverze, které nebyly podrobněji uvedeny v článku „Pozoruhodné vlastnosti kruhové inverze" (Kobza, 2013). Vyjdeme z definice zobrazení kruhové inverze, jak byla uvedena ve zmíněném článku, a budeme se snažit držet i stejného značení.

**Definice.** V rovině je dán bod $S$ a dále kladné reálné číslo $\lambda$. Kruhovou inverzí se středem $S$ a koeficientem $\lambda$ rozumíme zobrazení, které každému bodu $X \neq S$ přiřadí bod $X'$, který leží na polopřímce $\overrightarrow{SX}$, přičemž $|SX| \cdot |SX'| = \lambda$.

## Obraz kružnice neprocházející středem kruhové inverze

V článku (Kobza, 2013) bylo ukázáno, že obrazem kružnice, která neprochází středem kruhové inverze, je kružnice, která rovněž neprochází středem kruhové inverze. Zmíněnou vlastnost v následujícím hlouběji rozvedeme a ukážeme souvislost se stejnolehlostí – geometrickým zobrazením, s nímž se žáci setkávají nejen na střední, ale dokonce už na základní škole.

Kruhová inverze je určena kružnicí $l(S; \sqrt{\lambda})$. Mějme kružnici $m(S_m; r)$ neprocházející středem kruhové inverze $S$, jejímž obrazem v této kruhové inverzi je kružnice $m'(S_{m'}; r')$, která rovněž neprochází středem kruhové inverze $S$.

Z definice kruhové inverze víme, že platí následující rovnost (obr. 1):

$$|SX| \cdot |SX'| = \lambda.$$

Dále uvedeme vztah pro výpočet mocnosti bodu[1] $S$ ke kružnici $k$:

$$|SX| \cdot |SY| = \mu.$$

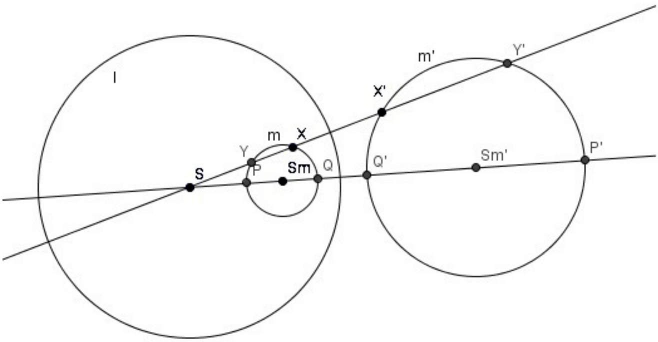
Vyjádřením rovnosti podílů levých a pravých stran výše uvedených rovností dostáváme:

$$\frac{|SX'|}{|SY|} = \frac{\lambda}{\mu},$$

po úpravě:

$$|SX'| = k \cdot |SY|, \text{ kde } k = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Z uvedeného vztahu plyne, že bod $X'$ je obrazem bodu $Y$ ve stejnolehlosti se středem v bodě $S$ a koeficientem $k = \frac{\lambda}{\mu}$.




Obr. 1

Vztažením výše uvedeného na všechny body kružnice $m$ můžeme tvrdit, že kružnice $m$, která neprochází středem kruhové inverze $S$, a její obraz v kruhové inverzi – kružnice $m'$, která rovněž neprochází středem kruhové inverze $S$, si odpovídají ve stejnolehlosti se středem ve středu kruhové inverze $S$ s koeficientem $k$

[1] Definice. Nechť je v rovině dána kružnice $k(S; r)$ a bod $X$; mocností bodu $X$ ke kružnici $k$ nazýváme reálné číslo $\mu = |SX'|^2 - r^2$. Lze ukázat, že pro každé dvě různé sečny $s$, $s'$ vedené bodem $X$ protínající kružnici $k$ v bodech $A$, $B$ a $A'$, $B'$ na základě podobnosti trojúhelníků platí: $|XA'| : |XA| = |XB| : |XB'|$ a odtud $|XA'| \cdot |XB'| = |XA| \cdot |XB|$.

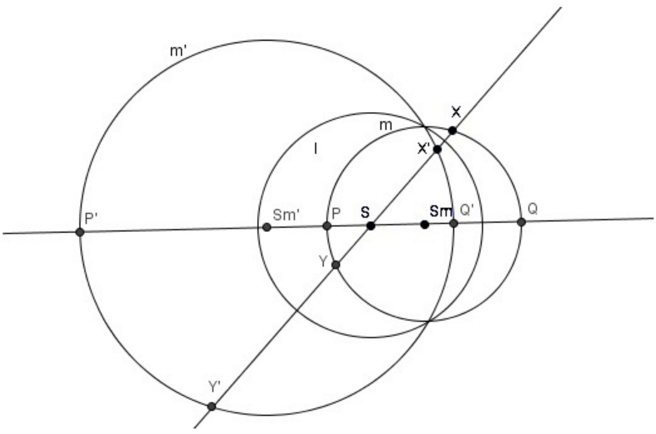
rovným podílu koeficientu kruhové inverze $\lambda$ a mocnosti bodu $S$ ke kružnici $m$.

V této stejnolehlosti si body jednotlivých kružnic odpovídají „střídavě“ ve srovnání s dvojicemi bodů odpovídajících si v dané kruhové inverzi. V následující tabulce jsou přehledně zachyceny dvojice odpovídajících si bodů v dané kruhové inverzi i ve výše odvozené stejnolehlosti (obr. 1).

| kruhová inverze | stejnolehlost |
|---|---|
| $P \longrightarrow P'$ | $P \longrightarrow Q'$ |
| $Q \longrightarrow Q'$ | $Q \longrightarrow P'$ |
| $X \longrightarrow X'$ | $X \longrightarrow Y'$ |
| $Y \longrightarrow Y'$ | $Y \longrightarrow X'$ |

Tab. 1

V případě, že leží střed kruhové inverze $S$ ve vnitřní oblasti kružnice $m(S_m; r)$, je situace obdobná (obr. 2). V takovém případě je mocnost bodu $S$ ke kružnici $m$: $\mu = |SS_m|^2 - r^2$ menší než 0, koeficient stejnolehlosti $k = \frac{\lambda}{\mu}$ je tedy také záporný.




Obr. 2

Kružnice $m'$, která je obrazem kružnice $m$ v kruhové inverzi určené kružnicí $l(S; \sqrt{\lambda})$, zřejmě ani v tomto případě neprochází středem kruhové inverze $S$. Tuto skutečnost nahlédneme snadno pomocí výše ukázané existence stejnolehlosti, v níž si kružnice $m$ a $m'$ odpovídají – stejnolehlost je totiž zobrazením vzájemně jednoznačným a střed stejnolehlosti $S$ je jediným samodružným bodem tohoto zobrazení.

## Obraz středu kružnice neprocházející středem kruhové inverze

V další části upřesníme vlastnosti obrazu středu kružnice neprocházející středem kruhové inverze. Víme totiž, že se střed $S_m$ kružnice $m$ v kruhové inverzi nezobrazí na střed $S_{m'}$ kružnice $m'$, tedy že obraz středu kružnice v dané kruhové inverzi není středem obrazu této kružnice v této kruhové inverzi. Pro střed $S_m$ a jeho obraz $S'_m$ v kruhové inverzi platí:

$$|SS_m| = \frac{\lambda}{|SS'_m|}.$$

Dále z definice kruhové inverze máme (obr. 3):

$$|SP| = \frac{\lambda}{|SP'|},$$
$$|SQ| = \frac{\lambda}{|SQ'|}.$$

Pro vzdálenost středu $S_m$ kružnice $m$ od středu kruhové inverze $S$ podle známého vztahu platí:

$$|SS_m| = \frac{|SP| + |SQ|}{2},$$

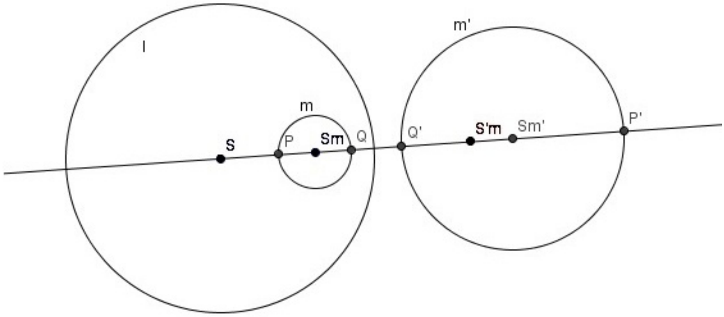
tedy po dosazení pravých stran z výše uvedených tří rovností:

$$\frac{\lambda}{|SS'_m|} = \frac{\frac{\lambda}{|SP'|} + \frac{\lambda}{|SQ'|}}{2}.$$

Po vydělení obou stran rovnosti nenulovým číslem $\lambda$ a úpravě na rovnost převrácených hodnot původních výrazů dostaneme:

$$|SS'_m| = \frac{2}{\frac{1}{|SP'|} + \frac{1}{|SQ'|}}.$$

Na základě uvedeného můžeme říci, že vzdálenost obrazu středu kružnice od středu kruhové inverze je harmonickým průměrem vzdáleností obrazů krajních bodů průměru obrazu kružnice od středu kruhové inverze.



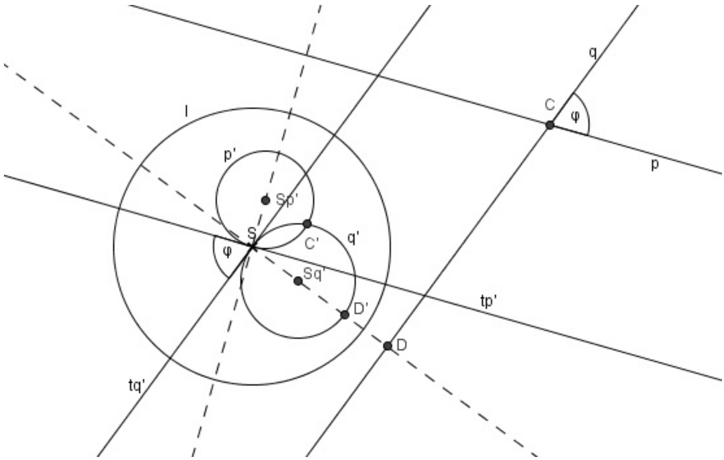

Obr. 3

## Velikost úhlu v kruhové inverzi

Další ze základních vlastností zobrazení kruhové inverze je její *konformnost*, tj. vlastnost zachování velikostí úhlů. Tuto skutečnost snadno nahlédneme v případě zobrazení dvou různoběžek, z nichž žádná neprochází středem kruhové inverze $S$ (obr. 4).

Obrazy těchto různoběžek $p$, $q$ protínajících se v bodě $C$ a svírajících úhel $\varphi$ jsou protínající se kružnice procházející středem kruhové inverze $S$ – po řadě $p'$, $q'$, jejichž středy označíme po řadě $S_{p'}$, $S_{q'}$. Kružnice $p'$, $q'$ mají právě dva společné body, a to střed kruhové inverze $S$ a bod $C'$, který je obrazem průsečíku $C$. Úhel kružnic $p'$, $q'$ svírají jejich tečny $t_{p'}$, $t_{q'}$.

Přímka $SS_{q'}$ je kolmá na tečnu $t_{q'}$ kružnice $q'$ v bodě $S$. Přímka $SS_{q'}$ je zároveň kolmá na přímku $q$, protože obrazem jejich průsečíku $D$ je bod $D'$ – druhý z průsečíků kružnice $q'$ a přímky $SS_{q'}$, která je v dané kruhové inverzi (nikoli bodově) samodružná. Z uvedeného plyne $t_{q'} \parallel q$. Analogicky lze odvodit $t_{p'} \parallel p$. Na základě ukázaných vztahů rovnoběžnosti můžeme tvrdit, že tečny obou kružnic $t_{p'}$, $t_{q'}$ svírají úhel $\varphi$.




Obr. 4

V případě, že jsou přímky $p$, $q$ rovnoběžné (svírají úhel $\varphi = 0°$), jsou body $S$, $S_{p'}$, $S_{q'}$ kolineární, kružnice $p'$, $q'$ se dotýkají právě v bodě $S$ a jejich tečny $t_{p'}$, $t_{q'}$ v tomto bodě splynou (svírají úhel $\varphi = 0°$).

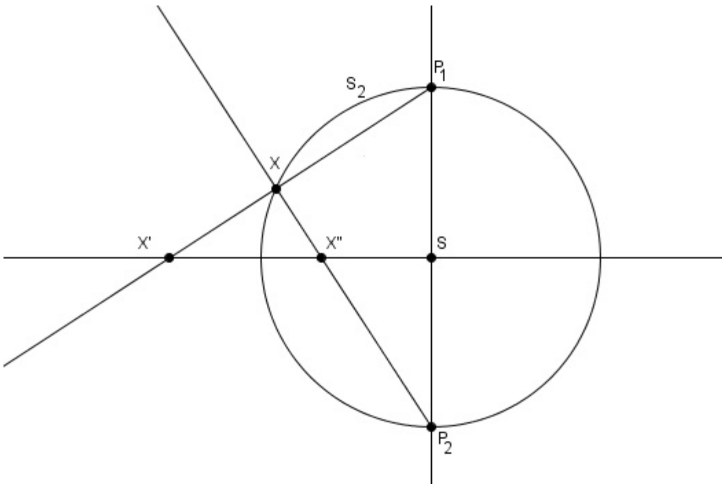
V případě, že (bez újmy na obecnosti) přímka $p$ prochází středem kruhové inverze $S$ a s přímkou $q$ svírá úhel $\varphi$, zůstává velikost úhlu rovněž zachována, jelikož přímka $p$ je v dané kruhové inverzi (nikoli bodově) samodružná, tedy $p = p'$, a tečna $t_{q'}$ ke kružnici $q'$ ve středu kruhové inverze $S$ svírá s přímkou $p'$ úhel $\varphi$, protože platí $t_{q'} \parallel q$.

V případě, že se přímky $p$, $q$ protínají ve středu kruhové inverze $S$ a svírají úhel $\varphi$, svírají tento úhel i jejich obrazy – přímky $p'$, $q'$, protože $p$, $q$ jsou (nikoli bodově) samodružné.

## Kruhová inverze a stereografická projekce

V poslední části ukážeme souvislost kruhové inverze s významným kartografickým zobrazením – stereografickou projekcí, která je také konformním zobrazením. Pro naše účely budeme uvažovat dvě zobrazení (obr. 5):

- Stereografickou projekci, která zobrazuje kulovou plochu $S^2(O,r)$ na rovinu rovníku $\rho\colon z=0$ z jejího severního pólu $P_1$. Obraz bodu $X \in S^2$ označíme $X'$.
- Stereografickou projekci, která zobrazuje kulovou plochu $S^2(O,r)$ na rovinu rovníku $\rho\colon z=0$ z jejího jižního pólu $P_2$. Obraz bodu $X \in S^2$ označíme $X''$.




Obr. 5

Zřejmě platí (věta *uu*), že trojúhelníky $P_1X'S$ a $X''P_2S$ jsou podobné. Z toho dostaneme:

$$|SX'| : |SP_1| = |SP_2| : |SX''|.$$

Protože zároveň platí $|SP_1| = |SP_2| = r$, dostáváme:

$$|SX'| \cdot |SX''| = r^2.$$

Závěrem lze tedy říci, že body $X'$, $X''$ jsou obrazem a vzorem v kruhové inverzi se středem $S$ a koeficientem $r^2$. Kružnicí samodružných bodů této kruhové inverze je právě kružnice rovníku, která je průnikem kulové plochy $S^2$ a roviny $\rho$.

## Literatura


[1] Kobza, A. (2013). Pozoruhodné vlastnosti kruhové inverze. *Učitel matematiky*, 22(1), 15–26.

[2] Leischner, P. (2010). *Geometrická zobrazení.* České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích.

[3] Sekanina, M., Boček, L., Kočandrle, M. & Šedivý, J. (1988). *Geometrie II.* Praha: Státní pedagogické nakladatelství.



## Abstract

The aim of this article is to extend the article "Remarkable properties of ring inversion" and to add some other remarkable qualities of the mapping and connections with school geometry.



*Stanislav Novák*
*Základní škola a mateřská škola Třebenice*
*Paříkovo náměstí 133*
*411 13 Třebenice*