František Kuřina

Je matematika krásná?

Učitel matematiky, Vol. 25 (2017), No. 2, 104–113

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149096

JE MATEMATIKA KRÁSNÁ?

František Kuřina

Kladnou odpověď na otázku položenou v nadpisu můžeme patrně očekávat od většiny profesionálních matematiků. Např. *Jaroslav Kurzweil* řekl při příležitosti převzetí Národní ceny vlády České republiky *Česká hlava*, kterou byl vyznamenán v roce 2006 za celoživotní dílo v oblasti teorie integrálních a diferenciálních rovnic: „Matematika je krásná a má krásné vlastnosti" ([14]: s. 160).

Slavný britský filozof a matematik *Bertrand Russell* (1872–1970) se k problematice matematické krásy vyjádřil takto: „Matematika je při správném pohledu nejen pravdivá, ale i nesmírně krásná – a její krása je chladná a strohá. Nesnaží se působit na naše slabé stránky líbivými prvky jako obrazy či hudba. Je vrcholně čistá a schopná strohé dokonalosti, již dokáže projevovat pouze velké umění. Skutečný duch blaženého vytržení a pocit nadlidské krásy, který je prubířským kamenem nejvyšší dokonalosti, se v matematice vyskytuje stejně jako v poezii. To, co je v matematice nejlepší, si zaslouží nejen výuku ve školách, ale i začlenění do každodenního myšlení, v němž by se takové myšlenky měly znovu a znovu opakovat s nepolevující podporou" ([13]: s. 50).

Známý anglický matematik *H. G. Hardy* (1877–1947) hodnotí krásu matematiky slovy: „Matematik, podobně jako malíř nebo básník, je tvůrcem vzorců. Matematikovy vzorce, stejně jako vzorce malíře nebo básníka musí být krásné; ideje, jako barvy nebo slova, do sebe musí harmonicky zapadat. Krása je prvním předpokladem, ošklivá matematika nemá na světě trvalého místa. Krása matematické věty závisí z velké části na její závažnosti, tak jako i v poezii krása verše závisí do určité míry na významu myšlenky, kterou obsahuje" ([3]: s. 77 a 83).

Zajímavé je, že i Platón (427–347 BC) zdůrazňuje: „Krása nechť je pro nás to, co je užitečné. Neříkáme, že tělo je krásné, když je schopné běhat nebo zápasit, a podobně zase u zvířat, u koně, kohouta, křepelky či u všech nástrojů a dopravních prostředků jak pozemských, tak i námořních plavidel a válečných lodí, u všech hudebních nástrojů a nářadí pro různá řemesla, i u lidských činností a zákonů, to všechno budeme asi nazývat stejně; u všeho budeme přihlížet, jaké je to povahy, jak to bylo vyrobeno, kde to je, a krásným nazveme, co bude užitečné, tam, kde to bude užitečné, k čemu a kdy – a co ve všech těchto ohledech nebude k ničemu, nazveme ošklivým“ ([11]: s. 79).

Matematická krása a vyučování

Krásu matematiky nemůže poznat žák, pro nějž je matematika strašákem nebo dokonce „intelektuálním kladivem“ [4]. Podle mého názoru značná část středoškolských studentů krásu matematiky nevnímá, možná, že ji nepociťují ani někteří jejich učitelé. Připomínám, v této souvislosti slova, která napsal náš významný předčasně zesnulý topolog *Zdeněk Frolík* (1933–1989).

„Domnívám se, že krása matematiky spočívá především v její harmonii. A nalézání harmonie je, aspoň podle mého názoru, tím nejhlubším zdrojem uspokojení. Je to krása vnímatelná a samotné vnímání této krásy může dát člověku náplň života. Přitom tuto krásu matematiky může člověk pouze vnímat – a vůbec ji nemusí vytvářet. Téměř žádný matematikář na gymnáziu vědecky nepracuje, ale každý by měl mít pro krásu matematiky vytříbenou vnímavost. Bez vnímavosti kantorů si těžko mohu představit úspěch reformy studia matematiky, i kdyby byla sebe líp připravená“ [2].

Přitom podle *Petra Vopěnky* (1935–2015) matematický „objekt je tím dokonalejší, čím lépe můžeme skrze něho nahlédnout k idejím co možná nejvyšším. Čím je objekt dokonalejší, tím je také krásnější“ ([17]: s. 114). Pokusme se tyto myšlenky ilustrovat příklady:

Příklad. Z množiny $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel můžeme vyčlenit (vytřídit) jako její vlastní podmnožinu množinu $\mathbb{P}$ všech prvočísel:

$$1, \mathbf{2}, \mathbf{3}, 4, \mathbf{5}, 6, \mathbf{7}, 8, 9, 10, \mathbf{11}, 12, \mathbf{13}, 14, 15, 16, \mathbf{17}, 18, \mathbf{19}, \dots \qquad (1)$$

Seřaďme prvky množin $\mathbb{N}$ a $\mathbb{P}$ do schématu

$$1, 2, 3, 4, \ 5, \ 6, \ 7, \ 8, \ 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, \ldots \quad (2)$$
$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 43, 47, 53, 57, 59, 61, \ldots \quad (3)$$

Bude-li řádek prvočísel pokračovat bez omezení, bude to znamenat, že existuje prosté zobrazení množiny $\mathbb{N}$ na množinu $\mathbb{P}$, a že tedy množina prvočísel má stejnou mohutnost jako množina všech přirozených čísel. Jak to můžeme nahlédnout?

Znásobíme-li první dvě prvočísla, dostaneme číslo složené: $2 \cdot 3 = 6$. Číslo $2 \cdot 3 + 1 = 6 + 1 = 7$ je prvočíslo. Pokračujme tímto způsobem dále:

$$\begin{aligned}
&2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31,\\
&2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 211,\\
&2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1 = 2\,311,\\
&2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30\,031,\\
&2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 + 1 = 510\,511,\\
&2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 + 1 = 9\,699\,691.
\end{aligned}$$

Rozhodnout, zda na pravých stranách těchto rovností jsou čísla složená nebo prvočísla je dosti pracné. Všimněme si proto „krásné“ myšlenky, která ovšem pochází už od *Euklida* (450–380 BC):

K libovolné množině $A = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ prvočísel můžeme sestrojit číslo $c = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k + 1$, které buď je prvočíslem (různým od všech prvků množiny A), nebo číslem složeným. V tomto případě nemůže být ovšem dělitelné žádným prvočíslem z množiny A (neboť při dělení čísla c libovolným prvočíslem p_i dostaneme zbytek 1) a existuje tedy prvočíslo, které v množině A není. Prvočísel je tedy nekonečně mnoho.

Příklad. Ve vyjádření (1) bylo možné si všimnout tzv. prvočíselných dvojčat (prvočísel, jejichž rozdíl je 2). Dosud není známo, zda je těchto dvojic konečný počet, je však pozoruhodné, že jednoduchá krásná myšlenka umožňuje dokázat, že „mezera“ mezi prvočísly může být větší než jakékoliv přirozené číslo. Skutečně. Např.

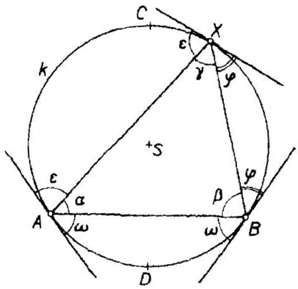
$$m! + 2, m! + 3, m! + 4, \ldots, m! + m$$

je pro libovolné přirozené m skupinou $m-1$ za sebou jdoucích složených čísel, neboť tato čísla jsou po řadě dělitelná čísly 2, 3, $4, \ldots, m$.

Příklad. Řadu krásných myšlenek můžeme nalézt ve středoškolské geometrii. Kružnice je osově souměrná podle osy své libovolné tětivy. Aplikujeme-li tento poznatek na tětivy AB, BX a XA kružnice k na obr. 1, pak v označení podle tohoto obrázku vidíme, že každý obvodový úhel je roven příslušnému úhlu úsekovému. Z rovností

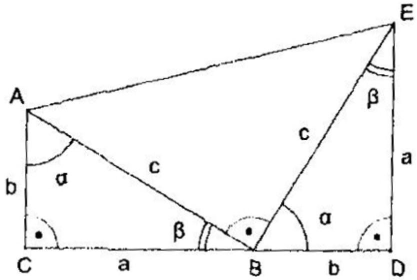
$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 180^\circ, \\ \epsilon + \varphi + \gamma &= 180^\circ, \\ \beta + \varphi + \omega &= 180^\circ, \\ \alpha + \epsilon + \omega &= 180^\circ \end{aligned}$$

totiž snadno vypočteme např. $\gamma = \omega$.



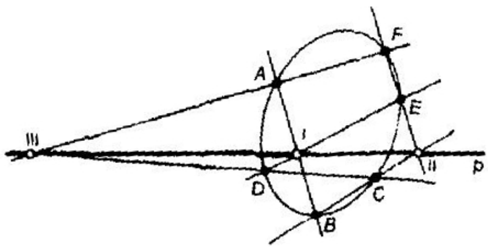
Obr. 1

Příklad. Na krásných nápadech jsou založeny důkazy mnohých matematických vět. Tak např. dvojí vyjádření obsahu lichoběžníku ACDE na obr. 2 vede k důkazu Pythagorovy věty. Tato idea pochází patrně od arabského matematika Nassir-ed-Dina, ačkoliv se její autorství často připisuje americkému prezidentu Garfieldovi. Autory krásných důkazů Pythagorovy věty jsou např. *Euklides*, *Bernard Bolzano*, *George Polya*, ale i *Leonardo da Vinci*. Jsou to ukázky umění učinit myšlenku viditelnou. Podrobněji jsem psal o této problematice např. v knize [7].



Obr. 2

Příklad. Při studiu projektivní geometrie snad každého musí oslnit krása *Pascalovy věty* o kuželosečkách. Dovedu pochopit nadšení, s nímž šestnáctiletý genius vylepil v ulicích Paříže r. 1640 čtyřicet plakátů s důkazem své slavné věty *Hexagrammum mysticum*: Průsečíky spojnic protilehlých stran libovolného hvězdicového šestiúhelníku vepsaného libovolné kuželosečce leží v přímce (obr. 3). Její důkaz lze najít v knize [7].

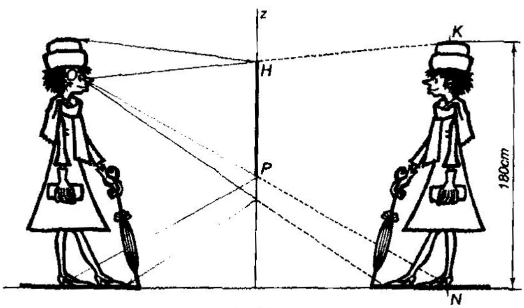


Obr. 3

Některé matematické ideje můžeme vyjádřit vizuálně. Tak např. krása a harmonie mnohých jevů přírody, které jsou obvykle spojeny s růstem či pohybem, našly přirozeně svůj odraz v příslušném matematickém jazyku. Pravidelnost květů rostlin, ozubených kol či ornamentů můžeme popsat v Gaussově rovině, neboť např. řešení binomické rovnice lze v důsledku goniometrického vyjádření komplexních čísel a Moivreovy věty znázornit vrcholy pravidelného mnohoúhelníku. Toto učivo je podrobně studováno v učebnici [1], bohužel odkazy na jevy přírody, techniky nebo umění se zde nevyskytují. Ani učebnice [12], v níž jsou zpracována shodná a podobná zobrazení roviny, vůbec neuvádí ilustrace této tematiky souměrnými útvary z přírody či umění a aplikace těchto teorií mimo matematiku. Krásnými příklady využití geometrických poznatků jsou problémy spjaté s dělením a vyplňováním prostoru. Některé podněty tohoto typu jsem zpracoval v publikaci [6] určené budoucím učitelům matematiky. Rozvíjet představivost a umění vidět souvislosti je přirozeně možné již na základní škole, např. prací s rovinným zrcátkem a vhodnými úlohami ([15], [7]). Zde uvedu na ukázku dva příklady:

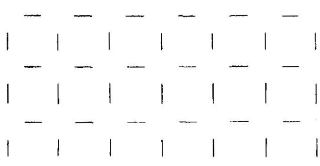
Příklad. Jak vysoké zrcadlo koupíte dámě vysoké 180 cm, máte-li jí splnit přání: Chci se vidět celá, od hlavy až k patě.

Řešení je zřejmé z obr. 4.



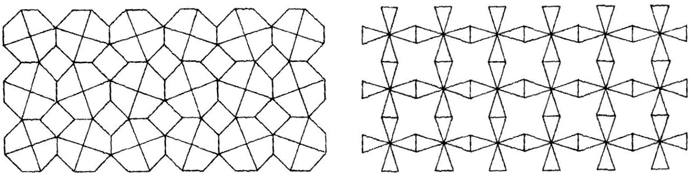
Obr. 4

Příklad. Žákům základní školy jsme zadali úlohu: Na obr. 5 je část tapety, vzoru na látce nebo dláždění. Dokreslete obrázek.



Obr. 5

Žáci pracovali s velkým zájmem a rozmanitost krásných výsledků nás překvapila. Dva žákovské výsledky jsou na obr. 6.



(a) (b)

Obr. 6

Poznávání matematické krásy je důležitý motivační prvek, který může přispět k většímu zájmu a oblibě matematiky.

Krásná matematická témata

Podle *Paula M. Diraca*, nositele Nobelovy ceny za fyziku z r. 1933, spočívají zákony moderní fyziky, včetně teorie relativity a kvantové teorie na matematické kráse. Krásnými matematickými objekty jsou podle knihy [16], např.:

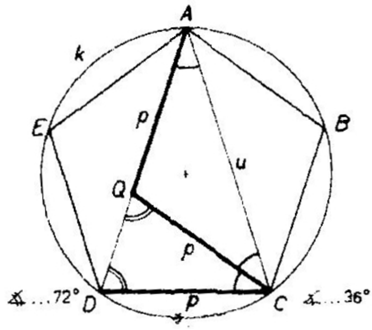
- teorie platónských těles, s aplikacemi v přírodních vědách (krystalografii, chemii a biologii),
- binomická věta,
- Pascalův trojúhelník,
- zlatý řez,
- Fibonacciova čísla.

S uspokojením mohu konstatovat, že základní poučení o těchto tématech lze najít v našich středoškolských učebnicích.

Rozdělit úsečku v poměru zlatého řezu znamená, jak známo, rozdělit ji tak, aby poměr délky celé úsečky ku délce její větší části se rovnal poměru délky její větší části ku délce její části menší. V poměru zlatého řezu je délka úhlopříčky a strany pravidelného pětiúhelníku. V označení podle obr. 7 totiž zřejmě platí:

$$\frac{u}{p} = \frac{p}{u-p}.$$

Odtud můžeme vypočítat $\frac{u}{p} = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$, což je tzv. zlatý poměr τ.



Obr. 7

Zlatý řez se objevuje v celých dějinách geometrie, např. u *Pythagora*, *Euklida*, *Platóna*, *Leonarda da Vinci*, *Luca Pacioliho* a *Johanna Keplera*, který ho považoval spolu s Pythagorovou větou za velký poklad geometrické vědy. Dělení úseček v poměru zlatého řezu bývá mnohdy vnímáno jako ideál harmonie a krásy. Vyskytuje se v přírodě (např. v květech některých ovocných stromů, plané růže, blatouchu, pomněnky, uspořádání jader v jablku, v poměru částí lidského těla, . . .) a ovšem i v umění (např. v architektuře).

V roce 2012 představil autorský kolektiv vedený Šárkou Voráčovou a Alenou Šarounovou rozsáhlý přehled „geometrie krásné a užitečné“ [18] – od kuželoseček, kinematické geometrie, ploch stavební praxe a geometrie kolem nás až k fraktální geometrii.

V témže roce vyšla česky *Matematická kniha* [10] popularizátora vědy *Clifforda A. Pickovera*, který uvádí krásu matematiky v pestré a dokonale výtvarně zpracované přehlídce. Upozorňuji zde zejména na Archimedovu spirálu na kapradině (s. 66), logaritmickou spirálu na ulitě loděnky (s. 140), paradox pobřeží spjatý s fraktální dimenzí Benoîta Mandelbrota (s. 402) a Mandelbrotovu množinu (s. 472).

Elementární krásu stereometrických modelů popisuje i *Marie Kupčáková* v *Tvořivé geometrii* [5].

Závěr

Matematika je krásná. Abychom však tuto krásu vnímali, musíme matematiku promýšlet a porozumět jí. Matematika biflovaná bez porozumění nemůže nikoho zaujmout. Patří do sféry kantorského umění krásu matematiky přibližovat žákům. Měli bychom ji učit vnímat i budoucí učitele matematiky v jejich univerzitním vzdělávání. Musím bohužel konstatovat, že se nám to daří dosti málo.

Literatura

[1] Calda, E. (1994). *Matematika pro gymnázia – Komplexní čísla.* Praha: Prometheus.

[2] Frolík, Z. (1976). Interview o matematice. *Mladá fronta* 16. 10.

[3] Hardy, G. H. (1999). *Obrana matematikova.* Praha: Prostor.

[4] ČTK (2014). *Ikona didaktiky matematiky Milan Hejný jde tvrdě proti povinné maturitě z matematiky.* Dostupné z `https://www.novinky.cz/veda-skoly/354655-ikona-didaktiky-milan-hejny-jde-tvrde-proti-povinne-maturite-z-matematiky.html`

[5] Kupčáková, M. (2015). *Tvořivá geometrie I.* Hradec Králové: Gaudeamus.

[6] Kuřina, F. (2002). *Deset geometrických transformací.* Praha: Prometheus.

[7] Kuřina, F. (2012). *Elementární matematika a kultura.* Hradec Králové: Gaudeamus.

[8] Kuřina, F. (2014). Jak učinit myšlenku viditelnou. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, (59), 117–134.

[9] Kuřina, F., et al. (2009). *Matematika a porozumění světu.* Praha: Academia.

[10] Pickover, A. C. (2012). *Matematická kniha.* Praha: Argo.

[11] Platón (1979). *Dialogy o kráse.* Praha: Odeon.

[12] Pomykalová, E. (1993). *Matematika pro gymnázia – Planimetrie.* Praha: Prometheus.

[13] Russell, B. (2015). *Mystika a logika a jiné eseje*. Praha: Academia.

[14] Slavík, A. & Tvrdý, M. (2016). Jaroslav Kurzweil devadesátiletý. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, (61), 160–161.

[15] Spiegel, H. (1996). *Spiegeln mit dem Spiegel*. Leipzig: Klett.

[16] Stakhof, A. (2009). *The Mathematics of Harmony*. New Jersey. World Scientific.

[17] Vopěnka, P. (1989). *Rozpravy s geometrií*. Praha: Panorama.

[18] Voráčová, S., et al. (2012). *Atlas geometrie*. Praha: Academia.

Abstract

The first part deals with views on mathematical beauty by Russell, Hardy and Platon. In the second part, there are examples of mathematical beauty from arithmetic and geometry. Possibility how to make a thought visible is discussed. The last part deals with some elements of mathematical beauty (Platonic solids, Pascal's triangle, Binomial Formula).

František Kuřina
Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta, Katedra matematiky
Rokitanského 62
500 03 Hradec Králové
e-mail: frantisek.kurina@uhk.cz