David Janda; Derek Pilous

Grafy funkcí z pohledu žáků a studentů základních, středních a vysokých škol

Učitel matematiky, Vol. 25 (2017), No. 3, 129–155

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149100

GRAFY FUNKCÍ Z POHLEDU ŽÁKŮ A STUDENTŮ ZÁKLADNÍCH, STŘEDNÍCH A VYSOKÝCH ŠKOL

David Janda, Derek Pilous

V článku se věnujeme studii provedené v rámci projektu GAUK[1] *Hypotetická a individuální učební trajektorie konceptu*[2] *elementární funkce.* Jak název napovídá, cílem projektu bylo popsat vývoj konceptu spojeného s pojmem funkce v mysli žáka. Obecně se tento koncept skládá z dvou značně (nikoli matematicky, ale mentálně) nezávislých podkonceptů, předpisu a grafu. Ty mají zásadně odlišný charakter – předpis je procedurální, je to návod, jak vzoru přiřadit obraz; graf je vizuální reprezentace a je vnímána jako geometrický objekt. To prakticky vylučuje jejich zkoumání najednou, stejnou metodikou. Ve studii, jejíž výsledky zde předkládáme, jsme se proto soustředili na koncept grafu funkce.

Před vlastní studií jsme provedli tři pilotní výzkumné sondy s cílem zmapovat ty aspekty grafů funkcí, které žáci považují za důležité, pomocí úloh spíše kognitivního než matematického charakteru. V těchto úlohách měli žáci tvořit příklady grafů funkcí a kategorizovat je a také hodnotit, jak „dobrý" je určitý příklad. Tyto aspekty jsme následně využili při rozhovorech s žáky a studenty, které byly zaměřeny na srovnávání, kategorizaci a řazení grafů, které běžně učitelé používají při výuce. V tomto článku čtenáře seznámíme s vybranými závěry, které jsme vyvodili z analýzy těchto rozhovorů.

---

[1]Grantové agentury Univerzity Karlovy ve spolupráci s Pedagogickou fakultou, projekt č. 227–364, hlavní řešitel: David Janda.

[2]Pojem koncept je v názvu projektu i celém článku užit ve smyslu obvyklém v kognitivní vědě, tedy jako mentální reprezentace určité kategorie. Kategorie je množina či třída reálných či ideálních objektů, např. psů nebo čísel; koncept je způsob, jakým je taková kategorie uložena v naší mysli. „Pojem" je pak označení konceptu, slovo, které tento koncept evokuje.

Teoretický rámec studie

Asi každý autor učebnic i učitel někdy uvažuje o tom, jak se asi v průběhu času u žáků utvářejí jednotlivé matematické koncepty. Takový vývoj bude mít jistě nějaké společné rysy – určité stavy, kterých je nutno dosáhnout, abychom poté mohli dosáhnout dalších (např. žáci musí umět vynášet body do soustavy souřadnic, aby mohli nakreslit graf funkce). Na druhé straně však takový vývoj má určitá specifika „žák od žáka“, neboť každý člověk je jedinečný a důsledkem toho je jedinečná i jeho kognitivní struktura daného konkrétního konceptu. My jako učitelé se snažíme (často podvědomě) tyto podobnosti a odlišnosti identifikovat a ve vyučovacím procesu použít. V přípravě na hodinu je tento proces často přímo viditelný – např. si klademe otázku, v jakém pořadí žáky s jednotlivými vědomostmi konfrontovat, což neznamená nic jiného, než že cílíme na takový stav daného konceptu, o kterém si myslíme, že je u žáků nejrozšířenější.

Model toho, jak se žáci s jedním konkrétním pojmem seznamují, se v některé dnešní literatuře označuje jako hypotetická učební trajektorie (dále UT, Baroody et al., 2004). Oproti tomu reálný vývoj, který můžeme u jednoho konkrétního žáka (zpravidla nedokonale) pozorovat, se nazývá individuální UT. Jejím cílem je zaznamenat vybrané aspekty z utváření daného konceptu jednoho konkrétního žáka/studenta (co se žák naučil dříve a co později, jaké úlohy je schopen řešit, jaké znalosti si zapamatoval atd.). Právě takovou individuální UT jsme pozorovali u respondentů naší studie se zaměřením na koncept grafu funkce. Tato snaha o jednotný popis individuální UT by nám měla být užitečná k tomu, abychom identifikovali a popsali nedostatky a jejich příčiny u jednotlivých žáků/studentů[3], případně více či méně popsali hypotetickou UT, tedy ony společné znaky vývoje daného pojmu.

[3] A to především ty, které nemusí být v běžném vyučovacím procesu vůbec zřejmé.

Teorie prototypů

Prototyp je pojem z kognitivní psychologie, který v sedmdesátých letech dvacátého století podrobně popsala E. Roschová (Mervis & Rosch, 1981). Jedná se o pojem, pomocí kterého můžeme popsat, jakým způsobem lidská mysl pracuje s kategoriemi objektů. E. Roschová vyvrátila mylný předpoklad, že lidé rozhodují, jestli daný objekt (například židle) je prvkem určité kategorie objektů (nábytek), pomocí ověření podmínek, které stanovuje definice dané kategorie. Ukázala totiž, že různým objektům v dané kategorii je lidmi přiřazena různá typičnost (např. skříň může být vnímána více jako nábytek než stolička); ty nejtypičtější se nazývají *prototypy*. Dále ukázala, že úkol „Rozhodni, zda následující objekt patří do dané kategorie" lidé řeší porovnáváním těchto objektů s prototypy této kategorie.

V didaktice matematiky zřejmě poprvé aplikovala tuto myšlenku R. Hershkowitzová (1989), když ukázala, že (alespoň některé) matematické koncepty jsou reprezentovány prototypy a že tato reprezentace ovlivňuje žákovy výsledky v matematice. Příkladem může být zkoumání geometrických objektů, kdy obrázky, které jsou podobné vyobrazení trojúhelníku, ale nesplňují jeho formální definici, jsou žáky označovány za trojúhelníky spíše než ty, které definici odpovídají, nicméně se žákovi nezdají tak typické.

Velkým problémem, který teorie prototypů (a jakýkoli další pokus o jednoznačný popis reprezentace dané kategorie v mysli člověka) přináší, je kontext, ve kterém s kategoriemi pracujeme. To, co náš mozek může v jedné situaci považovat za naprosto typický příklad dané kategorie (například přímka jako graf lineární funkce), se v jiném kontextu vůbec neprojeví (například při vynášení bodů, které reprezentují teplotu v různých dnech týdnu).

Pro nás bude ale nejdůležitější odraz práce Roschové v teorii J. Masona a A. Watsonové.

Teorie exemplifikace

Teorii exemplifikace byla věnována v posledních přibližně deseti letech ve světové didaktice matematiky poměrně velká pozornost.

Jedná se o teoretický model pro (v praxi velmi intuitivní a často používanou) oblast schopností, kterou můžeme pro jednoduchost nazvat „práce s příklady“. Watsonová a Mason (2006) navazují na práci Roschové a zavádějí řadu pojmů, které nám umožňují o této oblasti konstruktivně uvažovat.

Pojem *příklad* („example“) autoři nevymezují nijak striktně s tím, že přesné vymezení pojmu není jejich cílem – snaží se přiblížit tomu, jak pojem příklad intuitivně vnímáme my učitelé, tedy jako reprezentanta určité kategorie, která je dána definicí konceptu. Tak příkladem funkce může být předpis $f(x) = x$ jako jeden reprezentant třídy funkcí, stanovené definicí pojmu funkce. Násobení můžeme vidět jako příklad matematické operace. Podobně můžeme uvažovat o konkrétních důkazech nebo algoritmech také jako o příkladech daných kategorií důkazů nebo algoritmů[4].

Podstatou teorie exemplifikace je popsání *osobního prostoru příkladů*[5] daného konceptu ne pouze jako seznamu jednotlivých prvků, ale i vlastností a vztahů, které v rámci dané kategorie mají. Odvozeným pojmem je potom evokovaný *osobní prostor příkladů*[6], kdy se jedná o příklady, které se žákovi vybaví za určitých okolností, v jednom konkrétním časovém úseku a v jednom určitém kontextu. Autoři dále popisují pojmy *dimenze možné variace* a *rozsah přípustné změny*[7], o kterých budeme hovořit později.

Funkce z pohledu české didaktiky

Na poli české didaktiky pozorujeme dvě oblasti zájmu, ve kterých se s funkcemi setkáváme.

Důležitou oblastí pro výuku funkcí v českém prostředí je sou-

[4]Pro přesnost je zde vhodné upozornit, že se fakticky nejedná o příklad v pravém smyslu slova, ale spíše o písemné vyjádření příkladu, který jsme zkonstruovali v mysli. To se nemusí zdát důležité do chvíle, než se zamyslíme nad různými způsoby vyjádření příkladů. Na zdánlivě stejné otázky „Nakresli typický graf funkce“ a „Popiš typický graf funkce“ totiž nemusíme dostat tentýž graf funkce.

[5]Vlastní překlad z anglického „personal example space“.

[6]Vlastní překlad z anglického „evoked personal example space“.

[7]Vlastní překlad z anglického „dimension of possible variation“ a „range of permissible change“.

bor starších publikací věnujících se funkcím od významných českých matematiků a didaktiků, počínaje učebnicí K. Petra – *Počet diferenciální* či sérií učebních textů E. Čecha (z nichž můžeme jmenovat zejména *Elementární funkce*) apod.[8] Tuto a další učebnice považujeme za velice významné z toho hlediska, jak se výuka a především vnímání funkcí jako takových v české škole postupně měnilo, nicméně naší práce se týkají jen okrajově; jedná se totiž o texty v kontextu posloupností a řad či přímo diferenciálního počtu jako takového bez vazby na žáka.

Druhou oblastí je potom současný výzkum a pojetí funkcí v didaktice matematiky, konkrétněji se jedná o práci Kopáčkové a Eisenmanna. Kopáčková (2002) zpracovává problematiku funkcí z pohledu jejich ontogeneze (vývoje funkcí u žáků) a fylogeneze[9] (tedy vývoje funkcí jako matematického pojmu v historii) a jejich srovnání v kontextu genetické paralely (Hejný & Kuřina, 2001) za použití Hejného teorie generických modelů (Hejný, 2014). Eisenmann ukazuje některé netradiční přístupy, pomocí kterých můžeme k výuce funkcí přistupovat, a to zejména v kontextu reálných situací (Eisenmann, 2007) a fyzikálních jevů (Eisenmann, 1996). Oba zmiňovaní autoři popisují velmi rozmanité a inspirativní využívání funkcí ve výuce. Zároveň nahlíží na funkce spíše z procesuálního hlediska než jako na statické objekty, k čemuž se ještě dostaneme později.

Cíle studie

Z důvodu rozsáhlosti tématu funkcí jsme se zaměřili na typickou grafickou reprezentaci reálné funkce reálné proměnné – její dvojrozměrné znázornění pomocí grafu. Naším cílem přitom bylo identifikovat ty vlastnosti grafických reprezentací funkcí, které žáci/studenti používají při řešení úloh spíše epistemologického než

[8] Podrobnější informace popisuje např. Kopáčková (2001).

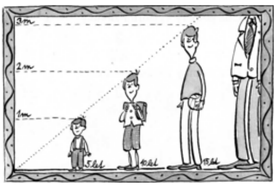
[9] V českém prostředí můžeme nalézt zpracování fylogeneze pojmu křivka (Lomtatidze, 2007). Pro zájemce uvádíme, že v mezinárodním kontextu je fylogeneze pojmu funkce zpracována například v (Edwards, 1994) a zajímavým srovnáním může být zpracování tohoto tématu také Piagetem a jeho spolupracovníky (Piaget, 1977).

matematického charakteru. Příkladem je úloha, v níž se mají rozlišit „dobré“ příklady funkcí od těch „méně vhodných“, seřadit dané příklady podle zadaných kritérií či generovat příklady funkcí, které splňují určité parametry, apod.

Dalším cílem bylo zjistit, jakým způsobem na tyto vlastnosti nahlížejí žáci v časovém období od sedmého ročníku základní školy po první ročník školy vysoké. Významnou otázkou pro nás v tomto kontextu bylo, zda je tento vývoj chápání grafické reprezentace funkcí možné popsat pomocí vývojových stavů, kterými by žáci měli postupně procházet (tedy zda je možné říci, že existuje jakási lineární učební trajektorie), a pokud ano, popsat alespoň některé z nich.

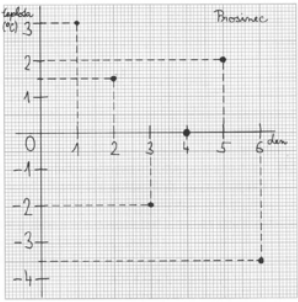
Metodologie

Na žákovu představu o grafické reprezentaci funkcí má vliv to, s čím se setkává zejména v hodinách matematiky. Pokud bereme v úvahu základní školu, pak se jedná o poměrně úzkou škálu příležitostí. Omezili jsme se na příležitosti, s nimiž se žák setká v učebnici pro 7. ročník. Jako východisko jsme zvolili řadu učebnic autorů Odvárka a Kadlečka (1998), neboť se jedná o učebnice tradičního charakteru, v našem okolí poměrně hojně používané. Použili jsme všechna znázornění funkčních závislostí z řady učebnic pro sedmý ročník – celkem čtrnáct obrázků. Uvádíme je zde v pořadí, v jakém se v učebnici objevují[10].

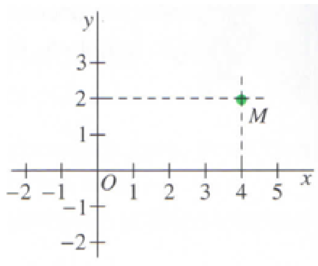


1

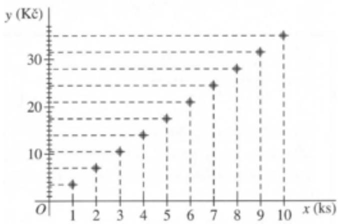
[10] Jsme si plně vědomi toho, že obrázky samotné jsou v učebnici použity s různými záměry a často ani nemusí mít přímou vazbu k funkcím jako takovým. To ale není v rozporu s našimi cíli – podstatné jsou pro nás především reakce žáků na obrázky samotné.


teplota (°C)
Prosinec
den
0
1
2
3
4
5
6
-1
-2
-3
-4

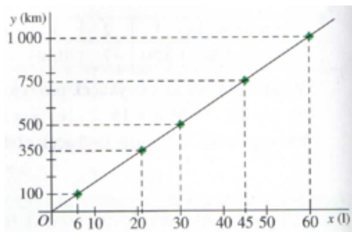
2


y
x
O
M
−2
−1
1
2
3
4
5

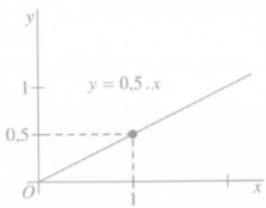
3


y (Kč)
x (ks)
O
10
20
30
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

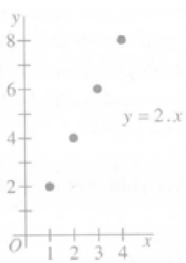
4


y (km)
x (l)
O
1 000
750
500
350
100
6
10
20
30
40
45
50
60

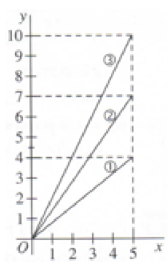
5


y
x
O
y = 0,5 . x
1
0,5

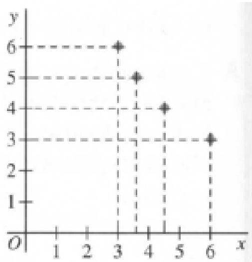
6


y
x
O
y = 2 . x
8
6
4
2
1
2
3
4

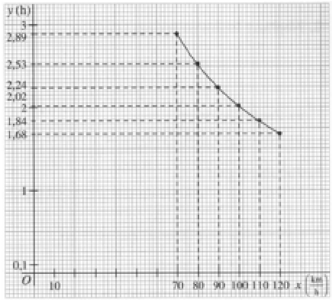
7


y
x
O
①
②
③
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
1
2
3
4
5

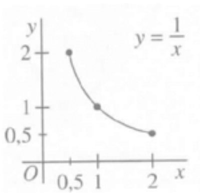
8



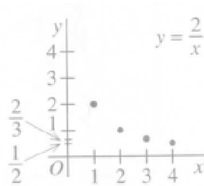
9



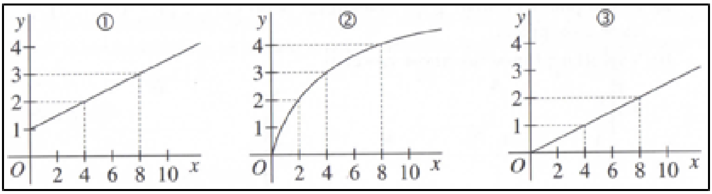
10



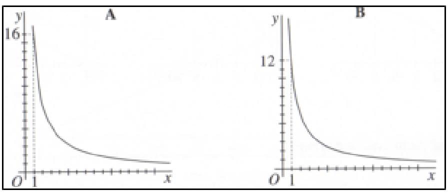
11



12



13



14

Obr. 1 až 14: Obrázky seřazené podle jednotlivých dílů učebnic matematiky pro sedmý ročník. Obr. 13 a 14 obsahují tři a dva grafy, proto jsme je pro přehlednost orámovali černou linkou.

Ve snaze získat hlubší náhled do problematiky jsme jako výzkumnou metodu využili klinické rozhovory. Rozhovory byly částečně strukturované a tazatelé postupovali podle následujícího rámcového plánu:

1. Uvedení řešitele do tématu, popis struktury rozhovoru
2. Úkol 1: *Těmito obrázky se učitelé snaží žáky něčemu naučit, dokázal bys mi říct, co to je? Co se nás učitelé snaží naučit?* (Žáci/studenti dostali obrázky zamíchané.) Následná diskuze je věnována zmíněným pojmům a představám, které o nich žáci/studenti mají.
3. Úkol 2: Žáci/studenti jsou dotázáni na rozdíly a podobnosti dvou vybraných obrázků ve vztahu ke spojitosti.
4. Úkol 3: Žáci/studenti jsou vyzváni k seřazení obrázků podle toho, jak je asi budou učitelé ve výuce předkládat/používat.
5. Úkol 4: Žáci/studenti jsou vyzváni k popsání kritérií, podle jakých obrázky řadili.

Tato struktura byla ovšem často narušena nepředvídanými reakcemi žáků a studentů, které ale na druhou stranu považujeme za přínosné a důležité. Bylo natočeno celkem 23 rozhovorů, z toho sedm v sedmém ročníku ZŠ (na běžné pražské základní škole), osm v prvním ročníku SŠ (z pohledu matematiky na průměrné střední škole zaměřené na výuku jazyků) a osm v prvním ročníku VŠ (jednalo se o studenty učitelství matematiky). Žáci/studenti byli vybíráni po konzultaci s jejich vyučujícími tak, aby byli zastoupeni jak žáci v matematice slabší, tak silnější. Zároveň jsme upřednostňovali spíše komunikativní jedince.

Rozhovory byly natočeny na videozáznamy a jejich přepisy sloužily jako podklad pro následné analýzy. Jejich cílem bylo zjistit, jak o grafech funkcí žáci a studenti uvažují a jaké mají představy. V následujícím oddíle se podíváme na vybrané výsledky, které budeme ilustrovat přímo ukázkami z rozhovorů. Ty představujeme v takové podobě, v jaké proběhly, tedy se všemi nedokonalostmi hovorového jazyka, přeřeknutími, zbytečným opakováním slov apod. Promluvy tazatele uvozujeme písmenem T.

Žáci/studenti se v rámci jednotlivých úkolů postupně vyjadřovali k některým obrázkům. Tazatel se přitom snažil rozvést jejich myšlenky až k jednotlivým aspektům obrázků, jejichž přítomnost nebo absenci je možno pozorovat. Takovým aspektem byla např. spojitost grafu, přítomnost záporných čísel v grafu, přítomnost „vodicích čar“ k jednotlivým bodům, přítomnost samotných bodů jako „puntíků“, množství popisných informací či zobrazení na milimetrovém papíře. Zároveň jsme se pokoušeli žáky/studenty přimět ke kvalitativnímu hodnocení obrázků na základě těchto aspektů.

Následná analýza jednotlivých přepisů probíhala paralelně dvojím způsobem. Především jsme se zaměřili na aspekty, které jsme v pilotní studii identifikovali jako pro žáky důležité – spojitost vs. nespojitost, procesuální vs. konceptuální nahlížení obrázků, prototypičnost (a následně kategorizaci) určitých obrázků. Sekundárně jsme se zaměřili na aspekty, které vycházejí z uvedených obrázků – přítomnost vodicích čar. Jako třetí zdroj informací k analýze jsme použili statistického zpracování výsledků řazení obrázků. Interpretací získaných informací jsme rozdělili do čtyř oddílů podle jejich povahy.

Vybrané výsledky

Řazení obrázků jednotlivými žáky/studenty

Ačkoli je naše studie kvalitativního charakteru, část nasbíraných dat – pořadí až čtrnácti obrázků od dvaceti respondentů[11] – umožnila statistickou analýzu, která dává obecnou představu o podobnostech a rozdílech mezi výstupy jednotlivých respondentů i jejich skupin podle stupně školy. Dále jsme statistiku využili k vytipování výrazných jevů vhodných pro hlubší kvalitativní analýzu. Vzhledem k malému vzorku je však následující výsledky třeba brát jako charakteristiku konkrétního souboru dat, z nějž nelze – zvláště u informací vztahujících se k jednotlivým obrázkům – činit obecné závěry. Před dalším čtením doporučujeme čtenáři se s obrázky dobře seznámit a udělat si vlastní představu na reakce žáků/studentů u jednotlivých úkolů.

[11] Tři respondenti z různých důvodů během rozhovoru obrázky neseřadili.

Při porovnávání pořadí jsme narazili na to, že některá jsou neúplná – dva respondenti vynechali jeden obrázek, dva respondenti dva obrázky a jeden respondent seřadil jen šest ze čtrnácti obrázků. Pořadí různého počtu obrázků nejsou přímo porovnatelná – pokud by respondenti například dávali na konec pořadí vždy stejný obrázek, měl by různé pořadí a průměr či medián z těchto pořadí by neměl smysl. Než zmenšovat již tak malý vzorek pořadí tím, že bychom neúplná vyřadili, rozhodli jsme se pro lineární interpolaci, která prvnímu vzorku přiřadila vždy číslo 1 a poslednímu 14. Proto se v tab. 1 vyskytují mezi mediány i necelá čísla, která nemohla vzniknout jako průměr dvou středních pořadí.

Z takto získaných dat jsme pro každý obrázek stanovili jeho průměrné a mediánové pořadí a také směrodatnou odchylku, a to pro jednotlivé skupiny respondentů podle stupně školy a pro celek. Za relevantnější považujeme pořadí mediánové, neboť aritmetický průměr je na malém vzorku citlivý na okrajové hodnoty, přesto jsme jej pro úplnost zařadili.

	obrázek	1	2	3	4	5	6	7
	medián	1	3	5	2,5	5	6	10,5
ZŠ	průměr	1,33	5	5,83	3,67	5,67	6,17	9,17
	odchylka	0,75	4,47	1,95	2,05	2,62	2,54	3,34
	medián	1	6	6	3,8	4	11	10
SŠ	průměr	1	6,23	4,8	3,77	4,03	10,2	9,4
	odchylka	0	3,67	2,4	0,69	1,34	1,72	2,58
	medián	1	5	3	3,95	6,32	4,5	6
VŠ	průměr	1,17	6,43	4,83	5,21	6,3	5,07	6,68
	odchylka	0,37	4,45	4,09	2,36	2,26	2,89	2,7
	medián	1	4	5	3,48	5	7	9
Celek	průměr	1,17	5,92	5,14	4,31	5,43	6,77	8,18
	odchylka	0,5	4,27	3,16	2,04	2,36	3,28	3,16
	změna	0	3	3	1,45	2,32	6,5	4,5
	variace	0	4	4	1,45	3,32	11,5	4,5

	obrázek	8	9	10	11	12	13	14
ZŠ	medián	10,5	7,5	12,5	10,5	9	12	11
	průměr	10,2	7,17	11	9,67	9	11	10,2
	odchylka	1,77	2,27	3,11	2,81	3,56	2,58	3,72
SŠ	medián	8	5	10	12	10	8	12
	průměr	9,8	6,83	9,97	11,8	10,4	8,8	10,6
	odchylka	3,49	4,22	2,78	1,72	1,85	2,23	3,07
VŠ	medián	9	6,86	10,4	11	12	9,57	13,5
	průměr	8,72	7,34	9,8	9,78	10,5	9,56	12,7
	odchylka	2,75	4,05	1,95	2,49	2,56	3,53	2,07
Celek	medián	9,14	5,86	10,4	11	10	9	13
	průměr	9,5	7,14	10,2	10,3	9,99	9,81	11,3
	odchylka	2,79	3,67	2,65	2,59	2,87	3,07	3,16
	změna	2,5	2,5	2,5	1,5	3	4	2,5
	variace	3,5	4,36	2,88	2,5	3	5,57	2,5

Tab. 1: Statistický přehled řazení obrázků

Tyto hodnoty by neměly dobrý smysl, kdyby byla pořadí sestavená jednotlivými respondenty náhodná a navzájem nepodobná. Pravý opak je pravdou, jak ukazují samy hodnoty mediánů, které jsou takřka rovnoměrně rozprostřeny od 1 do 12 (SŠ) až 13,5 (VŠ). Dalším potvrzením této skutečnosti jsou poměrně malé hodnoty směrodatných odchylek od průměrných pořadí, nejlépe ji však ukazují korelace: korelační koeficient[12] mediánového pořadí jednotlivých skupin mezi sebou se pohybuje od 0,74 do 0,83 a koeficient korelace mezi jednotlivými skupinami a původním pořadím v učebnici mezi 0,72 (SŠ) a 0,93 (VŠ), přičemž korelační koeficient mezi mediánovým pořadím celku a pořadím v učebnici je vysokých 0,9.

[12]Pearsonův korelační koeficient vyjadřuje, nakolik jsou dvě stejně dlouhé posloupnosti reálných čísel lineárně závislé. Jeho hodnoty se pohybují od -1 (posloupnosti jsou zcela negativně závislé) přes 0 (posloupnosti jsou lineárně zcela nezávislé) po 1 (posloupnosti jsou zcela pozitivně závislé). Hodnoty kolem 0,8 znamenají v našem kontextu již velmi výraznou podobnost mezi dvěma pořadími.

Za nejvýznamnější statistické zjištění považujeme to, že mediánové pořadí sestavené žáky základní školy koreluje s pořadím v učebnici, s níž se tito žáci dosud nesetkali, koeficientem 0,88. Připomeňme, že pořadí obrázků je reakcí na zadání: *Seřaď obrázky tak, jak si myslíš, že tě je učitelé budou postupně učit.* Z toho usuzujeme, že pořadí sestavená respondenty z vyšších stupňů škol (hodnoty 0,73 pro SŠ a 0,93 pro VŠ) také nejsou primárně odrazem konkrétní zkušenosti s danou učebnicí (natož zapamatování si pořadí obrázků v ní). Spíše se zdá, že žáci mají poměrně vyvinuté (a napříč různými stupni škol srovnatelné) povědomí o složitosti jednotlivých obrázků pro lidskou mysl. Ta může být navíc umocněna jejich zkušenostmi s učebnicemi (nejen) matematiky a, zvláště u respondentů vyšších stupňů škol, patrně i zkušeností s učením jiných žáků.

Kromě porovnání celých pořadí jsme sledovali i rozdíly v pořadí jednotlivých obrázků, a to jednak u jednotlivců v rámci skupin i celku a jednak mezi skupinami. V prvním případě jsme použili směrodatnou odchylku, která ukázala, „jak moc" se pořadí jednoho obrázku ve skupinách a celku liší. V druhém jsme pracovali s mediánovými pořadími skupin, ovšem nikoli tak, jako by skupiny byly nezávislé: zkoumali jsme závislost mediánového pořadí na stupni školy jako reálnou funkci ve snaze odhalit případné trendy změn ve vnímání grafických reprezentací funkce žáky v průběhu matematického vzdělávání. Použili jsme dvě charakteristiky této funkce: celkovou „změnu", definovanou jako rozdíl mezi maximálním a minimálním mediánovým pořadím přes všechny skupiny, a variaci, což je součet změny mezi skupinami ZŠ a SŠ a mezi SŠ a VŠ. Zjednodušeně řečeno, změna vyjadřuje celkové rozmezí mediánových pořadí daného obrázku, variace toho, nakolik tyto hodnoty od ZŠ po VŠ „skáčou": jsou-li hodnoty stejné, znamená to, že se mediánové hodnoty mění se stupněm monotónně.

Uvedené charakteristiky odhalily několik obrázků vymykajících se celému souboru. V první řadě je to obr. 1. Šestnáct z dvaceti respondentů jej zařadilo na první místo, jeden na druhé, dva na třetí a jeden na šesté. Výsledkem je zdaleka nejmenší odchylka (pro celek 0,5; druhá nejmenší hodnota odchylky je 2,04 u obr. 4) a konstantní mediánová hodnota pořadí rovna jedné, která znamená nulovou změnu i variaci. Dalším významným obrázkem je obr. 2. Ten má naopak nejvyšší směrodatnou odchylku v celku i ve skupinách kromě SŠ (kde je druhá nejvyšší), jeho pořadí se tedy mezi jednotlivými respondenty lišilo nejvíce ze všech obrázků; změna i variace jsou ovšem průměrné, což znamená, že rozdíly v pořadích nezávisejí významně na stupni školy. Přesným opakem je další významný obrázek, a sice 6. Ten má naopak v rámci skupin i celku průměrnou odchylku, ale extrémně vysokou změnu a především variaci (11,5, více než dvojnásobek druhé nejvyšší variace). Tento výsledek je odrazem skutečnosti, že středoškoláci řadili tento obrázek podstatně dále než žáci základních škol a vysokoškoláci. Do skupiny významných obrázků jsme zařadili ještě obr. 9 a 13. Na první upozornila druhá nejvyšší odchylka, na druhý druhá nejvyšší variace; za významnější však považujeme to, že byly řazeny poměrně výrazně před své pořadí v učebnicích, více než kterýkoli jiný obrázek.

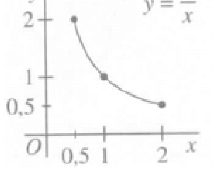
Přesvědčivá interpretace speciálních charakteristik uvedených významných obrázků pomocí dat, která máme k dispozici, je prakticky možná jen u obr. 1, jehož neformální charakter (spíše ilustrace než graf) a reálný kontext vedly drtivou většinu respondentů k jeho zařazení jako prvního, motivačního obrázku. Významnost dalších vysvětlujeme univerzální hypotézou, podle níž respondenti rozpoznávají v obrázcích významné jevy (bodový vs. spojitý graf, linearita, reálný kontext, přítomnost vynášecích čar, přítomnost necelých a záporných čísel, ale i např. použití milimetrového papíru), z nichž některé jsou považovány za jednodušší, a obrázky tyto jevy vykazující jsou řazeny spíše na začátek, zatímco jiné naopak. Obsahuje-li např. obrázek vícero jevů, jejichž hodnocení jednotlivým respondentem je protichůdné (to předpokládáme u obr. 2), neuchylují se respondenti k nějakému „průměru“, ale volí podle subjektivní priority jednotlivých jevů, takže někteří tentýž obrázek zařadí na začátek a jiní na konec. Potvrzení této hypotézy a její konkrétní specifikace pro významné obrázky je otázkou dalšího zkoumání[13]. Zajímavým zjištěním pro nás je, že žáci řadili obrázky poměrně jednotně jak mezi sebou, tak ve vztahu k učebnici (vysoké korelace napříč různými stupni škol), zároveň se ale často rozhodnou pro jedno kritérium řazení a ostatní úplně potlačí.

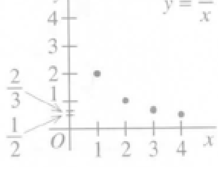
Vývoj vnímání grafické reprezentace funkce

Je bezesporu možné říci, že vnímání grafické reprezentace funkcí se u žáků postupně vyvíjí. Žákům grafy představujeme a zdůrazňujeme jejich různé aspekty v matematice, setkávají se s nimi v jiných předmětech ve škole, ale i v reálných situacích. Všechny tyto situace ovlivňují, jaké aspekty grafů jsou pro ně důležitější než ostatní. Na základě těchto aspektů (a dalších informací) se formují prototypické grafy funkcí u žáků, má tedy smysl se zabývat tím, kterých si žáci všímají dříve a kterých později.

V námi pořízených rozhovorech, ať už pro hodnocení či řazení obrázků, žáci často zmiňovali (důležitost) množství informací uvedených v obrázku (počet popisných číslic, popisky os), existenci reálné situace (konkrétní jednotky spojené s osami), tvar grafů funkcí a existenci vodicích čar. Naopak překvapivé pro nás bylo velmi vzácné zvažování spojitosti grafů. Např. Lucie z následující ukázky věnuje velkou pozornost číslům použitých k popisu os a množství popisných informací, avšak spojitost odbývá jako nedůležitou.

SŠ Lucie





Obr. 11 a 12

[13] Což ostatně platí i pro významnost samu – vzhledem k malému vzorku je velmi dobře možné, že významnost některých obrázků je jen náhodným šumem, který s větším vzorkem vymizí.

T: Hmm, dokážeš říct, v čem se liší?
R: No, liší se v tom, že vlastně tady (obr. 12) je dvojka a tady (obr. 11) je jednička, ne?
T: Ještě v něčem?
R: Hmm, že tady (obr. 12) je to udávaný ve zlomcích, že tady je dvě třetiny a jedna polovina.
T: Mhm.
R: Tady (obr. 11) je jenom nula celá pět, že jo.
T: Dobře. Ještě něco dalšího tě napadá?
R: Hmm, no, tady (obr. 12) dole jsou tady, je tady víc čísel, že jo, a ten graf má vlastně o ten jeden bod? Jako…
T: Mhm. To jsou jednotlivý body…
R: No tak, o ten jeden jednotlivej bod víc, že jo? Je to vlastně jinak, že tady (obr. 12) to jsem takhlenc a tady (obr. 11) to jde už rovnou…
T: Dobře, a teďka se zeptám konkrétně. Tady (obr. 12) nejsou ty body spojený a tady (obr. 11) jo.
R: Mhm.
T: Proč?
R: No tady jsou, tak o-ono to je jedno, že jo, ono i když to nespojím, tak to bude vlastně furt ten samej výsledek. Ne?
T: Mhm. Fajn. Takže je to jedno. V tomhle po-ohledu jsou stejný. Dobře. Jde jenom o to znázornění, takže, jako…
R: No, nonono, prostě, že jo, jako, hmm, nevyjde to, nebo jako nevyjde to stejně, ale že prostě tenhle má, že jo, čtyry body, ale je prostě jedno, jestli to spojím, nebo to nespojím, prostě, bude to furt, jako vyjde to, nebo
T: Jo.
R: Tak to myslím.
T: Furt to, furt to je jeden obrázek.
R: Jo, jojojo, jo.
T: Když to spojíš, nebo když to nespojíš.
R: Přesně tak, děkuju.

Je tedy pravděpodobné, že prototypický (vzhledem k prostoru příkladů grafů funkcí) bude pro Lucii obrázek s více jasně vyznačenými body a popisky os. Další ze zmiňovaných aspektů pro Lucii nemusí být důležité, ale pro jiné žáky mohou hrát významnou roli, prototypické grafy funkcí se proto mohou u žáků významně lišit.

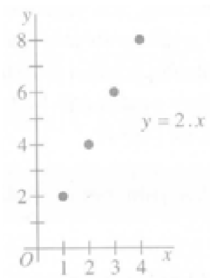
Z pohledu formální matematiky je ale zajímavá také otázka spojitosti, resp. její malá významnost pro žáky. Proto se jí budeme věnovat podrobněji.

Spojitost jako významná vlastnost grafické reprezentace

Interpretace nahlížení grafů funkcí žáky pomocí pojmů teorie Watsonové a Masona odkrývají další dva aspekty, které se u žáků projevily. S utvářením svého *osobního prostoru příkladů* grafů funkcí si žáci utvářejí představu také o tom, jak je možné jej měnit, formuje se jejich *dimenze možné variace* a *rozsah přípustné změny*. Jinými slovy, *co* a *jak moc* na grafu můžeme změnit tak, aby stále zůstal grafem, čímž se určitým způsobem formuje „hranice" prostoru příkladů u žáků.

V následující ukázce si je studentka Aneta za prvé vědoma toho (i když je trochu nejistá), že může vynesené body spojit přímkou a za druhé, že tato změna mění i to, co nám dané grafy říkají.

VŠ Aneta



Obr. 7

T: Tak. Dobře, když už jsme u toho začali, tak myslíte si, že třeba tenhleten graf můžeme propojit tou přímkou nebo tou čárou?

...

R: Já myslím, že tohleto by šlo propojit, že to je nula, že vlastně, vlastně ty body, jo, to bych klidně propojila.

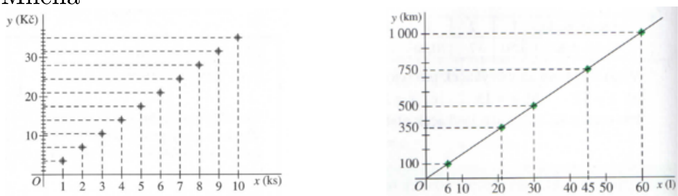
T: Hm, když to propojím, je to to samý, a nebo se to něčím liší? Rozumíte mi, já tady mám…
R: Už to není jenom pro ta celá čísla, no, už to není jenom pro ypsilon děleno dvěma, děleno třema, ale třeba tři a půl.
T: Co to teda znamená vlastně, že tam mám tu čáru mezi, nebo já to ukážu na tomhle…
R: Že to platí i pro ty hodnoty mezi těmi body, které máme vyznačeny, kontinuálně, tak.

V předchozím případě (SŠ Lucie) tomu tak nebylo. Lucie považovala grafy tvořené samotnými body a body s přímkou za totožné. Nejen že jí pravděpodobně uniká jedna z podstat zobrazování spojitých funkcí, tedy nosiče informací o nekonečně mnoha bodech, ale navíc, díky tomu, že mezi grafy nevidí žádný rozdíl, je její dimenze možné změny omezená – nebude v tomto ohledu uvažovat rozdíly mezi spojitými a diskrétními funkcemi. To může mít za následek určité nedostatky při její práci s funkcemi.

Ani výše použité pojmy teorie exemplifikace ale nepopisují situaci dostatečně přesně. Poměrně velkou otázkou v kognitivní psychologii v oblasti kategorizace byla v devadesátých letech 20. století revize teorie prototypů a dalších teorií v oblasti kategorizace. Goldstone (1994) říká, že vyhodnocování podobnosti jednotlivých příkladů obecných kategorií je silně kontextuálně závislé, tedy že v různých situacích budou jedinci vyhodnocovat podobnost jednotlivých objektů různě. To znamená, že pokud chceme nějakým způsobem s žáky pracovat na jejich dimenzi možné variace a rozsahu přípustné změny u konceptu grafu funkce, je potřeba zajistit, že všichni budou uvažovat v konkrétním případě v co nejvíce podobném kontextu. Můžeme totiž jen těžko předpokládat, že naše působení bude mít stejný efekt na žáka, který vnímá graf funkce pouze jako obrázek o určitém tvaru, u něhož nezáleží na tom, co máme napsáno na osách, jako na žáka, který v té samé situaci vidí graf jako závislost jedné veličiny na druhé. Na druhé straně je však třeba v rámci výuky tyto kontexty průběžně měnit. Pokud budeme totiž žákům ukazovat stále spojité grafy, nemůžeme se divit, že budou uvažovat jenom v kontextu spojitých grafů, a to i v takových situacích, které by nám mohly připadat absurdní (např. v jedné z následujících ukázek SŠ Jakub v kontextu teplot v průběhu času na obr. 2).

Jak jsme viděli výše na příkladu Lucie, rozdíl mezi spojitým a „bodovým“ grafem často nebyl v rozhovoru vnímán jako důležitý. Ukazuje se, že mezi různě starými žáky jsou z tohoto pohledu také značné rozdíly. V následujících třech ukázkách srovnáme vnímání spojitosti žáků základní a střední školy a studenta vysoké školy.

ZŠ Milena



Obr. 4 a 5

T: . . . V čem se vlastně tyhle dva obrázky (obr. 4 a obr. 5) liší?
R: Vlastně tady (obr. 4) to máme udělaný jen v těch bodech . . . a pospojovaný (ukazuje na vodicí čáry). A tady (obr. 5), tady je to taky v těch bodech a pak je to udělaný ještě do nějaký jiný přímky nebo to . . .
T: Mhm, a jakej v tom může bejt rozdíl? Jak bysme to třeba používali, kdyby si třeba na tyto dva příklady vymyslela nějakou reálnou situaci, tak kdybys byla schopná… jak rozpoznám rozdíl mezi tím, jak jsi teďka zmínila, že tam je nějaká čára a nějaký puntíky… tak proč to tam vlastně je? Jestli je to tam náhodou nebo . . .
R: Jakože možná jakoby tady (obr. 4), čistě, když chci třeba jenom něco koupit, tak se jenom podívám, kolik to stojí, a nemá to návaznost na tohle, vždycky to je prostě zvlášť. A tady (obr. 5) můžeme říct, že prostě třeba že 750 km mu bude trvat třeba 45 minut, i když je to taky . . . nesmysl. A potom když zrychlíme na 1000 kilometrů za hodinu, tak ujedem třeba větší třeba vzdálenost nebo todlencto . . . a vztahuje se to vlastně na sebe, jakože čím víc

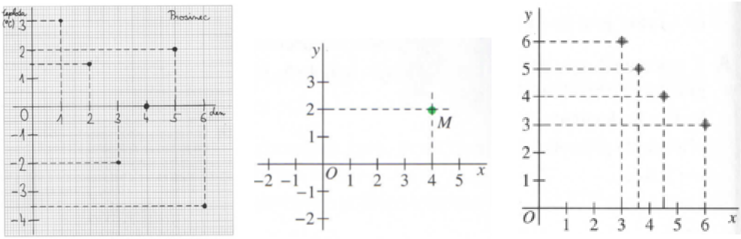
ujedeme kilometrů nebo takhle... vztahuje... stoupá (obr. 5) a tohlecto (obr. 4) je nezávislý na sobě... že si vždycky najdu ten puntík... a tajto je, že ta rychlost... že stoupají nahoru. Mohlo by to ještě pokračovat nahoru. Kdežto tohle je zvlášť každej puntík.

Žákyně základní školy (ZŠ Milena) rozhodně plně vnímá (ale podle našeho názoru i poměrně dobře vystihuje) rozdíl mezi diskrétním a spojitým grafem i přesto, že z hlediska reálného kontextu zaměňuje jednotky. Navíc, i přes všechny nedostatky můžeme říci, že vnímá druhý obrázek jako zobrazení závislosti jedné veličiny na druhé.

SŠ Jakub
R: Možná ještě bych tady ukázal, jak tady jsme měli to počasí (obr. 2, viz níže), tak bych ukázal větší graf, kde je vidět, že to i klesá a stoupá a že to není jenom takhle ta křivka (ukazuje jenom na tři body s kladnými hodnotami), že tady je vidět, že je to jenom takovej oblou... oblouček, když to tak řeknu, a pro ty žáky by to nebylo třeba úplně srozumitelný.
T: No, ale my ty body máme ještě tady taky. Tady máme jeden a tady (ukazuje na body se zápornými hodnotami).
R: Jo. jo.
T: Takže
R: Jakoby spojit to, aby viděli.

Když se žák Jakub zaměřil na obr. 2, vyhodnotil jako důležité tři body s kladnými hodnotami souřadnic a z mnoha různých interpretací obrázku si vybral tu, kde by propojil zmíněné tři body křivkou. Z toho můžeme usuzovat, že (a) má tendenci přirozeně pracovat se spojitými grafy (dokonce i v takto „silně bodovém kontextu“) a že (b) nevnímá žádné velké rozdíly mezi spojitým a nespojitým grafem (nepovažuje za významovou změnu spojení jednotlivých bodů čárou). Můžeme říci, že pro Jakuba je spojitost prototypickou vlastností grafu funkce.

VŠ Alex



Obr. 2, 3 a 9

T: Jo. A proč Vám tyhlenty přijdou jakoby složitější (obr. 2, 3 a 9; myšleno složitější vzhledem ke zbývajícím obrázkům)?
R: Mně nepřijdou složitější, ale podle mě jednodušší pro ty děti bude zapamatovat si, že to má být rovná čára a nemají to zaznamenávat (. . .) těma bodama, jakoby.
T: Ehm, ehm, ehm, takže . . . no! Tadyhle ale třeba jsme taky měli body, že jo?
R: To je pravda.
T: Já jenom chci – chci zjistit jako dobře, jak to – jak to, jako . . . tu složitost – v čem je teda . . . ehm . . . pro Vás . . . prostě vynést ty body do grafu?
R: Asi tak.

Student Alex nás upřímně překvapil svým argumentem, že je složitější vynést jednotlivé body a konstruovat z nich různé tvary, když žáci mohou rovnou pracovat s úplnými tvary. Je nutné podotknout, že tento argument je v podstatě správný – jednodušší to skutečně je. To ale samozřejmě vyvolává otázku, co se vlastně žáky snažíme naučit.

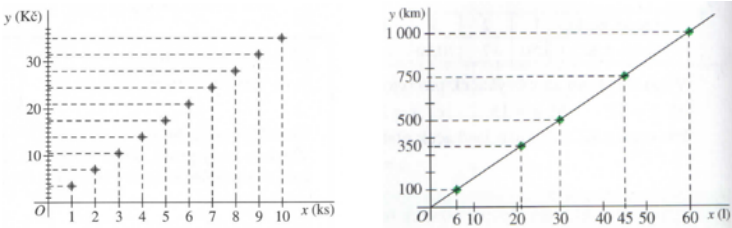
Z předchozích tří ukázek je vidět, že u žáků hraje spojitost různou roli. Viděli jsme velmi kreativní přístup žáka ZŠ, značně prototypický přístup žáka SŠ a přístup studenta VŠ, který záměrně upřednostňuje tvary grafů funkcí na úkor jejich ostatních vlastností. Vybrané ukázky samozřejmě reprezentují tři různé lidské mysli s různým potenciálem i kognitivními schopnostmi. Rozdíly mezi nimi ale přesto považujeme za významné, zvláště díky velkému věkovému rozdílu mezi nimi, a tedy i rozdílu mezi jejich zkušenostmi s funkcemi. Ty jsou u žákyně Mileny téměř žádné, u studenta Alexe kompletní středoškolské, pravděpodobně završené maturitní zkouškou.

Na základě předchozích ukázek můžeme říci, že žáci se rozhodují také na základě prototypických aspektů grafů funkcí, to ale nemění nic na tom, že činí jak správná, tak špatná rozhodnutí. Na nás jako na učitelích je úkol zpřesňovat informace o těchto aspektech, abychom systematicky posílili nebo oslabili jejich vliv na prototypické grafy funkcí žáků. Posílili v případě vnímání rozdílů mezi spojitými a nespojitými grafy a oslabili v případě milimetrového papíru či velikosti čísel.

Tendence nahlížet grafy funkcí z procesuálního hlediska

U dvou žáků základní školy jsme pozorovali tendenci analyzovat předložené obrázky procesuálně, tedy ne jako statické objekty, ale spíše tak, jak podle nich bude daný obrázek postupně vznikat. Žák ZŠ Vojtěch vnímá jednotlivé body jako vytyčenou cestu, po které „oni“ (tedy někdo, koho spojuje s daty v grafu) následně postupují.

ZŠ Vojtěch



Obr. 4 a 5

T: Aha, a co podle tebe znamená, to, že tady (obr. 5) je to protnutý, a tady (obr. 4) to není protnutý.
R: No tady (obr. 4) se ještě nikam nedostali, ale tady (obr. 5) už jsou v těch, hmm, šedesát krát tisíc kilometrů.

T: A když říkáš, ještě se nikam nedostali, koho tím myslíš?
R: No tohle (obr. 4). Jakože tady (obr. 4) stále ještě nic nemaj.
T: Kdo?
R: No oni.
T: Oni.
R: Ten, kdo to, kdo to, na koho se ten graf vztahuje.
T: Ten na koho se, dobře. A tady (obr. 5)? Teda už je to dovršený jako, už to maj?
R: No asi ano. Protože ten graf je u konce.
T: Dobře, mhm.
R: dokonce graf pokračuje dál.

Podobný princip můžeme pozorovat u žákyně Mileny (viz výše). Ten asi nejlépe vystihuje věta „A potom když zrychlíme na 1 000 kilometrů za hodinu, tak ujedem třeba větší třeba vzdálenost nebo todlencto . . . “ pro obr. 5. Žákyně zde opět ztotožňuje propojení jednotlivých bodů na obrázku přímkou s pohybem po vytyčené trase.

I přesto, že dva žáci nejsou reprezentativním vzorkem ani v rámci tohoto výzkumu (natož potom obecně), považujeme tento jev za velice důležitý. Zdá se totiž, že starší žáci procesuálním aspektům grafu nepřikládají fakticky téměř žádný význam. Nechceme říct, že by této interpretace nebyli schopni, spíše ji nepovažují, na rozdíl od nás, za důležitou. Pohled na křivku grafu jako na výsledek procesu konstrukce dalších a dalších bodů považujeme totiž za jeden ze základních stavebních kamenů pro další důležité principy, které žákům představujeme později: nekonečné množství bodů tvořících křivku, princip dosazování pro konstrukci libovolného grafu na základě předpisu, čtení informací z grafu a v podstatě veškeré budoucí vizuální vlastnosti grafů funkcí (maximum, minimum, monotonii atd.) v úzkém spojení s jejich definicemi. Funkce jako konkrétní objekt, který můžeme abstrahovat od procesů vedoucích k jeho konstrukci, by měly být žáky vnímány, podle našeho názoru, rozhodně později než na základní škole, kde to není k ničemu potřeba.

Diskuse a závěr

Diskuse kvantitativních výsledků experimentu

Na základě výsledků našeho zkoumání považujeme popis vývojových stádií grafu funkce za problematický. Ukazuje se, že například řazení obrázků silně koreluje napříč všemi věkovými kategoriemi. Žáci tedy v tomto směru nebyli téměř vůbec ovlivněni výukou a učitelem. Zatímco u některých obrázků je v řazení velký rozdíl mezi skupinami podle stupně školy a rozdíly uvnitř skupin jsou poměrně malé (obr. 6), což nasvědčuje možnosti popsat vývoj vnímání významných aspektů těchto obrázků pomocí stádií, u jiných (obr. 2) je situace opačná: rozdíly mezi skupinami jsou zanedbatelné, zatímco rozdíly v rámci skupin jsou velké a tento rozptyl je u všech skupin podobný. Je pravděpodobné, že řazení v těchto případech probíhá podle kritérií, v nichž nedochází s prohlubováním znalosti konceptu funkce k podstatným změnám, a aspekty, na nichž jsou tato kritéria založena, tedy nelze pomocí jednotlivých na sebe navazujících stádií zachytit.

Námi získaná data lze ale spíše popsat pomocí aspektů, které žáci a studenti u grafických reprezentací funkcí vědomě či nevědomě rozpoznávají a na základě kterých řeší úlohy jako kategorizace, řazení či tvorba grafů funkcí. Vývoj vnímání grafů a tedy i výstupů uvedených úloh v průběhu matematického vzdělávání pak lze vyjádřit jako změnu relativních preferencí těchto aspektů.

Aspekty obrázků a jejich role v experimentu

Aspekty, které jsme v této nebo předchozích pilotních studiích pozorovali, jsou následující: bodový vs. spojitý graf, reálný kontext, přítomnost vynášecích čar, přítomnost necelých, záporných a velkých čísel, použití milimetrového papíru, zobrazení předpisu funkce, vyznačení bodů „puntíky“, tvar grafu funkce (zejména linearita) a průchod grafu počátkem souřadné soustavy. Ve studii, o níž referujeme, byly v rozhovorech nejčastěji zmiňovány dva, a to přítomnost vynášecích čar a zasazení do reálné situace. V pilotních studiích, kde žáci sami konstruovali grafy, se tyto aspekty naopak vůbec nevyskytovaly a dominoval průchod počátkem a linearita.

To demonstruje očekávatelnou skutečnost, že relativní vnímaná důležitost jednotlivých aspektů je kontextuálně závislá – reálný kontext a přítomnost vynášecích čar jsou chápány jako jevy charakteristické pro počáteční fázi budování konceptu funkce (první pro motivaci a propojení s prekonceptem závislosti, druhé jako projev základní techniky konstrukce grafu, tj. vynášení bodů), proto se výrazně projevily právě v úloze na řazení grafů tak, jak by měly být v učebnici, tedy tak, jak by se s nimi žáci měli postupně setkat.

I přes kontextuální závislost lze pozorovat celkový vývoj relativní důležitosti jednotlivých aspektů resp. jejich jednotlivých stavů, nejlépe v řešení úloh bez kontextu, zaměřených na zjištění prototypů (např. úloha z pilotní studie „Načrtněte graf funkce, o němž si myslíte, že jej nenačrtne nikdo jiný“). Celkově lze říci, že se žáci/studenti postupně koncentrují na tvar samotné křivky grafu a ostatní aspekty ustupují (různě rychle) do pozadí.

Vnímání grafů funkcí, spojitost

Velmi často se setkáváme s žáky střední a studenty vysoké školy, kteří ovládají nejvýše „makroskopickou ideu“ grafů, tedy vztahy dvou veličin, tvary daných grafů, obecné vlastnosti funkcí, ale neovládají (případně nepoužívají, nepovažují za pracovní nástroj) prosté dosazení do vztahu a jeho souvislost s grafem, případně křivku jako nositele informace o nekonečně mnoha bodech. Je pro nás otázkou, zda učitelé nevěnují této problematice dostatečnou pozornost nebo si žáci z nějakého důvodu odnášejí pouze první (makroskopický) typ informací a přirozenou myšlenku spojitosti (a odvozené poznatky) nepovažují za důležité. Podle našeho názoru jsou tyto dva aspekty minimálně srovnatelné, přičemž oba jsou zapotřebí ve výuce vyšší matematiky.

Literatura

[1] Baroody, A. J., Cibulskis, M., Lai, M. & Li, X. (2004). Comments on the use of learning trajectories in curriculum deve-

lopment and research. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 227–260.

[2] Edwards, C. J. (1994). *The historical development of the calculus.* Springer.

[3] Eisenmann, P. (1996). O experimentu se spojitostí funkce na střední škole. *Učitel matematiky*, 4(4). 213–219.

[4] Eisenmann, P. (2007). Zlatý vrch nad Českou Kamenicí aneb funkce v přírodě. *Matematika, Fyzika, Informatika*, 16(6), 336–338.

[5] Goldstone, R. L. (1994). The role of similarity in categorization: Providing a groundwork. *Cognition*, 52(2), 125–157.

[6] Hejný, M. (2014). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně.* Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

[7] Hejný, M. & Kuřina, F. (2001). *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování.* Praha: Portál.

[8] Hershkowitz, R. (1989). Visualization in Geometry – Two Sides of the Coin. *Focus on learning problems in mathematics*, 11, 61–76.

[9] Janda, D. (2013). *Funkční myšlení žáků středních škol.* Dostupné z `https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/119283`

[10] Kopáčková, A. (2002). Nejen žákovské představy o funkcích. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, 47(2), 149–161.

[11] Kopáčková, A. (2001). Fylogeneze pojmu funkce. In J. Bečvář & E. Fuchs, *Matematika v proměnách věků II* (46–80). Praha: Prometheus.

[12] Lomtatidze, L. (2007). *Historický vývoj pojmu křivka.* Brno: Nadace Universitas.

[13] Mervis, C. B. & Rosch, E. (1981). Categorization of natural objects. *Annual review of psychology*, 32(1), 89–115.

[14] Odvárko, O. & Kadleček, J. (1998) *Matematika pro 7. ročník ZŠ (1.–3. díl).* Praha: Prometheus.

[15] Piaget, J. (1977). *Epistemology and psychology of functions*, 23. Springer Science & Business Media.

[16] Watson, A., & Mason, J. (2006). *Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples.* Routledge.

Abstract

The article focuses on students' understanding of graphs of functions. Interviews were conducted with 22 students in who solved some tasks on classifications of graphs of functions. For the analysis of data, we used the theory of prototypes and the theory of exemplification and the framework of hypothetical learning trajectories. Some extracts from the interviews are given to illustrate main results. For instance, we observed that students focus on various aspects of the graph (linearity, passing through the origin of the coordinate system, etc.) and mark them as important. As students acquire more experience with graphs of functions, they focus more on the curve of the graph and the importance of aspects changes. Nevertheless, some of them stay strong (real context of the graph) during the whole process and there are important mathematical aspects (as continuity) which are systematically underestimated.

David Janda
SOŠ pro administrativu EU
e-mail: djanda@seznam.cz

Derek Pilous
Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy
e-mail: derek.pilous@seznam.cz